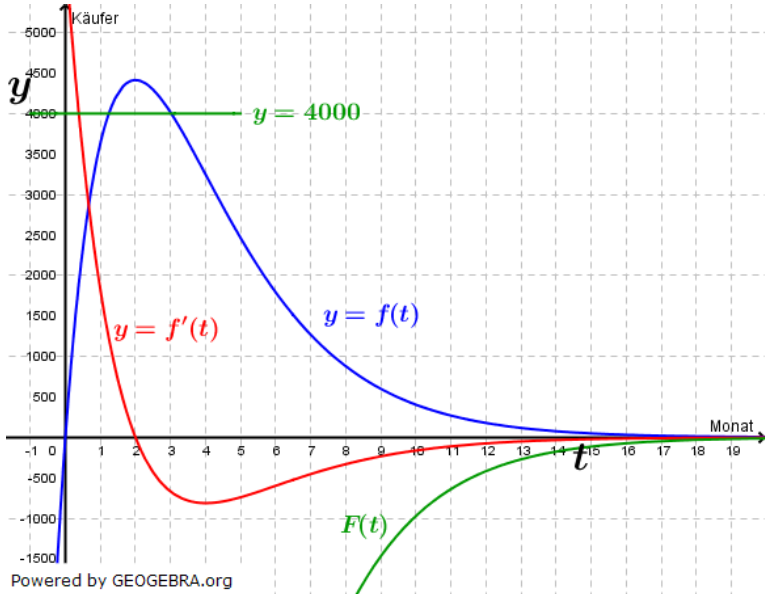
Lösung M06A1.1

Lösungslogik

Situationsgrafik:



a) *Maximale momentane Änderungsrate:*
Bestimmung des Hochpunktes von $f(t)$ über $f'(t) = 0$ mit dem WTR.

Zeitraum Änderungsrate größer 4000*:*
Schnittpunkte des Graphen von $f(t)$ mit der Parallelen zur x-Achse mit $y = 4000$; Bestimmung mittels GTR ergibt zwei Werte t_{von} und t_{bis}.

Zeitpunkte der größten Zu- bzw. Abnahme der momentanen Änderungsrate.
Diese Zeitpunkte sind die Stellen der Wendestellen von $f(t)$. Wendestellen der Stammfunktion führen zu Extremstellen der Ableitung. Bestimmung des Maximums und Minimums von $f'(t)$ mit dem GTR. Für das Maximum ergibt sich keine Wendestelle, sondern ein Randmaximum für $t = 0$.

b) Der Graph der Funktion hat ein Maximum bei $t = 2$, siehe Aufgabenteil a). Diese Stelle ist ein globales Maximum. Wegen $t > 2$ (Aufgabenstellung) und $e^{-0{,}5t}$ stets größer Null (Exponentialfunktion), kann $f(t)$ keine negativen Werte annehmen.

c) *Nachweis einer Stammfunktion:*
Ist F eine Stammfunktion von f, so muss gelten $F'(t) = f(t)$.
Gesamtanzahl der Käufer nach sechs Monaten:
Dies ist der Inhalt der Fläche unter dem Graphen von $f(t)$ im Intervall von 0 bis 6. Bestimmung über die gegebenen Stammfunktion.

Zeitraum von zwei Monaten mit 5000 *neuen Käufern:*
Das Integral über $f(t)$ im Intervall z bis $z+2$ wird mit der Kostanten $y=5000$ geschnitten. Der x-Wert des Schnittpunktes entspricht dem Startmonat des gesuchten Intervalls. Bestimmung mit dem GTR.

d) Funktionsgleichung des beschränkten Wachstums mit $g(t)=S-a\cdot e^{-bt}$. Wir ermitteln die einzelnen Werte von S und a aus dem Aufgabentext, machen eine Punktprobe mit $g(6)=20000$ zur Ermittlung von b.

Klausuraufschrieb

a) *Maximale momentane Änderungsrate:*

$f'(t)=6000\cdot(e^{-0{,}5t}-0{,}5t\cdot e^{-0{,}5t})=6000\cdot e^{-0{,}5t}(1-0{,}5t)$

$f'(t)=0$

$6000\cdot e^{-0{,}5t}(1-0{,}5t)$ | Satz vom Nullprodukt

$1-0{,}5t=0 \;\;=>\;\; t=2$

$f(2)=6000\cdot 2\cdot e^{-0{,}5\cdot 2}=12000\cdot e^{-1}\approx 4414{,}5533$

Die maximale Änderungsrate betrug etwa 4414 *Käufer/Monat im zweiten Monat nach Einführung.*

