*Abitur-Musteraufgaben Wahlteil Analysis Satz 06*

## Aufgabe M06A1.1

Die Anzahl der Käufer einer neu eingeführen Smartphone-App soll modelliert werden. Dabei wird die momentane Änderungsrate beschrieben durch die Funktion

$$f(t) = 6000 \cdot t \cdot e^{-0,5t};\ \ t \geq 0$$

($t$ in Monaten nach Einführung, $f(t)$ in Käufer pro Monat).

a) Zunächst werden nur die ersten zwölf Monate nach der Einführung betrachtet. Geben Sie die maximale momentane Änderungsrate an.
Bestimmen Sie den Zeitraum, in dem die momentane Änderungsrate größer als $4000$ Käufer pro Monat ist.
Bestimmen Sie die Zeitpunkte, zu denen die momentane Änderungsrate am stärksten abnimmt bzw. zunimmt.

b) Zeigen Sie, dass für $t > 2$ die Funktion $f$ streng monoton fallend ist und nur positive Werte annimmt.
Interpretieren Sie dies in Bezug auf die Entwicklung der Käuferzahlen.

c) Zeigen Sie, dass $F(t) = -12000 \cdot (t + 2) \cdot e^{-0,5t}$ eine Stammfunktion von $f$ ist.
Ermitteln Sie die Gesamtanzahl der Käufer sechs Monate nach Einführung der App.
Bestimmen Sie den Zeitraum von zwei Monaten, in dem es $5000$ neue Käufer gibt.

d) Bei einer anderen neuen App erwartet man maximal $30\,000$ Käufer.
In einem Modell soll angenommen werden, dass sich die Gesamtzahl der Käufer nach dem Gesetz des beschränkten Wachsatums entwickelt.
Sechs Monate nach Verkausbeginn gibt es bereits $20\,000$ Käufer.
Bestimmen Sie einen Funktionsterm, welcher die Gesamtzahl der Käufer in Abhängigkeit von der Zeit beschreibt.

## Aufgabe M06A1.2

Die Funktion $g$ ist gegeben durch $g(x) = x - \frac{1}{x^3};\ \ x \neq 0$.

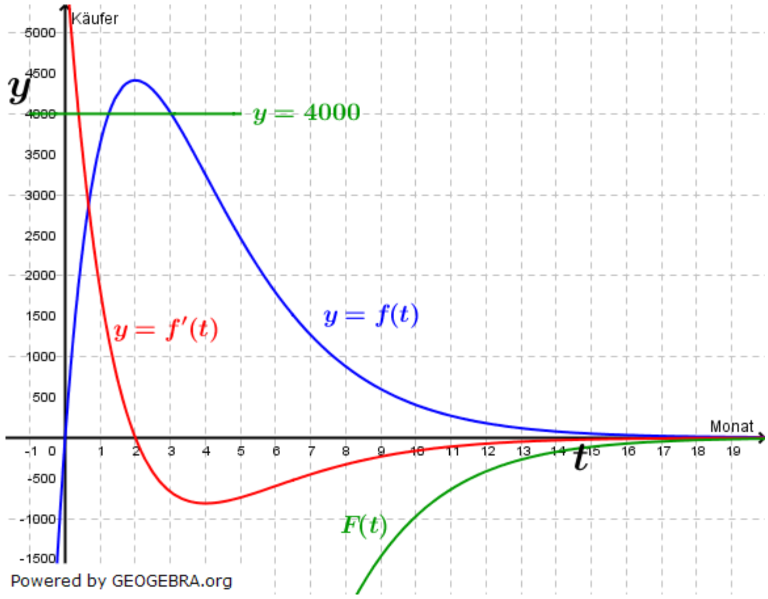
a) Die Tangente an den Graphen von $g$ im Punkt $B$ verläuft durch $P(0|-0,5)$.
Bestimmen Sie die Koordinaten von $B$.

b) Es gibt einen Punkt auf dem Graphen von $g$, der den kleinsten Abstand zur Geraden mit der Gleichung $y = 2x - 1$ besitzt.
Ermitteln Sie die $x$-Koordinate dieses Punktes.

# Lösung M06A1.1

## Lösungslogik

*Situationsgrafik:*




a) *Maximale momentane Änderungsrate:*
Bestimmung des Hochpunktes von $f(t)$ über $f'(t) = 0$ mit dem WTR.

