Abitur allg. bildendes Gymnasium Wahlteil Analysis 2020 BW

Lösung A1.1

Lösungslogik

Wir müssen beachten, dass die gegebene Funktionsgleichung eine Gleichung der momentanen Änderungsrate ist.

a) *Momentane Wachstumsrate zum Zeitpunkt $t = 1$:*
Wir berechnen $w(1)$.
Begründung, dass Höhe der Palme im abgebildeten Zeitraum nie abnimmt:
Siehe Klausuraufschrieb.
Bedeutung einer Wendestelle im Sachzusammenhang:
Siehe Klausuraufschrieb.
Zeitpunkt der maximalen momentanen Wachstumsrate:
Wir bilden $w'(t)$, setzen auf null und lösen nach t auf.

b) *Höhenzunahme der Palme im zweiten Jahr nach Beobachtungsbeginn:*
Wir bilden $\int_1^2 w(t)\,dt$.
Integralfreien Funktionsterm der Funktion h:
Wir bilden $\int_0^t w(x)\,dx + 1$. Die Addition von 1 ist erforderlich wegen der Anfangshöhe der Pflanze mit $1\,m$.
Zeitpunkt, an dem die Palme eine Höhe von $1{,}50\,m$ hat:
Wir setzen die Integralfunktion $h(t)$ auf $1{,}5$ und lösen die Gleichung nach t auf.
Maximal Höhe die Palme:
Wir bestimmen den Limes von $h(t)$ für $t \to \infty$.
Fragestellung im Sachzusammenhang, die auf die Gleichung $\frac{h(t+0{,}5)}{h(t)} = 1{,}5$ führt:
Siehe Klausuraufschrieb.

Klausuraufschrieb

a) *Momentane Wachstumsrate zum Zeitpunkt $t = 1$:*
$w(1) = 4 \cdot (e^{-1} - e^{-2}) = 4 \cdot \left(\frac{1}{e} - \frac{1}{e^2}\right) = \frac{4}{e^2} \cdot (e-1) \approx 0{,}93$
Die momentane Wachstumsrate zum Zeitpunkt $t = 1$ beträgt etwa $0{,}93\ \frac{m}{Jahr}$.
Begründung, dass Höhe der Palme im abgebildeten Zeitraum nie abnimmt:
$w(t)$ ist die Wachstumsänderungsrate. Da $w(t)$ im abgebildeten Zeitraum stets größer 0 ist, nimmt die Höhe der Palme stets zu und nie ab.
Bedeutung einer Wendestelle im Sachzusammenhang:
Eine Wendestelle ist stets die Stelle einer stärksten Zunahme bzw. Abnahme der Änderungsrate. Da im Sachzusammenhang die Wendestelle negative Steigung besitzt, ist sie die Stelle der stärksten Abnahme der Änderungsrate.
Zeitpunkt der maximalen momentanen Wachstumsrate:
$w'(t) = 4 \cdot (-e^{-t} + 2e^{-2t})$
$w'(t) = 0 = 4 \cdot (-e^{-t} + 2e^{-2t}) \quad | \quad$ Satz vom Nullprodukt
$-e^{-t} + 2e^{-2t} = 0$
$2e^{-2t} = e^{-t} \quad | \quad : e^{-t}$
$2e^{-t} = 1$
$e^{-t} = \frac{1}{2} = \frac{1}{e^t}$
$e^t = 2$
$t = ln\,(2) \approx 0{,}693$
Die maximale momentane Wachstumsrate liegt bei etwa $0{,}69$ Jahren $= 8{,}4$ Monaten nach Beobachtungsbeginn.

Abitur allg. bildendes Gymnasium Wahlteil Analysis 2020 BW

b) *Höhenzunahme der Palme im zweiten Jahr nach Beobachtungsbeginn:*

$\int_1^2 4 \cdot (e^{-t} - e^{-2t})\, dt = 4 \cdot \left[-e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-2t}\right]_1^2 \approx 0{,}696$

Im zweiten Jahr wächst die Palme etwa $0{,}7\ m$.

