



### Aufgabe A1.1

Die Abbildung zeigt den Verlauf einer Umgehungsstraße zur Entlastung der Ortsdurchfahrt  $\overline{AB}$  einer Gemeinde. Das Gemeindegebiet ist kreisförmig mit dem Mittelpunkt  $M$  und dem Radius  $1,5 \text{ km}$ .

Die Umgehungsstraße verläuft durch den Punkt  $A$  und  $B$  und wird beschrieben durch die Funktion  $f$  mit

$$f(x) = -0,1x^3 - 0,3x^2 + 0,4x + 3,2$$

Eine  $LE$  entspricht  $1 \text{ km}$ .

- a) Welche Koordinaten hat der nördlichste Punkt der Umgehungsstraße?  
Wie weit ist dieser Punkt vom Ortsmittelpunkt entfernt?

Die Umgehungsstraße beschreibt eine Linkskurve und eine Rechtskurve. Bestimmen Sie den Punkt, in dem diese beiden Abschnitte ineinander übergehen. Zeigen Sie, dass die Umgehungsstraße im Punkt  $A$  ohne Knick in die Ortsdurchfahrt einmündet.

- b) Zur Bewertung von Grundstücken wird die Fläche zwischen der Ortsdurchfahrt und der Umgehungsstraße vermessen.

Wie viel Prozent dieser Fläche liegen außerhalb des Gemeindegebietes?

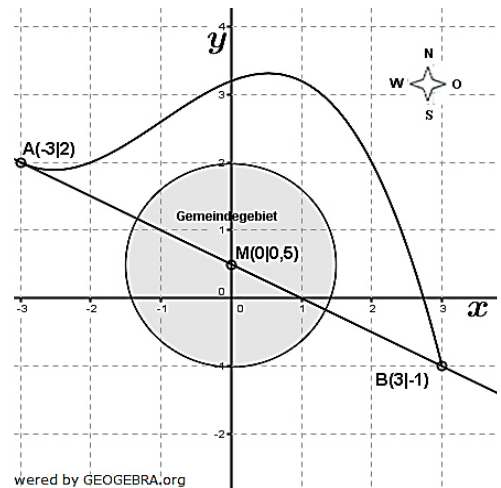
- c) Im Punkt  $P(1,5|3)$  befindet sich eine Windkraftanlage.

Ein Fahrzeug fährt von  $B$  aus auf die Umgehungsstraße.

Von welchem Punkt der Umgehungsstraße aus sieht der Fahrer die Windkraftanlage genau in Fahrtrichtung vor sich?

- d) In welchem Punkt der Umgehungsstraße fährt ein Fahrzeug parallel zur Ortsdurchfahrt?

Welchen Abstand hat ein Fahrzeug auf der Umgehungsstraße höchstens von der Ortsdurchfahrt?



### Aufgabe A1.2

Gegeben sind die Funktion  $f$  und für jedes  $t > 0$  die Funktion  $g_t$  durch

$$f(x) = (\sin(x))^2 \quad \text{bzw.} \quad g_t(x) = t \cdot \sin(x); \quad x \in \mathbb{R}$$

- a) Skizzieren Sie die Graphen von  $f$  und von  $g_1$  für  $0 \leq x \leq \pi$  in ein gemeinsames Koordinatensystem.

Geben Sie die Periode und die Amplitude der Funktion  $f$  an.

An welchen Stellen unterscheiden sich die Funktionswerte von  $f$  und  $g_1$  im skizzierten Bereich am stärksten?

Wie groß ist dieser Unterschied?

- b) Für welchen Wert von  $t$  schneiden sich die Graphen von  $f$  und  $g_t$  im Ursprung unter einem Winkel von  $45^\circ$ ?

Der Graph der Funktion  $f$  schließt im Bereich  $0 \leq x \leq \pi$  mit der  $x$ -Achse eine Fläche ein.

