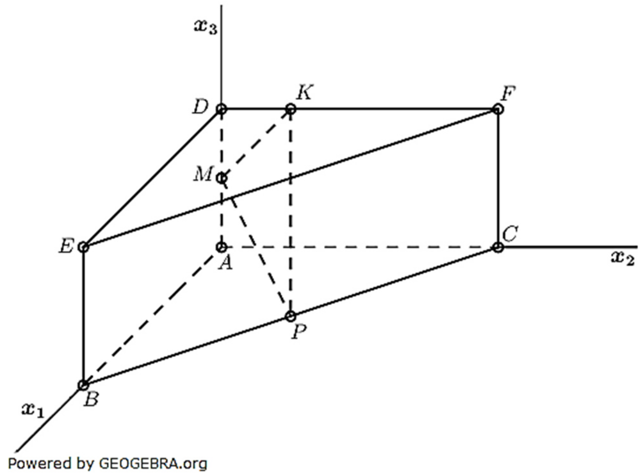
Abitur-Musteraufgaben Wahlteil Analytische Geometrie Satz 05

Aufgabe M05B1

Die Abbildung zeigt ein gerades Prisma $ABCDEF$ mit $A(0|0|0)$, $B(8|0|0)$, $C(0|8|0)$ und $D(0|0|4)$.



a) Bestimmen Sie den Abstand der Eckpunkte B und F.

b) Die Punkte M und P sind die Mittelpunkte der Kanten $\overline{AD}$ bzw. $\overline{BC}$.
Der Punkt $K(0|k_2|4)$ liegt auf der Kante $\overline{DF}$. Bestimmen Sie k_2 so, dass das Dreieck KMP in M rechtwinklig ist.

Gegeben ist die Ebene $E\colon\ 3x_2 + 4x_3 = 5$.

c) Beschreiben Sie die besondere Lage von E im Koordinatensystem.

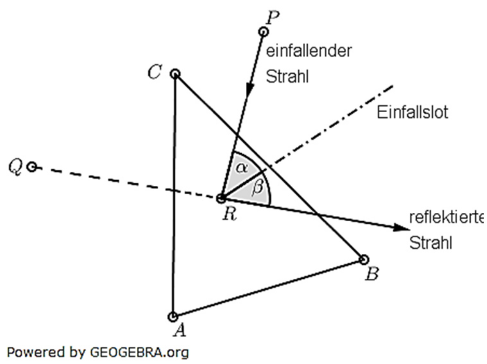
d) Untersuchen Sie rechnerisch, ob die Kugel mit Mittelpunkt $Z(1|6|3)$ und Radius $r = 7$ die Ebene E schneidet.

e) In einem kartesischen Koordinatensystem legen die Punkte $A(4|0|0)$, $B(0|4|0)$ und $C(0|0|4)$ das Dreieck ABC fest, welches in der Ebene $E\colon\ x_1 + x_2 + x_3 = 4$ liegt.
Bestimmen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks ABC.

Das Dreieck ABC stellt modellhaft einen Spiegel dar. Der Punkt $P(2|2|3)$ gibt im Modell die Position einer Lichtquelle an, von der ein Lichtstrahl ausgeht. Die Richtung dieses Lichtstrahls wird im Modell durch den Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ beschrieben.

f) Geben Sie eine Gleichung der Geraden g an, entlang derer der Lichtstrahl im Modell verläuft. Bestimmen Sie die Koordinaten des Punkts R, in dem g die Ebene E schneidet, und begründen Sie, dass der Lichtstrahl auf dem dreieckigen Spiegel auftrifft.

Der einfallende Lichtstrahl wird in demjenigen Punkt des Spiegels reflektiert, der im Modell durch den Punkt R dargestellt wird. Der reflektierte Lichtstrahl geht für einen Beobachter scheinbar von einer Lichtquelle aus, deren Position im Modell durch den Punkt $Q(0|0|1)$ beschrieben wird (vgl. Abbildung).