Integralfreien Funktionsterm der Funktion h:

$h(t) = \int_0^t w(x)\, dx + 1 = 4 \cdot \left(-e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-2t} - \left(-1 + \frac{1}{2}\right)\right) + 1$

$h(t) = 3 - 4e^{-t} + 2e^{-2t}$

Zeitpunkt, an dem die Palme eine Höhe von $1{,}50\ m$ hat:

$h(t) = 1{,}5$

$3 - 4e^{-t} + 2e^{-2t} = 1{,}5$

$2e^{-2t} - 4e^{-t} + 1{,}5 = 0$

$e^{-t} = u$ | Substitution

$2u^2 - 4u + 1{,}5 = 0$ | $:2$

$u^2 - 2u + 0{,}75 = 0$

$u_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1 - 0{,}75} = 1 \pm 0{,}5$

$u_1 = 1{,}5;\ \ u_2 = 0{,}5$

$e^{-t_1} = u_1 = 1{,}5$ | Resubstitution

$-t_1 = ln\,(1{,}5)$

$t_1 \approx -0{,}4$

$e^{-t_2} = u_2 = 0{,}5$ | Resubstitution

$-t_2 = ln\,(0{,}5)$

$t_2 \approx 0{,}69$

Etwa $0{,}7$ Jahre $= 8{,}4$ Monate nach Beobachtungsbeginn ist die Palme $1{,}50\ m$ hoch.

Maximal Höhe die Palme:

$\lim\limits_{t \to \infty} h(t) = 3$

Die Palme wird maximal $3\ m$ hoch.

Fragestellung im Sachzusammenhang, die auf die Gleichung $\frac{h(t+0{,}5)}{h(t)} = 1{,}5$ führt:

In welchem Halbjahreszeitraum wächst die Palme um $50\ \%$?

Lösung A1.2

Lösungslogik

a) *Begründung des Graphen zur Funktion f_a:*
Siehe Klausuraufschrieb.
Bestimmung des zugehörigen Wertes von:
Wir entnehmen der Grafik einen gut ablesbaren Punkt und machen damit eine Punktprobe.

b) *Ortskurve der Hochpunkte aller Graphen von f_a.*
Da der x-Wert eines Maxima schon gegebene ist, brauchen wir diesen nur nach a umzustellen und in der Funktionsgleichung alle a durch diesen Ausdruck zu ersetzen.

c) *Wert von a für ein gleichseitiges Dreieck:*
Das Dreieck OPQ ist für $a = 1$ beispielhaft eingezeichnet, siehe Klausuraufschrieb. Das Dreieck ist unabhängig von a immer gleichschenklig, das heißt es gilt $\overline{OQ} = \overline{OP}$. Damit das Dreieck gleichseitig ist, muss gelten: $\overline{OP} = \overline{PQ}$. Berechnung der Längen von $\overline{OP}$ und $\overline{PQ}$ über den Satz des Pythagoras.

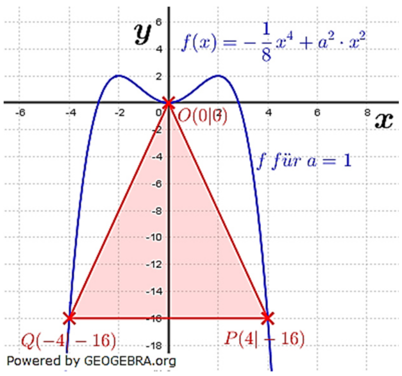
Abitur allg. bildendes Gymnasium Wahlteil Analysis 2020 BW

Klausuraufschrieb

a) *Begründung des Graphen zur Funktion f_a:*
Der Graph der gegebenen Funktion ist achsensymmetrisch zur y-Achse. Damit fällt Abb. 2 aus.
Wegen $-\frac{1}{8}x^4$ gilt $f_a(x) \to -\infty$ für $x \to -\infty$. Somit ist Abb. 3 der Graph der Funktion f_a.
Bestimmung des zugehörigen Wertes von a:
Gemäß Abb. 3 ist $P(2|2) \in f_a$.
Punktprobe mit $P(2|2)$:
$f_a(2) = 2 = -\frac{1}{8}2^4 + a^2 2^2$
$2 = -\frac{16}{8} + 4a^2$
$4 = 4a^2$
$a_{1,2} = \pm 1$
Wegen Aufgabenstellung $a > 0$ ist $a = 1$ die Lösung.

