Abitur-Musteraufgaben Wahlteil Analytische Geometrie Satz 05

Lösung M05B1

a) *Abstand der Eckpunkte B und F:*

$$d(B;F) = \left|\overrightarrow{BF}\right| = \left|\begin{pmatrix} 0-8 \\ 8-0 \\ 4-0 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{64+64+16} = 12$$

b) *Bestimmung von k_2:*
Wegen Rechtwinkligkeit bei M muss gelten:
$\overrightarrow{MP} \circ \overrightarrow{MK} = 0$

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2} \cdot \left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD}\right) = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 0+0 \\ 0+0 \\ 0+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{OP} = \frac{1}{2} \cdot \left(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right) = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 8+0 \\ 0+8 \\ 0+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} 4-0 \\ 4-0 \\ 0-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{MK} = \overrightarrow{OK} - \overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} 0-0 \\ k_2-0 \\ 4-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ k_2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$\overrightarrow{MP} \circ \overrightarrow{MK} = 0$

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ k_2 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$$

Für $k_2 = 1$ ist das das KMP in M rechtwinklig.

c) *Besondere Lage von E:*
In der Koordinatengleichung von E fehlt die x_1-Koordinate; E liegt somit parallel zur x_1-Achse.

d) *Abstand einer Kugel:*
Ist der Abstand des Mittelpunktes Z zur Ebene E kleiner als 7, so schneidet die Kugel die Ebene. Abstand des Punktes zur Ebene über die HNF.

E: $\frac{|3x_2+4x_3-5|}{\sqrt{9+16}} = \frac{|3x_2+4x_3-5|}{5} = 0$

$d(Z;E) = \frac{|3\cdot 6+4\cdot 3-5|}{5} = \frac{|25|}{5} = 5$

Wegen $d(Z;E) < 7$ schneidet die Kugel die Ebene.

e) *Flächeninhalt des Dreiecks ABC:*
Das Dreieck ist gleichseitig. Die Fläche eine gleichseitigen Dreiecks ist $A = \frac{a^2}{4} \cdot \sqrt{3}$ (siehe Merkhilfe). Die Grundkante ist gemäß Satz des Pythagoras
$a = \sqrt{4^2+4^2} = \sqrt{32}$.

$A_{ABC} = \frac{\sqrt{32}^2}{4} \cdot \sqrt{3} = 8\sqrt{3}$

Der Flächeninhalt des Dreiecks ABC beträgt $8\sqrt{3}\ FE$.

f) *Gleichung der Geraden :*

$$g\colon\ \vec{x} = \overrightarrow{OP} + t \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Abitur-Musteraufgaben Wahlteil Analytische Geometrie Satz 05

Koordinaten von R:

$g \cap E$:

$x_1 = 2 + t; \quad x_2 = 2 + t; \quad x_3 = 3 + 4t$

$x_1 + x_2 + x_3 = 4$

$2 + t + 2 + t + 3 + 4t = 4$

$7 + 6t = 4$

$6t = -3 \;=>\; t = -\frac{1}{2}$

$$\overrightarrow{OR} = \begin{pmatrix}2\\2\\3\end{pmatrix} - \frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{3}{2}\\\frac{3}{2}\\1\end{pmatrix}$$

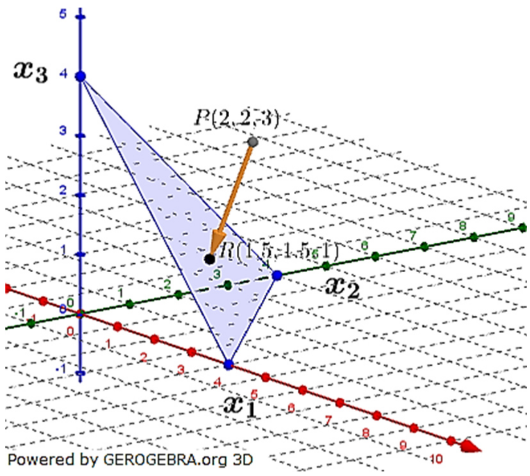
Der Punkt hat die Koordinaten $R\left(\frac{3}{2}\middle|\frac{3}{2}\middle|1\right)$.

Begründung, Lichtstrahl trifft dreieckigen Spiegel:

Die Koordinaten der Eckpunkte des Dreiecks ABC sind alle positiv.
Die Koordinaten des Durchstoßpunktes sind ebenfalls alle positiv und es gilt:

$$d_1 < a_1 \wedge d_2 < b_2 \wedge d_3 < c_3.$$

Somit trifft der Lichtstrahl den Spiegel.



g) *P und Q sind symmetrisch zu E:*

Sind P und Q symmetrisch zu E, so muss der Mittelpunkt M der Strecke $\overline{PQ}$ in E liegen.

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\cdot\left(\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}\right)$$

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\cdot\left(\begin{pmatrix}2\\2\\3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right) = \frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}2\\2\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$$

Punktprobe ob $M \in E$

$1 + 1 + 2 \stackrel{?}{=} 4$

$4 = 4$

Wegen $M \in E$ sind P und Q symmetrisch zu E.

h) *Normalenform einer Ebene F:*

Die Ebene F wird festgelegt durch die Punkte P, Q und R.

$$k\cdot\overrightarrow{n_F} = \overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PR} = \begin{pmatrix}-1{,}5\\-1{,}5\\0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-0{,}5\\-0{,}5\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\-3\\0\end{pmatrix} = 3\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} => \overrightarrow{n_F} = \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$$

$F\colon\; \left(\vec{x} - \overrightarrow{OP}\right)\circ\overrightarrow{n_F} = 0$

$$F\colon\; \left(\vec{x} - \begin{pmatrix}2\\2\\3\end{pmatrix}\right)\circ\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} = 0$$

Einfallslot in Ebene F:

Steht der Richtungsvektor der Geraden g des Einfallslots senkrecht auf dem Normalenvektor der Ebene F, so verläuft g in F da $R \in g \wedge R \in F$. Dabei ist der Richtungsvektor von g gleich dem Normalenvektor von E.

$$\overrightarrow{n_E}\circ\overrightarrow{n_F} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} = 1 - 1 = 0$$

$\overrightarrow{n_E} \perp \overrightarrow{n_F}$

Wegen $\overrightarrow{n_E} \perp \overrightarrow{n_F} \wedge R \in g \wedge R \in F$ verläuft das Einfallslot in F.

i) *Größe der Winkel α und β:*

$$cos(\alpha) = \frac{|\overrightarrow{PR} \circ \overrightarrow{n_E}|}{|\overrightarrow{PR}| \cdot |\overrightarrow{n_E}|} = \frac{\left|\begin{pmatrix}-0,5\\-0,5\\-2\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix}-0,5\\-0,5\\-2\end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right|} = \frac{|-0,5-0,5-2|}{\sqrt{0,25+0,25+4} \cdot \sqrt{3}} = \frac{3}{\sqrt{13,5}}$$

$$\alpha = arccos\left(\frac{3}{\sqrt{13,5}}\right) \approx 35,26\,°$$

$$cos(\beta) = \frac{|\overrightarrow{QR} \circ \overrightarrow{n_E}|}{|\overrightarrow{QR}| \cdot |\overrightarrow{n_E}|} = \frac{\left|\begin{pmatrix}1,5\\1,5\\0\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix}1,5\\1,5\\0\end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right|} = \frac{|1,5+1,5|}{\sqrt{2,25+2,25} \cdot \sqrt{3}} = \frac{3}{\sqrt{13,5}}$$

$$\beta = arccos\left(\frac{3}{\sqrt{13,5}}\right) \approx 35,26\,°$$