Zeitraum Änderungsrate größer 4000*:*

$f(t)\cap 4000$

$6000\cdot t\cdot e^{-0{,}5t}=4000$

$6000\cdot t\cdot e^{-0{,}5t}-4000=0$ | $:4000$

$1{,}5te^{-0{,}5t}-1=0$

$t_1\overset{\text{WTR}}{\approx}1{,}25;\;\; t_2\overset{\text{WTR}}{\approx}3{,}02$

Zwischen etwa $1\frac{1}{4}$ *und* 3 *Monaten nach Einführung ist die momentane Änderungsrate größer als 4000 Käufer/Monat.*

Stärkste Zu- bzw. Abnahme der momentanen Änderungsrate:

$f'(t)=6000\cdot e^{-0{,}5t}(1-0{,}5t)$

$f''(t)=6000\cdot(-0{,}5\cdot e^{-0{,}5t}(1-0{,}5t)+e^{-0{,}5t}\cdot(-0{,}5))$

$\quad\;\;=6000\cdot(-e^{-0{,}5t}+0{,}25te^{-0{,}5t})$

$\quad\;\;=6000\cdot e^{-0{,}5t}(0{,}25t-1)$

$f''(t)=0$

$6000\cdot e^{-0{,}5t}(0{,}25t-1)$ | Satz vom Nullprodukt

$0{,}25t-1=0 \;\;=>\;\; t=4$

$f'(4)\overset{\text{WTR}}{\approx}-812$

An der Stelle $t=4$ liegt ein Wendepunkt mit negativer Steigung vor. Ein Wendepunkt mit positiver Steigung ist nicht existent.

Zunahme:

f hat keinen Wendepunkt mit positiver Steigung, somit Randmaximum:

$f'(t)_{max}\overset{\text{WTR}}{\approx}6000$ für $t=0$

Abnahme:

$f'(t)_{min}\overset{\text{WTR}}{\approx}-812$ für $t=4$

Abitur-Musteraufgaben Wahlteil Analysis Satz 06

b) *Streng monoton fallend für $t > 2$:*
Maximale Änderungsrate bei $t = 2$ (siehe Aufgabenteil a), keine weiteren Extremstellen vorhanden.
Wegen Aufgabenstellung $t \geq 0$ und $e^{-0,5t}$ stets größer Null, nimmt $f(t)$ keine negativen Werte an.
Interpretation:
Da die Änderungsrate streng monoton fallend ist und langfristig gesehen gegen Null läuft, werden die Käuferzahlen/Monat immer weniger, sodass die Gesamtanzahl der App-Anwender auf einen festen Wert zuläuft (Beschränktes Wachstum).

c) *Nachweis einer Stammfunktion:*
$F'(t) = -12000 \cdot (e^{-0,5t} - 0,5(t+2) \cdot e^{-0,5t})$
| Über Produktregel
$F'(t) = -12000 \cdot e^{-0,5t}(1 - 0,5(t+2))$
$= -12000 \cdot e^{-0,5t}(1 - 0,5t - 1) = 6000 \cdot t \cdot e^{-0,5t} = f(t)$
Gesamtzahl der Käufer nach sechs Monaten:
$n_6 = \int_0^6 f(t)\,dt = [F(t)]_0^6 = F(6) - F(0) = -4779,6 - (-24000) = 19220,4$
Die Gesamtzahl der Käufer sechs Monate nach Produkteinführung beträgt etwa 19.220 *Anwender*.

Zeitraum von zwei Monaten, in dem es 5000 *neue Käufer gibt:*
$\int_z^{z+2} f(t)\,dt = [F(t)\}_z^{z+2} = F[z+2] - F[z] = 5000$
$-12000 \cdot (z+2+2) \cdot e^{-0,5(z+2)} + 12000 \cdot (z+2) \cdot e^{-0,5Z} = 5000$
$-12000 \cdot e^{-0,5z-1}(z+4) + 12000 \cdot e^{-0,5z} \cdot (z+2) = 5000$
$12000 \cdot e^{-0,5z} \cdot (z+2) - 12000 \cdot e^{-1} \cdot e^{-0,5z}(z+4) = 5000$
$12000 \cdot e^{-0,5z} \cdot \left(z + 2 - \frac{z+4}{e}\right) = 5000$
$12000 \cdot e^{-0,5z} \cdot \left(z + 2 - \frac{z+4}{e}\right) - 5000 = 0$
$z \overset{\text{WTR}}{\approx} 3,975$
Im Zeitraum von vier bis sechs Monaten nach Einführung gibt es etwa 5000 *neue Käufer.*

d) *Funktionsterm beschränkten Wachstums für andere App:*
$g(t) = S - a \cdot e^{-bt}$
$S = 30000$ (Aufgabenstellung)
$a = 30000$, da Anfangsbestand gleich Null.
$g(t) = 30000 - 30000 \cdot e^{-bt}$
$g(6) = 20000$
$20000 = 30000\left(1 - e^{-6b}\right)$
$\frac{2}{3} = 1 - e^{-6b}$
$\frac{1}{3} = e^{-6b}$ | ln
$-6b = ln\left(\frac{1}{3}\right)$ | $:-6$
$b = -\frac{1}{6} ln\left(\frac{1}{3}\right) \overset{\text{WTR}}{\approx} 0,1831$
Der Funktionsterm lautet $g(t) = 30000 - 30000 \cdot e^{-1831t}$