Für welchen Wert von  $t$  hat die Fläche, die der Graph von  $g_t$  im gleichen Bereich mit der  $x$ -Achse einschließt, den gleichen Inhalt?

## Abitur allg. bildendes Gymnasium Wahlteil Analysis 2012 BW

- c)  $K$  ist der Graph der Funktion  $g_1$ .  
 Durch Spiegelung von  $K$  an der Geraden  $h: y = 2$  entsteht der Graph  $\bar{K}$ .  
 Geben Sie eine zu  $\bar{K}$  gehörende Gleichung an.  
 $K$  rotiert um die Gerade  $h$ .  
 Dadurch entsteht im Bereich  $0,5 \leq x \leq 5,2$  das Modell eines Pokals, dessen Standfläche den Mittelpunkt  $M(0,5|2)$  hat.  
 Der massive Boden des Pokals reicht von der Standfläche bis zur engsten Stelle.  
 Untersuchen Sie, ob ein Liter Flüssigkeit in den Pokal passt.  
 (1 LE entspricht 2,5 cm.)

### Aufgabe A2

Ein Medikament kann mithilfe einer Spritze oder durch Tropfinfusion verabreicht werden.

- a) Bei Verabreichung des Medikaments mithilfe einer Spritze wird die Wirkstoffmenge im Blut des Patienten beschrieben durch die Funktion  $f$  mit  $f(t) = 130 \cdot (e^{-0,2t} - e^{-0,8t})$ ;  $0 \leq t \leq 24$   
 ( $t$  in Stunden nach der Injektion,  $f(t)$  in mg)  
 Skizzieren Sie den Graphen von  $f$ .  
 Das Medikament wirkt nur dann, wenn mindestens 36 mg des Wirkstoffes im Blut vorhanden sind.  
 Bestimmen Sie den Zeitraum, in dem das Medikament wirkt.  
 Zu welchen Zeitpunkten nimmt die Wirkstoffmenge im Blut am stärksten zu bzw. ab?  
 Berechnen Sie die mittlere Wirkstoffmenge im Blut während der ersten 12 Stunden.  
 Wenn das Medikament stattdessen durch Tropfinfusion zugeführt wird, lässt sich die Wirkstoffmenge im Blut beschreiben durch die Funktion  $g$  mit  $g(t) = 80 \cdot (1 - e^{-0,05t})$ ;  $t \geq 0$   
 ( $t$  in Minuten seit Infusionsbeginn,  $g(t)$  in mg)
- b) Welche Wirkstoffmenge wird sich langfristig im Blut befinden?  
 Zeigen Sie, dass die Wirkstoffmenge im Blut ständig zunimmt.  
 Zu welchem Zeitpunkt beträgt die momentane Änderungsrate der Wirkstoffmenge im Blut  $1 \frac{mg}{min}$ ?  
 In welchem 15-Minuten-Zeitraum ändert sich die Wirkstoffmenge um 30 mg?
- c) Geben Sie eine Differentialgleichung des beschränkten Wachstums an, die von der Funktion  $g$  erfüllt wird.  
 Bei der Tropfinfusion wird dem Patienten pro Minute eine konstante Wirkstoffmenge zugeführt. Die Abbaurate ist dabei stets proportional zur Wirkstoffmenge im Blut. Wie groß ist die konstante Zufuhr der Wirkstoffmenge pro Minute?  
 Welche Wirkstoffmenge müsste man pro Minute zuführen, damit sich langfristig 90 mg im Blut befinden?

### Lösung A1.1

#### Lösungslogik

GTR-Einstellungen:

$$Y1 = -.1X^3 - .3X^2 + .4X + 3.2$$

$$Y2 = \frac{d}{dx}(Y1)|_{x=X}$$

$$Y3 = Y2 * (1.5 - X) + Y1$$

$$Y4 = 3$$

$$Y5 = -.5X + .5$$

$$Y6 = -.5$$

```

WINDOW
Xmin=-1
Xmax=25
Xscl=2
Ymin=-20
Ymax=120
Yscl=10
↓Xres=3
    
```

a) *Nördlichster Punkt der Umgehungsstraße:*

Dies entspricht dem lokalem Maximum von  $f$ , Lösung per GTR.