Abitur-Musteraufgaben Wahlteil Analytische Geometrie Satz 05

g) Zeigen Sie, dass die Punkte P und Q bezüglich der Ebene E symmetrisch sind.

h) Das Lot zur Ebene E im Punkt R wird als Einfallslot bezeichnet.
Die beiden Geraden, entlang derer der einfallende und der reflektierte Lichtstrahl im Modell verlaufen, liegen in einer Ebene F.
Ermitteln Sie eine Gleichung von F in Normalenform.
Weisen Sie nach, dass das Einfallslot ebenfalls in der Ebene F liegt.

i) Zeigen Sie, dass die Größe des Winkels β zwischen reflektiertem Lichtstrahl und Einfallslot mit der Größe des Winkels α zwischen einfallendem Lichtstrahl und Einfallslot übereinstimmt.

Abitur-Musteraufgaben Wahlteil Analytische Geometrie Satz 05

Lösung M05B1

a) *Abstand der Eckpunkte B und F:*

$$d(B;F) = \left|\overrightarrow{BF}\right| = \left|\begin{pmatrix} 0-8 \\ 8-0 \\ 4-0 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{64+64+16} = 12$$

b) *Bestimmung von k_2:*

Wegen Rechtwinkligkeit bei M muss gelten:

$\overrightarrow{MP} \circ \overrightarrow{MK} = 0$

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2} \cdot \left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD}\right) = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 0+0 \\ 0+0 \\ 0+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{OP} = \frac{1}{2} \cdot \left(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right) = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 8+0 \\ 0+8 \\ 0+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} 4-0 \\ 4-0 \\ 0-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{MK} = \overrightarrow{OK} - \overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} 0-0 \\ k_2-0 \\ 4-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ k_2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$\overrightarrow{MP} \circ \overrightarrow{MK} = 0$

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ k_2 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$$

Für $k_2 = 1$ ist das das KMP in M rechtwinklig.

c) *Besondere Lage von E:*

In der Koordinatengleichung von E fehlt die x_1-Koordinate; E liegt somit parallel zur x_1-Achse.

d) *Abstand einer Kugel:*

Ist der Abstand des Mittelpunktes Z zur Ebene E kleiner als 7, so schneidet die Kugel die Ebene. Abstand des Punktes zur Ebene über die HNF.

$E\colon\ \frac{|3x_2+4x_3-5|}{\sqrt{9+16}} = \frac{|3x_2+4x_3-5|}{5} = 0$

$d(Z;E) = \frac{|3\cdot 6+4\cdot 3-5|}{5} = \frac{|25|}{5} = 5$

Wegen $d(Z;E) < 7$ schneidet die Kugel die Ebene.

e) *Flächeninhalt des Dreiecks ABC:*

Das Dreieck ist gleichseitig. Die Fläche eine gleichseitigen Dreiecks ist $A = \frac{a^2}{4} \cdot \sqrt{3}$ (siehe Merkhilfe). Die Grundkante ist gemäß Satz des Pythagoras

$a = \sqrt{4^2 + 4^2} = \sqrt{32}$.

$A_{ABC} = \frac{\sqrt{32}^2}{4} \cdot \sqrt{3} = 8\sqrt{3}$

Der Flächeninhalt des Dreiecks ABC beträgt $8\sqrt{3}\ FE$.

f) *Gleichung der Geraden :*

$$g\colon\ \vec{x} = \overrightarrow{OP} + t \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Abitur-Musteraufgaben Wahlteil Analytische Geometrie Satz 05

Koordinaten von R:

$g \cap E$:

$x_1 = 2 + t; \quad x_2 = 2 + t; \quad x_3 = 3 + 4t$

$x_1 + x_2 + x_3 = 4$

$2 + t + 2 + t + 3 + 4t = 4$

$7 + 6t = 4$

$6t = -3 \;\;=>\;\; t = -\frac{1}{2}$

$$\overrightarrow{OR} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

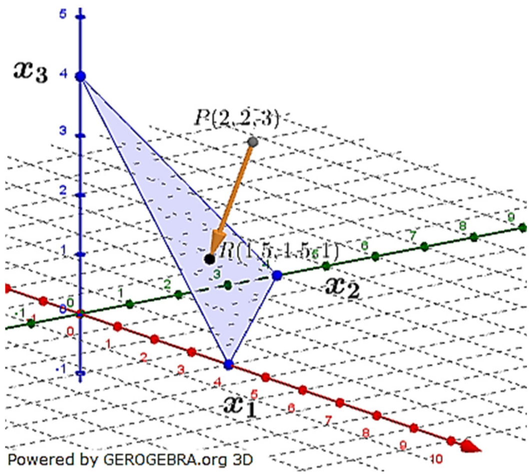
Der Punkt hat die Koordinaten $R\left(\frac{3}{2}\middle|\frac{3}{2}\middle|1\right)$.

Begründung, Lichtstrahl trifft dreieckigen Spiegel:

Die Koordinaten der Eckpunkte des Dreiecks ABC sind alle positiv.
Die Koordinaten des Durchstoßpunktes sind ebenfalls alle positiv und es gilt:

$$d_1 < a_1 \wedge d_2 < b_2 \wedge d_3 < c_3.$$

Somit trifft der Lichtstrahl den Spiegel.



g) *P und Q sind symmetrisch zu E:*

Sind P und Q symmetrisch zu E, so muss der Mittelpunkt M der Strecke $\overline{PQ}$ in E liegen.

$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2} \cdot \left(\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}\right)$

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2} \cdot \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Punktprobe ob $M \in E$

$1 + 1 + 2 \stackrel{?}{=} 4$

$4 = 4$

Wegen $M \in E$ sind P und Q symmetrisch zu E.

h) *Normalenform einer Ebene F:*

Die Ebene F wird festgelegt durch die Punkte P, Q und R.

$$k \cdot \overrightarrow{n_F} = \overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} = \begin{pmatrix} -1{,}5 \\ -1{,}5 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -0{,}5 \\ -0{,}5 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} => \overrightarrow{n_F} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$F\!: \;\left(\vec{x} - \overrightarrow{OP}\right) \circ \overrightarrow{n_F} = 0$

$$F\!: \;\left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right) \circ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

Einfallslot in Ebene F:

Steht der Richtungsvektor der Geraden g des Einfallslots senkrecht auf dem Normalenvektor der Ebene F, so verläuft g in F da $R \in g \;\wedge\; R \in F$. Dabei ist der Richtungsvektor von g gleich dem Normalenvektor von E.

$$\overrightarrow{n_E} \circ \overrightarrow{n_F} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 - 1 = 0$$

$\overrightarrow{n_E} \perp \overrightarrow{n_F}$

Wegen $\overrightarrow{n_E} \perp \overrightarrow{n_F} \;\wedge\; R \in g \;\wedge\; R \in F$ verläuft das Einfallslot in F.

Abitur-Musteraufgaben Wahlteil Analytische Geometrie Satz 05

i) *Größe der Winkel α und β:*

$$cos(\alpha) = \frac{|\overrightarrow{PR} \circ \overrightarrow{n_E}|}{|\overrightarrow{PR}| \cdot |\overrightarrow{n_E}|} = \frac{\left|\begin{pmatrix}-0,5\\-0,5\\-2\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix}-0,5\\-0,5\\-2\end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right|} = \frac{|-0,5-0,5-2|}{\sqrt{0,25+0,25+4} \cdot \sqrt{3}} = \frac{3}{\sqrt{13,5}}$$

$$\alpha = arccos\left(\frac{3}{\sqrt{13,5}}\right) \approx 35,26\,°$$

$$cos(\beta) = \frac{|\overrightarrow{QR} \circ \overrightarrow{n_E}|}{|\overrightarrow{QR}| \cdot |\overrightarrow{n_E}|} = \frac{\left|\begin{pmatrix}1,5\\1,5\\0\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix}1,5\\1,5\\0\end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right|} = \frac{|1,5+1,5|}{\sqrt{2,25+2,25} \cdot \sqrt{3}} = \frac{3}{\sqrt{13,5}}$$

$$\beta = arccos\left(\frac{3}{\sqrt{13,5}}\right) \approx 35,26\,°$$