*Zeitraum Änderungsrate größer* $4000$*:*
Schnittpunkte des Graphen von $f(t)$ mit der Parallelen zur $x$-Achse mit $y = 4000$; Bestimmung mittels GTR ergibt zwei Werte $t_{von}$ und $t_{bis}$.

*Zeitpunkte der größten Zu- bzw. Abnahme der momentanen Änderungsrate.*
Diese Zeitpunkte sind die Stellen der Wendestellen von $f(t)$. Wendestellen der Stammfunktion führen zu Extremstellen der Ableitung. Bestimmung des Maximums und Minimums von $f'(t)$ mit dem GTR. Für das Maximum ergibt sich keine Wendestelle, sondern ein Randmaximum für $t = 0$.

b) Der Graph der Funktion hat ein Maximum bei $t = 2$, siehe Aufgabenteil a). Diese Stelle ist ein globales Maximum. Wegen $t > 2$ (Aufgabenstellung) und $e^{-0,5t}$ stets größer Null (Exponentialfunktion), kann $f(t)$ keine negativen Werte annehmen.

c) *Nachweis einer Stammfunktion:*
Ist $F$ eine Stammfunktion von $f$, so muss gelten $F'(t) = f(t)$.
*Gesamtanzahl der Käufer nach sechs Monaten:*
Dies ist der Inhalt der Fläche unter dem Graphen von $f(t)$ im Intervall von $0$ bis $6$. Bestimmung über die gegebenen Stammfunktion.

*Zeitraum von zwei Monaten mit $5000$ neuen Käufern:*
Das Integral über $f(t)$ im Intervall $z$ bis $z+2$ wird mit der Kostanten $y=5000$ geschnitten. Der $x$-Wert des Schnittpunktes entspricht dem Startmonat des gesuchten Intervalls. Bestimmung mit dem GTR.

d) Funktionsgleichung des beschränkten Wachstums mit $g(t)=S-a\cdot e^{-bt}$. Wir ermitteln die einzelnen Werte von $S$ und $a$ aus dem Aufgabentext, machen eine Punktprobe mit $g(6)=20000$ zur Ermittlung von $b$.

Klausuraufschrieb

a) *Maximale momentane Änderungsrate:*

$f'(t)=6000\cdot(e^{-0,5t}-0,5t\cdot e^{-0,5t})=6000\cdot e^{-0,5t}(1-0,5t)$

$f'(t)=0$

$6000\cdot e^{-0,5t}(1-0,5t) \quad | \quad$ Satz vom Nullprodukt

$1-0,5t=0 \;\;=>\;\; t=2$

$f(2)=6000\cdot 2\cdot e^{-0,5\cdot 2}=12000\cdot e^{-1}\approx 4414,5533$

*Die maximale Änderungsrate betrug etwa $4414$ Käufer/Monat im zweiten Monat nach Einführung.*

*Zeitraum Änderungsrate größer $4000$:*

$f(t)\cap 4000$

$6000\cdot t\cdot e^{-0,5t}=4000$

$6000\cdot t\cdot e^{-0,5t}-4000=0 \quad | \quad :4000$

$1,5te^{-0,5t}-1=0$

$t_1\overset{\text{WTR}}{\approx}1,25;\;\; t_2\overset{\text{WTR}}{\approx}3,02$

Zwischen etwa $1\frac{1}{4}$ *und $3$ Monaten nach Einführung ist die momentane Änderungsrate größer als 4000 Käufer/Monat.*

*Stärkste Zu- bzw. Abnahme der momentanen Änderungsrate:*

$f'(t)=6000\cdot e^{-0,5t}(1-0,5t)$

$f''(t)=6000\cdot(-0,5\cdot e^{-0,5t}(1-0,5t)+e^{-0,5t}\cdot(-0,5))$

$\quad\quad =6000\cdot(-e^{-0,5t}+0,25te^{-0,5t})$

$\quad\quad =6000\cdot e^{-0,5t}(0,25t-1)$

$f''(t)=0$

$6000\cdot e^{-0,5t}(0,25t-1) \quad | \quad$ Satz vom Nullprodukt

$0,25t-1=0 \;\;=>\;\; t=4$

$f'(4)\overset{\text{WTR}}{\approx}-812$

An der Stelle $t=4$ liegt ein Wendepunkt mit negativer Steigung vor. Ein Wendepunkt mit positiver Steigung ist nicht existent.