*Entfernung zum Ortsmittelpunkt:*

Dies entspricht der Länge der Strecke  $\overline{MP_N}$ . Bestimmung über den Satz des Pythagoras.

*Übergang von Links- und Rechtskurve:*

Der Punkt liegt im Wendepunkt von  $f$ . Lösung per GTR mit  $f'(x)_{min}$ .

*Umgehungsstraße mündet ohne Knick im Punkt A in die Ortsdurchfahrt ein:*

Die Steigung der Geraden durch die Punkte A und B muss mit der Steigung von  $f$  im Punkt A übereinstimmen. Steigung der Gerade und Steigung von  $f$  über  $f'(x_A)$  ermitteln.

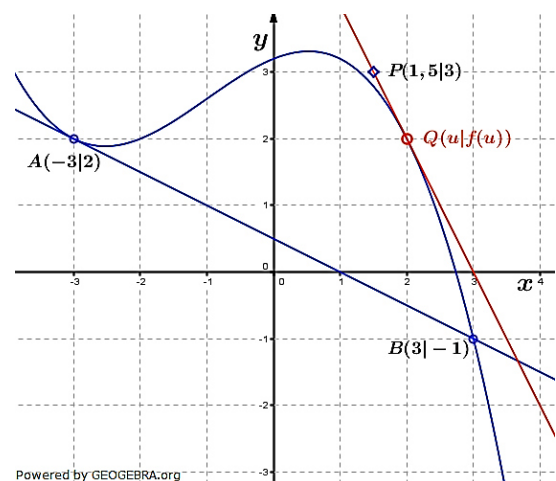
b) *Flächenvermessung:*

Die Fläche ermitteln wir über das Integral aus oberer Kurve  $f$  und unterer Kurve  $g$  (Gerade) im Intervall  $[-3;3]$ . Bevor das Integral gebildet werden kann, muss noch die Funktionsgleichung der Geraden aufgestellt werden. Berechnung der Fläche per GTR. Von dieser Fläche muss die Fläche eines Halbkreises abgezogen werden, um die Fläche außerhalb des Gemeindegebietes zu erhalten. Das Verhältnis Fläche außerhalb zur Fläche gesamt ergibt den gesuchten Prozentsatz.

c) *Windkraftanlage in Fahrtrichtung:*

Gesucht ist der Punkt  $Q(u|f(u))$  auf  $f$ , von dem aus der Fahrer die Windkraftanlage in Fahrtrichtung, das heißt tangential zur Straße, sieht. Wir müssen also die Tangente an  $f$  bestimmen, die durch den Punkt  $P(1,5|3)$  verläuft. Über die Punktsteigungsformel

$t(x) = f'(u) \cdot (x - u) + f(u)$  erhalten wir:  $3 = f'(u) \cdot (1,5 - u) + f(u)$ . Die Auflösung dieser Gleichung erfolgt mit dem GTR.