b) *Ortskurve der Hochpunkte aller Graphen von f_a.*
$x_1 = 2a$ | $:2$
$a = \frac{1}{2}x$
$a \to f_a$ ergibt $o(x)$
$o(x) = f_a(a) = -\frac{1}{8}x^4 + \left(\frac{1}{2}x\right)^2 \cdot x^2 = -\frac{1}{8}x^4 + \frac{1}{4}x^4 = \frac{1}{8}x^4$
Alle Hochpunkte von f_a liegen auf dem Graphen der Funktionsgleichung $o(x) = \frac{1}{8}x^4$.

c) *Wert von a für ein gleichseitiges Dreieck:*
Situation für $a = 1$ siehe Grafik rechts.
Für alle Dreiecke unabhängig von a gilt:
$\overline{OQ} = \overline{OP}$ (wegen der Symmetrie). Für ein gleichseitiges Dreieck muss zusätzlich gelten:
$\overline{OP} = \overline{PQ}$.



$\overline{OP} = \sqrt{x_p^2 + y_p^2}$ | Satz des Pythagoras
$\overline{OP} = \sqrt{(4a)^2 + (-16a^4)^2} = \sqrt{16a^2 + 256a^8}$

$\overline{PQ} = \sqrt{\left(x_q - x_p\right)^2 + \left(y_q - y_p\right)^2}$ | Satz des Pythagoras
$\overline{PQ} = \sqrt{(-4a - 4a)^2 + (-16a^4 - (-16a^4)^2} = \sqrt{(-8a)^2} = \sqrt{64a^2}$
Wegen $\overline{OP} = \overline{PQ}$ gilt:
$\sqrt{16a^2 + 256a^8} = \sqrt{64a^2}$ | ^{2}
$16a^2 + 256a^8 = 64a^2$ | $-64a^2$
$256a^8 - 48a^2 = 0$
$a^2 \cdot (256a^6 - 48) = 0$ | Satz vom Nullprodukt
$a_{1,2} = 0$ | keine Lösung wegen $a > 0$
$256a^6 = 48$
$a^6 = \frac{3}{16}$ | $\sqrt[6]{}$
$a_{3,4} = \pm 0{,}7565$
Für $a \approx 0{,}76$ ist das Dreieck OPQ gleichseitig.

Abitur allg. bildendes Gymnasium Wahlteil Analysis 2020 BW

Lösung A2.1

Lösungslogik

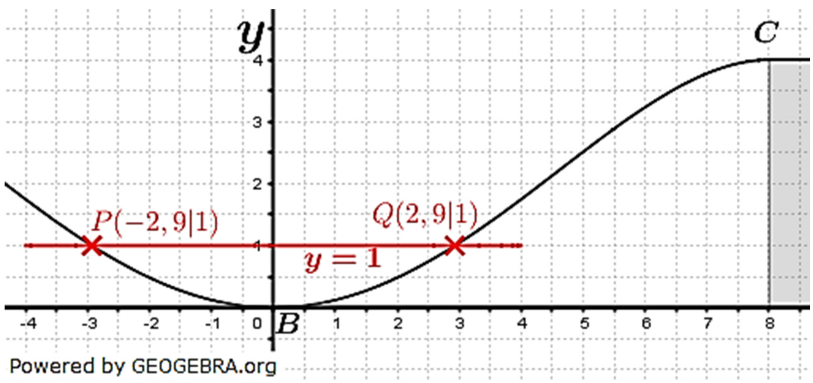
a) *Alle Lösungen und Beschreibungen sind der beigefügten Grafik zu entnehmen:*
Breite der Fahrrinne in einer Höhe von $1\,m$:
Ablesen aus Grafik.
Mittlere Steigung zwischen den im Modell mit B und C bezeichneten Punkten:
Wir lesen die Koordinaten der Punkte B und C aus der Grafik ab und bilden $\frac{y_c-y_b}{x_c-x_b}$.
Maximale Steigung der Fahrrinne:
Diese liegt im Wendepunkt der Kurve zwischen den Punkten B und C. Wir zeichnen eine Tangente im Wendepunkt und bestimmen das Steigungsdreieck der Tangente.
Begründung, dass f keine ganzrationale Funktion zweiten Grades sein kann:
Siehe Klausuraufschrieb

b) *Höhe, in der die Fahrrinne eine Breite von $12\,m$ hat:*
Wegen der Achsensymmetrie berechnen wir $f(6)$.
Länge der Station bei $1168\,m^3$ Volumen:
Das Volumen errechnet sich aus der Querschnittsfläche des Profils multipliziert mit der Länge der Station.

