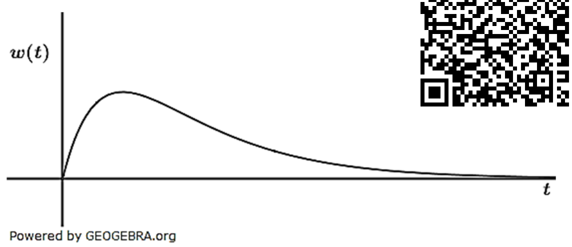
Abitur allg. bildendes Gymnasium Wahlteil Analysis 2020 BW

Aufgabe A1.1

Betrachtet wird das Wachstum einer Palme. Ihre Höhe beträgt zu Beobachtungsbeginn einen Meter, die momentane Wachstumsrate ihrer Höhe wird durch die Funktion w mit $w(t) = 4 \cdot (e^{-t} - e^{-2t});\ \ t > 0$
(t in Jahren nach Beobachtungsbeginn, $w(t)$ in Meter pro Jahr) beschrieben.



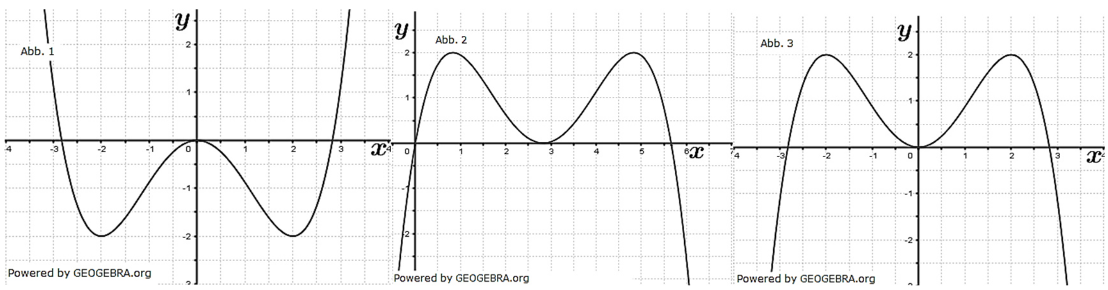
a) Geben Sie die momentane Wachstumsrate zum Zeitpunkt $t = 1$ an.
Begründen Sie anhand des Graphen, dass die Höhe der Palme im abgebildeten Zeitraum nie abnimmt.
Die Funktion w besitzt im abgebildeten Bereich eine Wendestelle.
Beschreiben Sie die Bedeutung dieser Wendestelle im Sachzusammenhang.
Berechnen Sie den Zeitpunkt der maximalen momentanen Wachstumsrate.

b) Berechnen Sie die Höhenzunahme der Palme im zweiten Jahr nach Beobachtungsbeginn.
Bestimmen Sie einen integralfreien Funktionsterm der Funktion h, der die Höhe der Palme zum Zeitpunkt t angibt.
Ermitteln Sie rechnerisch den Zeitpunkt, an dem die Palme eine Höhe von $1{,}50\,m$ hat.
Untersuchen Sie, welche Höhe die Palme maximal erreichen kann.
Formulieren Sie eine Fragestellung im Sachzusammenhang, die auf die Gleichung $\frac{h(t+0{,}5)}{h(t)} = 1{,}5$ führt.

Aufgabe A1.2

Für jedes $a > 0$ ist eine Funktion f_a gegeben durch $f_a(x) = -\frac{1}{8}x^4 + a^2x^2$..

a) Abgebildet sind drei Graphen.
Begründen Sie, dass zwei dieser Graphen nicht zu einer Funktion f_a gehören.
Der verbleibende Graph gehört zu einer Funktion f_a. Bestimmen Sie den zugehörigen Wert von a.



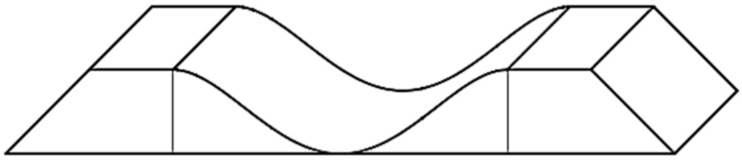
b) Jede Funktion f_a besitzt an der Stelle $x_1 = 2a$ ein Maximum.
Ermitteln Sie eine Gleichung der Kurve, auf der die zugehörige Hochpunkte aller Graphen von f_a liegen.

c) Der Punkt $O(0|0)$ sowie die Punkte $P(4a|-16a^4)$ und $P(-4a|-16a^4)$ des Graphen von f_a bilden ein Dreieck.
Berechnen Sie denjenigen Wert von a, für den dieses Dreieck gleichseitig ist.

Abitur allg. bildendes Gymnasium Wahlteil Analysis 2020 BW

Aufgabe A2.1

Die nebenstehende Abbildung zeigt eine Station in einem Bikepark, die aus zwei seitlichen Wällen und einer Fahrrinne besteht.



Die Abbildung in der Anlage zeigt modellhaft ihren Querschnitt. Dabei wird die Fahrrinne durch den Graphen einer Funktion f im Bereich $-8 \leq x \leq 8$ modelliert (Angaben in Meter).
Die Querschnitte der Wälle sind grau markiert. Der horizontale Untergrund wird im Querschnitt durch die x-Achse beschrieben. Die Station hat auf ihrer gesamten Länge den in der Abbildung gezeigten Querschnitt.