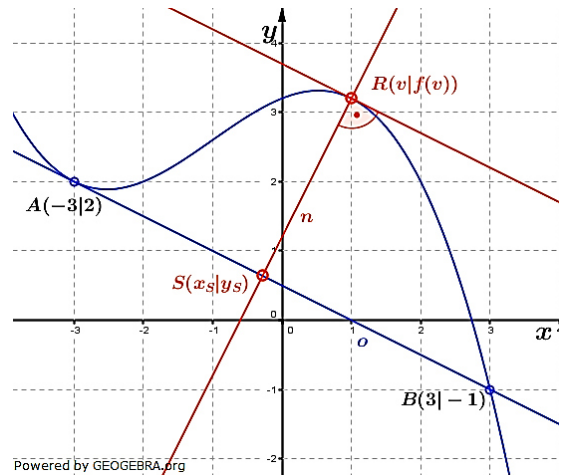


**Abitur allg. bildendes Gymnasium Wahlteil Analysis 2012 BW**

- d) *Fahrzeug fährt parallel zur Ortsdurchfahrt:*  
 Gesucht ist wiederum ein Punkt  $R(v|f(v))$  auf  $f$  in dem die Tangente an  $f$  dieselbe Steigung wie die Ortsdurchfahrt hat. Die Steigung der Ortsdurchfahrt ist  $m = -0,5$  (siehe Teilaufgabe a)). Somit muss gelten:  
 $f'(v) = -0,5$ .

*Größter Abstand des Fahrzeugs von der Ortsdurchfahrt:*

Den größten Abstand zur Ortsdurchfahrt hat das Fahrzeug im soeben berechneten Punkt  $R$ , er entspricht der Länge der Strecke  $\overline{SR}$ , wobei  $S$  der Schnittpunkt der Normalen durch  $R$  mit der Geraden der Ortsdurchfahrt  $\overline{AB}$  ist. Die Strecke  $\overline{SR}$  errechnet sich über den Satz des Pythagoras.



**Klausuraufschrieb**

- a) *Nördlichster Punkt der Umgehungsstraße:*  
 Lokales Maximum von  $f$ .

$f(x)_{max} \approx 3,313$  für  $x_0 \approx 0,528$   
 Der nördlichste Punkt der Umgehungsstraße hat die Koordinaten  $P_N(0,53|3,31)$ .

*Entfernung zum Ortsmittelpunkt:*

$$\overline{MP_N} = \sqrt{(x_N - 0)^2 + (y_N - 0,5)^2}$$

$$= \sqrt{0,53^2 + 2,81^2} \approx 2,86$$

Der nördlichste Punkt der Umgehungsstraße ist etwa 2,86 km vom Ortsmittelpunkt entfernt.

*Übergang von Links- und Rechtskurve:*

Wendepunkt  $W(x_W|f(x_W))$

$$f'(x_W)_{max} = 0,7 \text{ für } x_W = -1$$

$$f(-1) = y_W = 2,6$$

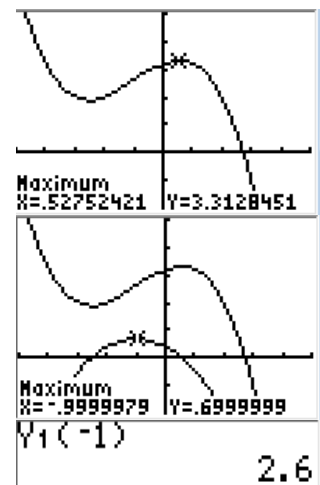
Der Übergang der Links- in die Rechtskurve befindet sich im Punkt  $W(-1|2,6)$ .

Kein Knick im Punkt A:

$$m_{\overline{AB}} = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{2 - (-1)}{-3 - 3} = -\frac{3}{6} = -0,5$$

$$f'(x_A) = -0,5$$

Die Umgehungsstraße mündet im Punkt A ohne Knick in die Ortsdurchfahrt ein.



$$y_2(-3) = -.5000001$$

**Abitur allg. bildendes Gymnasium Wahlteil Analysis 2012 BW**

- b) **Flächenvermessung:**  
Gerade durch die Punkte A und B:  
 $g(x) = -0,5x + 0,5$

$$A_{ges} = \int_{-3}^3 (f(x) - g(x)) dx \stackrel{\text{GTR}}{=} 10,8$$

$$A_{Halbkreis} = \frac{1}{2}\pi r^2 = \frac{1}{2}\pi \cdot 1,5^2 = 3,53$$

$$A_{au\sserhalb} = A_{ges} - A_{Halbkreis} = 10,8 - 3,53 = 7,27$$

$$\frac{A_{au\sserhalb}}{A_{ges}} = \frac{7,27}{10,8} = 0,673 = 67,3\%$$

Etwa 67 % der Fläche zwischen Umgehungsstraße und Ortsdurchfahrt liegen außerhalb des Gemeindegebietes.