Lösung M06A1.2

Lösungslogik

a) *Tangente an den Graphen von g durch B, Koordinaten von B:*
Aufstellung der Tangentengleichung über die Punktsteigungsformel und danach Punktprobe mit $P(0|-0{,}5)$ zur Ermittlung der Koordinaten des Berührpunktes B.

b) *Punkt kleinsten Abstands:*
Wenn von einem kleinsten Abstand die Rede ist, so heißt dies immer ein senkrechter Abstand. Somit liegt der gesuchte Punkt an den Stellen des Graphen von g mit der Steigung $m = 2$. Da der Graph von g zwei Stellen mit der Steigung $m = 2$ aufweist, müssen wir noch die Normalen durch die jeweiligen Punkte bilden und diese Normalen mit der Geraden $y = 2x - 1$ schneiden. Danach ist die Strecke zwischen jeweils dem Schnittpunkt der Normalen mit dem Graphen von g UND der Geraden $y = 2x - 1$ zu bilden. Es ergibt sich dabei eine kleinere und eine größere Strecke, sodass aus dem Ergebnis abzulesen ist, welcher der beiden Punkte der Gesuchte ist.

Klausuraufschrieb

a) *Tangente an den Graphen von g durch B,*
Koordinaten von B:
$t(x) = g'(x_B) \cdot (x - x_B) + g(x_B)$
$g'(x) = 1 + \frac{3}{x^4}$
Punktprobe mit $P(0|-0{,}5)$
$-0{,}5 = g'(x_B) \cdot (-x_B) + f(x_B)$
$g'(x_B) \cdot (-x_B) + g(x_B) + 0{,}5 = 0$
$\left(1 + \frac{3}{x_B^4}\right) \cdot (-x_B) + x_B - \frac{1}{x_B^3} + 0{,}5 = 0$
$-x_B - \frac{3}{x_B^3} + x_B - \frac{1}{x_B^3} + 0{,}5 = 0$
$-\frac{4}{x_B^3} + 0{,}5 = 0$
$x_B^3 = 8$
$x_B = 2{,}0; \quad g(2) \overset{\text{WTR}}{\approx} 1{,}875$
$B(2|1{,}875)$

b) *Punkt kleinsten Abstands:*
Dies ist ein Punkt auf g mit der Steigung $g'(x) = 2$.
$g'(x) \cap 2$:
$1 + \frac{3}{x^4} = 2$
$\frac{3}{x^4} = 1$
$x^4 = 3$
$x_1 \approx -1{,}316; \quad x_2 \approx 1{,}316$
$g(x_1) = -0{,}877 \quad g(x_2) = 0{,}877$
Normalen zu $y = 2x - 1$ durch $P_1(-1{,}316|-0{,}877)$ bzw. $P_2(1{,}316|0{,}877)$
$n_1(x) = -\frac{1}{2} \cdot (x + 1{,}316) - 0{,}877 = -\frac{1}{2}x - 1{,}535$
$n_2(x) = -\frac{1}{2} \cdot (x - 1{,}316) + 0{,}877 = -\frac{1}{2}x + 1{,}535$

$n_1(x) \cap 2x-1$
$-\frac{1}{2}x - 1{,}535 = 2x - 1$
$2{,}5x = -0{,}535$
$x_0 = -0{,}214; \quad y_0 = -1{,}428 \Longrightarrow \quad P_2(-0{,}214|-1{,}428)$
$n_2(x) \cap 2x-1$
$-\frac{1}{2}x + 1{,}535 = 2x - 1$
$2{,}5x = 2{,}535$
$x_0 = 1{,}014; \quad y_0 = 1{,}028 \Longrightarrow \quad P_4(1{,}014|1{,}028)$
$P_1P_2 = \sqrt{(-0{,}214-(-1{,}316))^2 + (-1{,}428-(-0{,}877))^2}$
$\overset{\text{WTR}}{\approx} \quad = 1{,}23$
$P_3P_4 = \sqrt{(1{,}014-1{,}316)^2 + (1{,}028-0{,}877)^2}$
$\overset{\text{WTR}}{\approx} \quad = 0{,}3341$
Somit ist die Strecke P_3P_4 kürzer als die Strecke P_1P_2.
Der gesuchte Punkt auf g mit dem kleinsten Abstand zu $y = 2x-1$ ist $P_3(1{,}316|0{,}877)$.