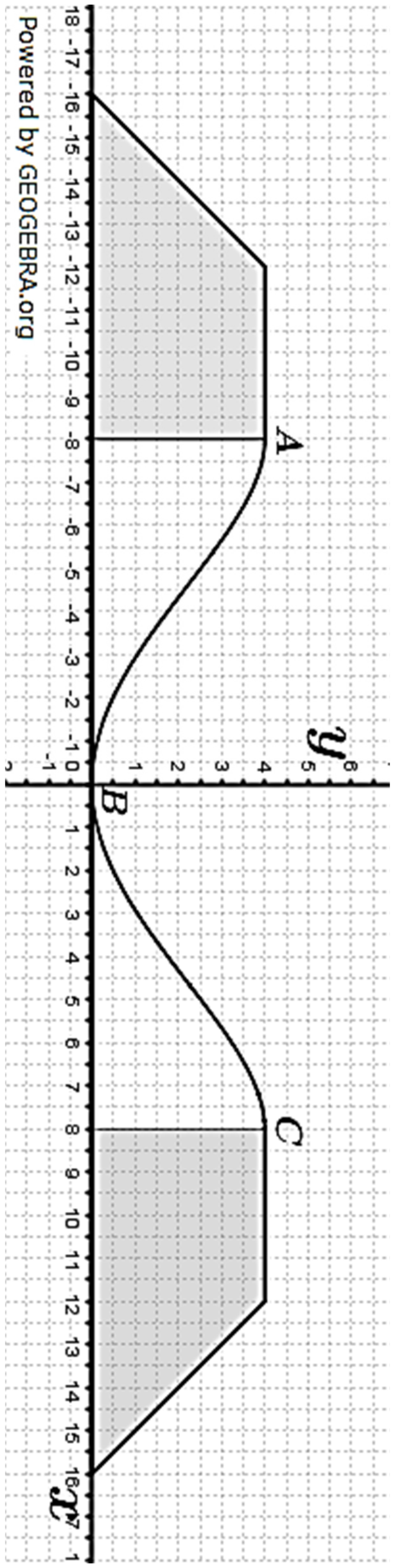
a) Bearbeiten Sie die folgenden Aufgabenstellungen anhand des Graphen in der Anlage.
Bestimmen Sie die Breite der Fahrrinne in einer Höhe von $1\,m$ über dem Untergrund.
Ermitteln Sie die mittlere Steigung zwischen den im Modell mit B und C bezeichneten Punkten.
Bestimmen Sie die maximale Steigung der Fahrrinne.
Begründen Sie, dass f keine ganzrationale Funktion zweiten Grades sein kann.

b) Es ist $f(x) = -\frac{1}{1024}x^4 + \frac{1}{8}x^2$.
Berechnen Sie die Höhe, in der die Fahrrinne eine Breite von $12\,m$ hat.
Das verbaute Material hat ein Gesamtvolumen von $1168\,m^3$. Ermitteln Sie die Länge der Station.

c) Die abgebildete Fahrrinne lässt sich auch näherungsweise durch den Graphen einer trigonometrischen Funktion g modellieren, der die Punkte A, B und C als Extrempunkte besitzt.
Bestimmen Sie einen möglichen Funktionsterm von g.

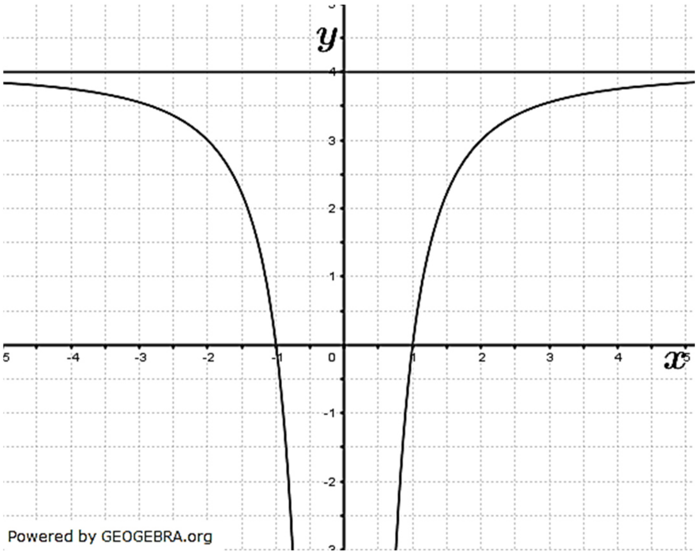
Abitur allg. bildendes Gymnasium Wahlteil Analysis 2020 BW

Abbildung zu Aufgabe 2.1



Aufgabe A2.2

Gegeben ist die Funktion f durch $f(x) = 4 - \frac{4}{x^2};\ x \neq 0$.
Ihr Graph K sowie die Gerade g: $y = 4$ sind in der folgenden Abbildung dargestellt.



a) Der Punkt $P(u|v)$ mit $u > 0$ ist ein Punkt auf K. Die Punkte P, $Q(u|4)$, $R(0|4)$ und $S(0|v)$ sind die Ecken eines Rechtecks.
Bei Rotation dieses Rechtecks um die y-Achse entsteht ein Zylinder. Zeigen Sie, dass das Volumen dieses Zylinders unabhängig von u ist.
Berechnen Sie denjenigen Wert von u, für den der Inhalt der Mantelfläche des Zylinders 4π beträgt.

b) Für jeden Punkt auf K begrenzen die zugehörige Tangente an K, die Gerade g und die y-Achse ein Dreieck. Für einen solchen Punkt T mit positiver x-Koordinate ist dieses Dreieck gleichschenklig.
Berechnen Sie die x-Koordinate dieses Punktes T.

c) C ist der Graph der Funktion h mit $h(x) = 1 - \frac{9}{x^2}$.
K geht durch eine Streckung in y-Richtung und eine Streckung in x-Richtung aus C hervor.
Ermitteln Sie die beiden zugehörigen Streckfaktoren.