$$\int_{-3}^3 (Y_1 - Y_5) dx = 10.8$$

- c) **Windkraftanlage in Fahrtrichtung:**  
Tangente an f durch P(1,5|3):

Punktsteigungsformel:

$$t(x) = f'(u) \cdot (x - u) + f(u)$$

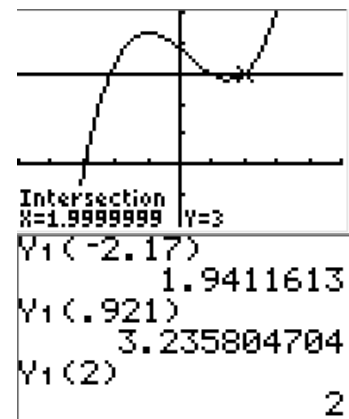
$$3 = f'(u) \cdot (1,5 - u) + f(u) \quad | \quad \text{Punktprobe mit } P(1,5|3)$$

$$u_1 \stackrel{\text{GTR}}{\approx} -2,17; \quad u_2 \stackrel{\text{GTR}}{\approx} 0,921; \quad u_3 \stackrel{\text{GTR}}{=} 2$$

$$f(u_1) \stackrel{\text{GTR}}{\approx} 1,94; \quad f(u_2) \stackrel{\text{GTR}}{\approx} 3,24; \quad f(u_3) \stackrel{\text{GTR}}{\approx} 2;$$

Da der Fahrer vom Punkt B aus in Richtung A fährt und der Fahrer den Punkt P vor sich sieht, ist nur die Lösung  $Q(u_3|f(u_3))$  relevant.

Im Punkt  $Q(2|2)$  sieht der Fahrer die Windkraftanlage genau in Fahrtrichtung vor sich.



- d) **Fahrzeug fährt parallel zur Ortsdurchfahrt:**

Punkt  $R(v|f(v))$ , in dem  $f'(v) = -0,5$  (Steigung der Ortsdurchfahrt)

$$v \stackrel{\text{GTR}}{=} 1; \quad f(1) \stackrel{\text{GTR}}{=} 3,2$$

Im Punkt  $R(1|3,2)$  fährt das Fahrzeug parallel zur Ortsdurchfahrt.

Größter Abstand des Fahrzeugs von der Ortsdurchfahrt:

Gleichung der Ortsdurchfahrt (Punktsteigungsformel)

$$o(x) = -0,5 \cdot (x - 3) - 1 = -0,5x + 0,5$$

Gleichung der Orthogonalen durch  $R(1|3,2)$  über Punktsteigungsformel:

$$n(x) = 2 \cdot (x - 1) + 3,2 = 2x + 1,2$$

$$n(x) \cap o(x)$$

I)  $n(x) = 2x + 1,2$

II)  $o(x) = -0,5x + 0,5$

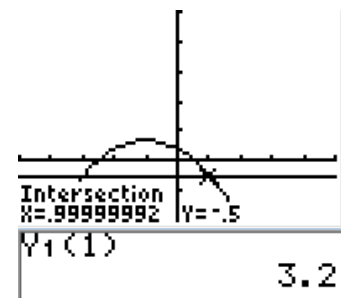
I)-II)  $0 = 2,5x + 0,7 \Rightarrow x = -0,28$

$$n(-0,28) = 2 \cdot (-0,28) + 1,2 = 0,64$$

Koordinaten des Schnittpunktes  $S(-0,28|0,64)$ .

$$|\overline{RS}| = \sqrt{(x_r - x_s)^2 + (y_r - y_s)^2} = \sqrt{(1 - (-0,28))^2 + (3,2 - 0,64)^2} \stackrel{\text{GTR}}{\approx} 2,86$$

Das Fahrzeug hat auf der Umgehungsstraße höchstens ca. 2,86 km Abstand von der Ortsdurchfahrt.