Zunahme:

$f$ hat keinen Wendepunkt mit positiver Steigung, somit Randmaximum:

$f'(t)_{max}\overset{\text{WTR}}{\approx}6000$ für $t=0$

Abnahme:

$f'(t)_{min}\overset{\text{WTR}}{\approx}-812$ für $t=4$

b) *Streng monoton fallend für $t > 2$:*
Maximale Änderungsrate bei $t = 2$ (siehe Aufgabenteil a), keine weiteren Extremstellen vorhanden.
Wegen Aufgabenstellung $t \geq 0$ und $e^{-0,5t}$ stets größer Null, nimmt $f(t)$ keine negativen Werte an.
Interpretation:
Da die Änderungsrate streng monoton fallend ist und langfristig gesehen gegen Null läuft, werden die Käuferzahlen/Monat immer weniger, sodass die Gesamtanzahl der App-Anwender auf einen festen Wert zuläuft (Beschränktes Wachstum).

c) *Nachweis einer Stammfunktion:*
$F'(t) = -12000 \cdot (e^{-0,5t} - 0,5(t+2) \cdot e^{-0,5t})$
| Über Produktregel
$F'(t) = -12000 \cdot e^{-0,5t}(1 - 0,5(t+2))$
$= -12000 \cdot e^{-0,5t}(1 - 0,5t - 1) = 6000 \cdot t \cdot e^{-0,5t} = f(t)$
*Gesamtzahl der Käufer nach sechs Monaten:*
$n_6 = \int_0^6 f(t)\,dt = [F(t)]_0^6 = F(6) - F(0) = -4779,6 - (-24000) = 19220,4$
*Die Gesamtzahl der Käufer sechs Monate nach Produkteinführung beträgt etwa* $19.220$ *Anwender*.

*Zeitraum von zwei Monaten, in dem es* $5000$ *neue Käufer gibt:*
$\int_z^{z+2} f(t)\,dt = [F(t)\}_z^{z+2} = F[z+2] - F[z] = 5000$
$-12000 \cdot (z+2+2) \cdot e^{-0,5(z+2)} + 12000 \cdot (z+2) \cdot e^{-0,5Z} = 5000$
$-12000 \cdot e^{-0,5z-1}(z+4) + 12000 \cdot e^{-0,5z} \cdot (z+2) = 5000$
$12000 \cdot e^{-0,5z} \cdot (z+2) - 12000 \cdot e^{-1} \cdot e^{-0,5z}(z+4) = 5000$
$12000 \cdot e^{-0,5z} \cdot \left(z + 2 - \frac{z+4}{e}\right) = 5000$
$12000 \cdot e^{-0,5z} \cdot \left(z + 2 - \frac{z+4}{e}\right) - 5000 = 0$
$z \overset{\text{WTR}}{\approx} 3,975$
*Im Zeitraum von vier bis sechs Monaten nach Einführung gibt es etwa* $5000$ *neue Käufer.*

d) *Funktionsterm beschränkten Wachstums für andere App:*
$g(t) = S - a \cdot e^{-bt}$
$S = 30000$ (Aufgabenstellung)
$a = 30000$, da Anfangsbestand gleich Null.
$g(t) = 30000 - 30000 \cdot e^{-bt}$
$g(6) = 20000$
$20000 = 30000(1 - e^{-6b})$
$\frac{2}{3} = 1 - e^{-6b}$
$\frac{1}{3} = e^{-6b}$ | $ln$
$-6b = ln\left(\frac{1}{3}\right)$ | $:-6$
$b = -\frac{1}{6} ln\left(\frac{1}{3}\right) \overset{\text{WTR}}{\approx} 0,1831$
*Der Funktionsterm lautet* $g(t) = 30000 - 30000 \cdot e^{-1831t}$

# Lösung M06A1.2

## Lösungslogik

a) *Tangente an den Graphen von $g$ durch $B$, Koordinaten von $B$:*
Aufstellung der Tangentengleichung über die Punktsteigungsformel und danach Punktprobe mit $P(0|-0{,}5)$ zur Ermittlung der Koordinaten des Berührpunktes $B$.