c) *Möglicher Funktionsterm g als trigonometrische Funktion:*
Wir bestimmen über die y-Koordinaten der Hoch- und Tiefpunkte die Parameter a und d der trigonometrischen Funktion.
Wir bestimmen über den Abstand der beiden Hochpunkte die Periode p und daraus den Periodenfaktor b der trigonometrischen Funktion.
Zum Abschluss betrachten wir uns noch eine eventuelle Verschiebung des Graphen der trigonometrischen Funktion in x-Richtung zwecks Ermittlung des Parameters c.

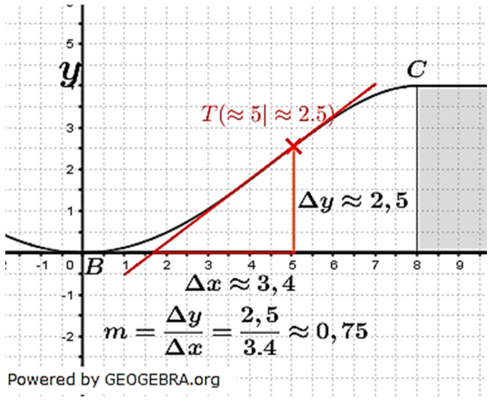
Klausuraufschrieb

a) *Breite der Fahrrinne in einer Höhe von $1\,m$:*
Aus der Grafik lesen wir ab $x_P = -2{,}9$ und $x_Q = 2{,}9$.
$b = x_q - x_p = 2{,}9 + 2{,}9$
$b = 5{,}8$
Die Fahrrinne ist in $1\,m$ Höhe etwa $5{,}8\,m$ breit.



Zeitpunkt des verdreifachten Flächeninhaltes:
Mittlere Steigung zwischen den im Modell mit B und C bezeichneten Punkten:
Wir lesen ab: $B(0|0)$, $C(8|4)$
$\overline{m} = \frac{y_c-y_b}{x_c-x_b} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$
Die mittlere Steigung im Modell zwischen den Punkten B und B beträgt $0{,}5$.

Maximale Steigung der Fahrrinne:
Die Grafik zeigt die Tangente im Wendepunkt sowie das zugehörige Steigungsdreieck.
Wir lesen ab: $\Delta y\ \approx 2{,}5$; $\Delta x\ \approx 3{,}4$, daraus folgt die maximale Steigung der Fahrrinne mit:
$m = \frac{\Delta y}{\Delta y} = \frac{2{,}5}{3{,}4} \approx 0{,}75$



Begründung, dass f keine ganzrationale Funktion zweiten Grades sein kann:
Die Funktion f hat Wendepunkte. Der Graph einer ganzrationale Funktion 2. Grades ist eine Parabel, ein solcher Graph besitzt keine Wendepunkte.

b) *Höhe, in der die Fahrrinne eine Breite von $12\ m$ hat:*
$f(6) = -\frac{1}{1024} \cdot 6^4 + \frac{1}{8} \cdot 6^2 \approx 3{,}23$
Die Fahrrinne ist in einer Höhe von etwa $3{,}2\ m$ $12\ m$ breit.
Länge der Station bei $1168\ m^3$ Volumen:
Die Länge errechnet sich aus dem Quotienten von Volumen und Flächeninhalt des Querschnitts.
$l = \frac{V}{A_{Quer}}$
Berechnung von A_{Quer}:
Aus Symmetriegründen berechnen wir nur die Querschnittsfläche der Fahrrinne von 0 bis 16 und multiplizieren das Ergebnis mit 2.
Die Fläche von 0 bis 8 ist die Fläche, die mit der x- und y-Achse einschließt. Berechnung über $\int_0^8 f(x)\,dx$.
Die in der Anlage grau hinterlegte Fläche ist ein Trapez mit $a = 8$, $c = 4$ und $h = 4$. Berechnung über die Trapezformel.
$A_{Quer} = 2 \cdot \left(\int_0^8 \left(-\frac{1}{1024}x^4 + \frac{1}{8}x^2\right)\,dx + \frac{a+c}{2} \cdot h\right)$
$\int_0^8 \left(-\frac{1}{1024}x^4 + \frac{1}{8}x^2\right)\,dx = \left[-\frac{x^5}{5120} + \frac{x^3}{24}\right]_0^8 = \frac{8^3}{24} - \frac{8^5}{5120} \approx 14{,}9$
$\frac{a+c}{2} \cdot h = \frac{8+4}{2} \cdot 4 = 24$
$A_{Quer} = 2 \cdot (14{,}9 + 24) = 77{,}8$
$l = \frac{V}{A_{Quer}} = \frac{1168}{77{,}8} \approx 15$
Die Fahrrinne ist $15\ m$ lang.