**Lösung A1.2**

**Lösungslogik**

GTR-Einstellungen:

- Y1=sin(X)<sup>2</sup>
- Y2=sin(X)
- Y3=Y2 – Y1
- Y4=-sin(X) + 4
- Y5=2

**Achtung:** GTR-MODE muss auf **RADIAN** stehen.

$$\frac{\pi}{4}$$



```

WINDOW
Xmin=-1
Xmax=5
Xscl=.78539816...
Ymin=-2
Ymax=2
Yscl=.5
Xres=3

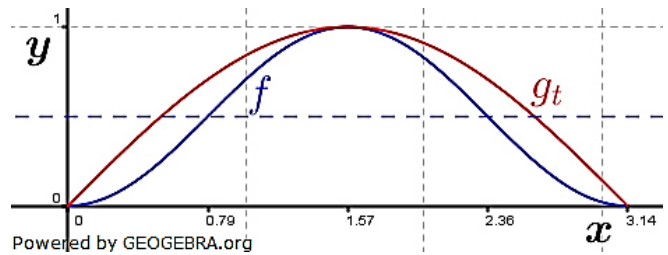
MODE
NORMAL SCI ENG
FLOAT 0123456789
RADIAN DEGREE
FUNC PAR POL SEQ
CONNECTED DOT
SEQUENTIA SIMUL
    
```

- a) *Periode und Amplitude von f:*  
Amplitude und Periode entnehmen wir dem skizzierten Graphen von  $f$ .  
*Unterschied der Funktionswerte f und g<sub>1</sub>:*  
Die Unterschiede erhalten wir über die Differenzfunktion  $D(x) = g_1(x) - f(x)$ .
- b) *Schnittwinkel der Graphen von f und g<sub>t</sub> im Ursprung:*  
Wir ermitteln die Steigung von  $f$  im Ursprung per GTR mit  $f'(0) = 0$ .  
Schnittwinkel 45° im Ursprung bedeutet somit  $g_t'(0) = 1$ .  
*Flächenvergleich:*  
Gesucht ist der Wert von  $t$  für den die Fläche, die  $f$  mit der  $x$ -Achse im Intervall  $[0; \pi]$  einschließt genauso groß ist wie die Fläche, die  $g_t$  mit der  $x$ -Achse im selben Intervall einschließt.
- c) *Spiegelung des Graphen K von g<sub>1</sub> an der Geraden h: y = 2:*  
 $g_1$  ist eine normale Sinuskurve. Wir spiegeln diese zunächst an der  $x$ -Achse und erhalten  $g_1^*(x) = -\sin(x)$ . Diese Funktion verläuft nach wie vor durch den Ursprung. Die Spiegelung des Ursprungs an der Geraden  $y = 2$  führt zum Spiegelpunkt  $O^*(0|4)$ . Die an der  $x$ -Achse gespiegelte Sinuskurve muss also um 4 Einheiten nach oben verschoben werden.  
*Fassungsvermögen des Pokals:*  
Die engste Stelle des Rotationskörpers liegt bei  $x_{\text{Hochpunkt}}$  von  $K$  bzw.  $x_{\text{Tiefpunkt}}$  von  $\bar{K}$ , wegen der Periode  $2\pi$  von sowohl  $g_1$  als auch  $\bar{g}_1$  also bei  $x = \frac{\pi}{2}$ . Es ist also das Volumen zu bestimmen, welches durch Rotation von  $\bar{g}_1$  um  $h$  im Intervall  $[\frac{\pi}{2}; 5,2]$  entsteht. Da die Integralformel jedoch nur das Volumen bei Rotation um die  $x$ -Achse berechnet, müssen  $g_1$  alternativ  $\bar{g}_1$  um zwei Einheiten nach unten geschoben werden.  
*Volumenbestimmung per GTR:*  
Mit der Aufgabenstellung „1 LE entspricht 2,5 cm“ erhalten wir als Volumeneinheit 1 VE entspricht  $2,5^3 = 15,625 \text{ cm}^3$ .