b) *Punkt kleinsten Abstands:*
Wenn von einem kleinsten Abstand die Rede ist, so heißt dies immer ein senkrechter Abstand. Somit liegt der gesuchte Punkt an den Stellen des Graphen von $g$ mit der Steigung $m = 2$. Da der Graph von $g$ zwei Stellen mit der Steigung $m = 2$ aufweist, müssen wir noch die Normalen durch die jeweiligen Punkte bilden und diese Normalen mit der Geraden $y = 2x - 1$ schneiden. Danach ist die Strecke zwischen jeweils dem Schnittpunkt der Normalen mit dem Graphen von $g$ UND der Geraden $y = 2x - 1$ zu bilden. Es ergibt sich dabei eine kleinere und eine größere Strecke, sodass aus dem Ergebnis abzulesen ist, welcher der beiden Punkte der Gesuchte ist.

## Klausuraufschrieb

a) *Tangente an den Graphen von $g$ durch $B$,*
*Koordinaten von $B$:*
$t(x) = g'(x_B) \cdot (x - x_B) + g(x_B)$
$g'(x) = 1 + \frac{3}{x^4}$
Punktprobe mit $P(0|-0{,}5)$
$-0{,}5 = g'(x_B) \cdot (-x_B) + f(x_B)$
$g'(x_B) \cdot (-x_B) + g(x_B) + 0{,}5 = 0$
$\left(1 + \frac{3}{x_B^4}\right) \cdot (-x_B) + x_B - \frac{1}{x_B^3} + 0{,}5 = 0$
$-x_B - \frac{3}{x_B^3} + x_B - \frac{1}{x_B^3} + 0{,}5 = 0$
$-\frac{4}{x_B^3} + 0{,}5 = 0$
$x_B^3 = 8$
$x_B = 2{,}0; \quad g(2) \overset{\text{WTR}}{\approx} 1{,}875$
$B(2|1{,}875)$

b) *Punkt kleinsten Abstands:*
Dies ist ein Punkt auf $g$ mit der Steigung $g'(x) = 2$.
$g'(x) \cap 2$:
$1 + \frac{3}{x^4} = 2$
$\frac{3}{x^4} = 1$
$x^4 = 3$
$x_1 \approx -1{,}316; \quad x_2 \approx 1{,}316$
$g(x_1) = -0{,}877 \quad g(x_2) = 0{,}877$
Normalen zu $y = 2x - 1$ durch $P_1(-1{,}316|-0{,}877)$ bzw. $P_2(1{,}316|0{,}877)$
$n_1(x) = -\frac{1}{2} \cdot (x + 1{,}316) - 0{,}877 = -\frac{1}{2}x - 1{,}535$
$n_2(x) = -\frac{1}{2} \cdot (x - 1{,}316) + 0{,}877 = -\frac{1}{2}x + 1{,}535$

$n_1(x) \cap 2x - 1$
$-\frac{1}{2}x - 1{,}535 = 2x - 1$
$2{,}5x = -0{,}535$
$x_0 = -0{,}214; \quad y_0 = -1{,}428 \Longrightarrow \quad P_2(-0{,}214| -1{,}428)$
$n_2(x) \cap 2x - 1$
$-\frac{1}{2}x + 1{,}535 = 2x - 1$
$2{,}5x = 2{,}535$
$x_0 = 1{,}014; \quad y_0 = 1{,}028 \Longrightarrow \quad P_4(1{,}014|1{,}028)$
$P_1P_2 = \sqrt{(-0{,}214 - (-1{,}316))^2 + (-1{,}428 - (-0{,}877))^2}$
$\overset{\text{WTR}}{\approx} \quad = 1{,}23$
$P_3P_4 = \sqrt{(1{,}014 - 1{,}316)^2 + (1{,}028 - 0{,}877)^2}$
$\overset{\text{WTR}}{\approx} \quad = 0{,}3341$
Somit ist die Strecke $P_3P_4$ kürzer als die Strecke $P_1P_2$.
*Der gesuchte Punkt auf $g$ mit dem kleinsten Abstand zu $y = 2x - 1$ ist $P_3(1{,}316|0{,}877)$.*