c) *Möglicher Funktionsterm g als trigonometrische Funktion:*
$g(x) = a \cdot sin\big(b(x-c)\big) + d$
$y_{HP} = 4;\ \ y_{TP} = 0$
$a = \frac{y_{HP}-y_{TP}}{2} = \frac{4-0}{2} = 2$
$d = \frac{y_{HP}+y_{TP}}{2} = \frac{4+0}{2} = 2$
Abstand zwischen zwei Hochpunkten ist p:
$p = 8\ \ => \ \ b = \frac{2\pi}{p} = \frac{2\pi}{8} = \frac{\pi}{4}$

Abitur allg. bildendes Gymnasium Wahlteil Analysis 2020 BW

Verschiebung in x-Richtung:
Betrachten wir das Profil als Sinuskurve, so ist der Graph von g um 2 Einheiten nach links bzw. rechts verschoben. Daraus folgt $c=-2$ bzw. $c=2$. Die Funktionsgleichung lautet somit:

$g(x)=2\,sin\left(\frac{\pi}{4}(x-2)\right)+2$ bzw. $g(x)=2\,sin\left(\frac{\pi}{4}(x+2)\right)+2$

Betrachten wir das Profil als Kosinuskurve, so ist die Kosinuskurve lediglich an der x-Achse gespiegelt und in x-Richtung unverschoben. Die Funktionsgleichung lautet dann:

$g(x)=-2\,cos\left(\frac{\pi}{4}x\right)+2$

Lösung A2.2

Lösungslogik

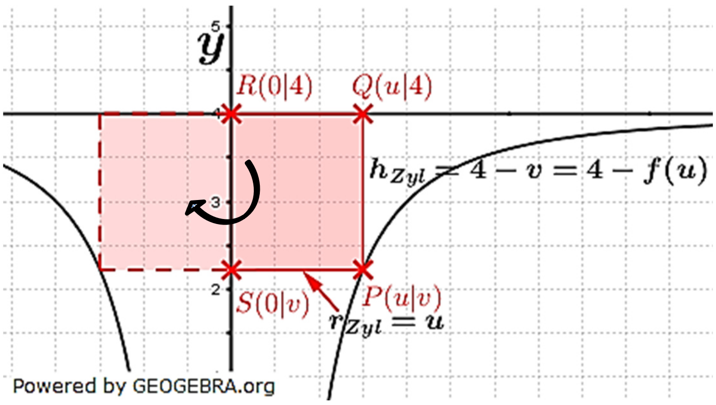
a) *Volumen eines Zylinders ist unabhängig von u:*
Wir wählen einen Punkt $P(u|v)$ auf dem rechten Ast des Graphen der Funktion und tragen zusätzlich die Punkte $Q(u|4)$, $R(0|4)$ sowie $S(0|v)$ und kennzeichnen das dadurch begrenzte Rechteck.
Bei Rotation um die y-Achse entsteht ein Zylinder folgender Eigenschaften:
Radius $r=u$, Höhe $h=4-v=4-f(u)$
Das Volumen des Zylinders berechnet sich dann aus $V=2\pi u^2\cdot\left(4-f(u)\right)$.
Wert von u, für den der Inhalt der Mantelfläche des Zylinders 4π beträgt:
Die Mantelfläche des Zylinders errechnet sich aus $M=2\pi\cdot u\cdot\left(4-f(u)\right)$. Wir setzen $M=2\pi$ und lösen die Gleichung nach u auf.

b) *Punkt T mit positiver x-Koordinate für den ein Dreieck gleichschenklig ist:*
Die Grafik des Klausuraufschriebs verdeutlicht die Situation. Das Dreieck ist rechtwinklig. Soll es zudem gleichschenklig sein, so müssen seine Basiswinkel $45\,°$ haben, die Tangente muss also die Steigung $m=1$ haben.

c) *Streckfaktoren einer Funktion h:*
Siehe Klausuraufschrieb.