**Abitur allg. bildendes Gymnasium Wahlteil Analysis 2012 BW**

Klausuraufschrieb

- a) Periode und Amplitude von  $f$ :  
Die Funktion  $f$  hat die Periode  $\pi$  und die Amplitude 0,5.



Unterschied der Funktionswerte  $f$  und  $g_1$ :

$$D(x) = g_1(x) - f(x)$$

$D(x)_{max} = 0,25$  für  $x_1 \approx 0,52$  und  $x_2 \approx 2,62$   
Der größte Unterschied der Funktionswerte von  $f$  und  $g_1$  im Intervall  $[0; \pi]$  beträgt 0,25 bei  $x_1$  etwa 0,52 und  $x_2$  etwa 2,62.

- b) Schnittwinkel der Graphen von  $f$  und  $g_t$  im Ursprung:

$$f'(0) = 0$$

$$\tan(45^\circ) = 1 \Rightarrow g_t'(0) = 1$$

$$g_t'(x) = t \cdot \cos(x)$$

$$g_t'(0) = 1 = t \cdot \cos(0) \Rightarrow t = 1$$

Für  $t = 1$  schneiden sich die Graphen von  $f$  und  $g_1$  im Ursprung unter einem Winkel von  $45^\circ$ .

Flächenvergleich:

$$\int_0^\pi f(x) dx = \int_0^\pi g_t(x) dx$$

$$\int_0^\pi f(x) dx \approx 1,57$$

$$1,57 = \int_0^\pi g_t(x) dx = -t \cdot [\cos(x)]_0^\pi = -t \cdot (-1 - 1) = 2t$$

$$t \approx 0,79$$

Für  $t \approx 0,79$  schließen die Graphen von  $f$  und  $g_t$  mit der  $x$ -Achse im Intervall  $[0; \pi]$  Flächen mit gleichem Inhalt ein.

- c) Spiegelung des Graphen  $K$  von  $g_1$  an der Geraden  $h: y = 2$ :

$$g_1(x) = \sin(x)$$

Spiegelung an der  $x$ -Achse:

$$g_1^*(x) = -g_1(x) = -\sin(x)$$

Ursprung  $O(0|0)$  an  $y = 2$  gespiegelt führt zu  $O'(0|4)$ .

$$\bar{g}_1(x) = g_1^*(x) + 4 = -\sin(x) + 4$$

Die zu  $\bar{K}$  gehörende Gleichung lautet  $\bar{g}_1(x) = -\sin(x) + 4$ .

Fassungsvermögen des Pokals:

Engste Stelle des Pokals liegt bei  $\frac{p}{4}$  von  $g_1$  (und

$\bar{g}_1(x)$ ) mit  $p = 2\pi$  also  $x = \frac{\pi}{2}$

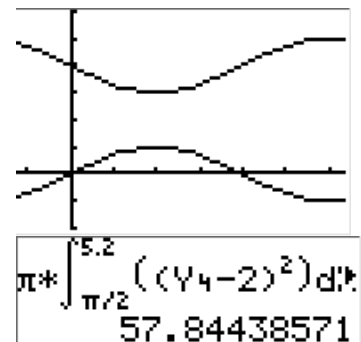
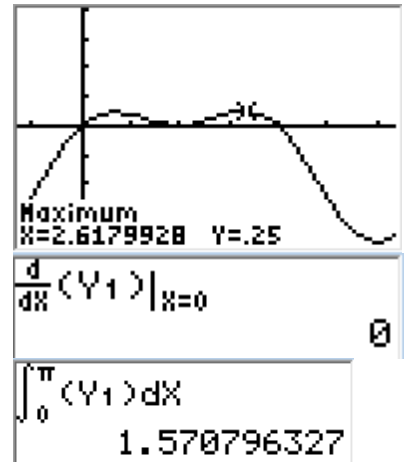
$$V = \pi \cdot \int_{\frac{\pi}{2}}^{5,2} ((\bar{g}_1(x) - 2)^2) dx \approx 57,84$$