Klausuraufschrieb

a) *Volumen eines Zylinders ist unabhängig von u:*
Die nebenstehende Grafik verdeutlicht die Situation.



Zylindervolumen:

$V_{Zyl}=\pi r^2\cdot h$

$V_{Zyl}=\pi u^2\cdot(4-f(u))$

$V_{Zyl}=\pi u^2\cdot\left(4-\left(4-\frac{4}{u^2}\right)\right)$

$V_{Zyl}=\pi u^2\cdot\left(4-4+\frac{4}{u^2}\right)$

$V_{Zyl}=\pi u^2\cdot\frac{4}{u^2}=4\pi$

Das Volumen des Zylinders ist unabhängig von u.
Wert von u, für den der Inhalt der Mantelfläche des Zylinders 4π beträgt:

$M_{Zyl}=2\pi r\cdot h=2\pi u\left(4-\left(4-\frac{4}{u^2}\right)\right)=2\pi u\cdot\frac{4}{u^2}=\frac{8\pi}{u}$

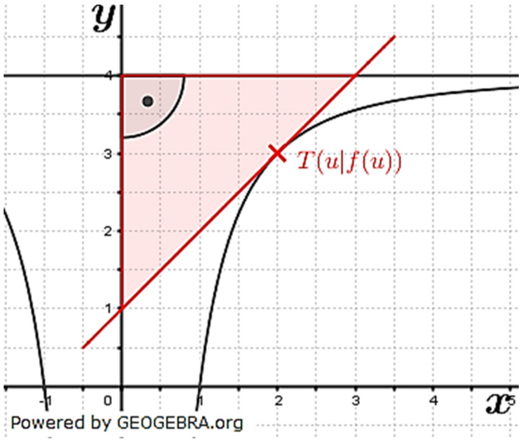
$4\pi=\frac{8\pi}{u}$ ==> $u=2$

Für $u=2$ beträgt der Inhalt der Mantelfläche des Zylinders 4π.

Abitur allg. bildendes Gymnasium Wahlteil Analysis 2020

b) *Punkt T mit positiver x-Koordinate für den ein Dreieck gleichschenklig ist:*

Die nebenstehende Grafik verdeutlicht die Situation. Das Dreieck ist rechtwinklig. Soll es gleichzeitig gleichschenklig sein, so müssen die beiden Basiswinkel $45\,°$ haben. Damit muss die Tangente die Steigung $m = tan(45\,°) = 1$ haben.



$f'(x) = 8x^{-3} = \frac{8}{x^3}$

$\frac{8}{x^3} = 1$

$x^3 = 8$

$x_t = 2$

$f(2) = 4 - \frac{4}{2^2} = 3$

Für den Punkt $T(2|3)$ ist das Dreieck gleichschenklig.

c) *Streckfaktoren einer Funktion h:*

K geht aus dem Graphen der Funktion h mit $h(x) = 1 - \frac{9}{x^2}$ hervor durch:

1. Streckung in -Richtung mit dem Faktor a
2. Streckung in x-Richtung mit dem Faktor $\frac{1}{b}$

$a \cdot h(b \cdot x) = a \cdot \left(1 - \frac{9}{b^2x^2}\right)$

$a \cdot \left(1 - \frac{9}{b^2x^2}\right) = 4 - \frac{4}{x^2}$

$a - \frac{9a}{b^2x^2} = 4 - \frac{4}{x^2}$

$a = 4$

$4 - \frac{9 \cdot 4}{b^2x^2} = 4 - \frac{4}{x^2}$

$b = 3$

$4 - \frac{9 \cdot 4}{3^2x^2} = 4 - \frac{4}{x^2}$

Der Streckfaktor in y-Richtung ist 4, der in -Richtung ist $\frac{1}{3}$.

Hinweis:

Beim Strecken in x-Richtung ist stets der Kehrbruch zu nehmen.