1 LE  $\triangleq 2,5$  cm daraus folgt:

$$1 VE \triangleq 2,5^3 \text{ cm}^3 = 15,625 \text{ cm}^3$$

$$V_{\text{Pokal}} = 57,84 \cdot 15,625 \approx 906,82 \text{ cm}^3 \approx 0,9 \text{ ltr.}$$

1 ltr Flüssigkeit passt nicht in den Pokal.



**Lösung A2**

**Lösungslogik**

GTR-Einstellungen:

$$Y1=130(e^{-.2X} - e^{-.8X})$$

$$Y2=36$$

$$Y3=\frac{d}{dX}(Y1)|_{X=X}$$

$$Y4=80(1 - e^{-.05X})$$

$$Y5=1$$

$$Y6=\frac{d}{dX}(Y4)|_{X=X}$$

$$Y7=Y4(X + 15) - Y4$$

$$Y8=30$$

```

WINDOW
Xmin=-2
Xmax=25
Xscl=1
Ymin=-5
Ymax=90
Yscl=5
↓Xres=3
    
```

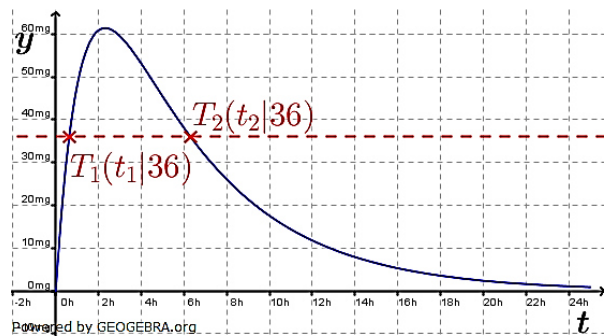
a) *Zeitraum, in dem das Medikament wirkt:*

Dies ist die Zeit zwischen  $t_1$  und  $t_2$ . Die Werte ermitteln wir per GTR.

*Stärkste Zu- bzw. Abnahme der Wirkstoffmenge:*

Die stärkste Zu- bzw. Abnahme der Wirkstoffmenge findet in den Maxima bzw. Minima der Ableitungs-kurve  $f'(t)$  statt.

Lösung per GTR.



*Mittlere Wirkstoffmenge während der ersten 12 Stunden:*

Die mittlere Wirkstoffmenge ist  $\frac{1}{12}$  der Fläche, die  $f$  mit der  $x$ -Achse im Intervall  $[0; 12]$  einschließt.

b) *Langfristige Wirkstoffmenge im Blut:*

Wir müssen das Verhalten von  $g(t)$  für  $t \rightarrow \infty$  bestimmen.

*Ständige Zunahme der Wirkstoffmenge:*

Wir müssen nachweisen, dass  $g(t)$  streng monoton steigend ist. Hierzu bilden wir  $g'(t)$  und weisen nach, dass der Wertebereich der Funktion  $g'$  nur positive Werte aufweist.

*Zeitpunkt der momentanen Änderungsrate für  $1 \frac{mg}{min}$ :*

$g'(t)$  entspricht der momentanen Änderungsrate. Wir ermitteln  $t$  im Schnittpunkt von  $g'(t)$  mit der Parallelen zur  $x$ -Achse  $y = 1$ .

*15-Minuten-Zeitraum für Änderung der Wirkstoffmenge um 30 mg:*

Die Differenz von  $g(t + 15)$  und  $g(t)$  soll 30 ergeben. Wir bestimmen den Schnittpunkt von  $g(t + 15) - g(t)$  mit der Parallelen zur  $x$ -Achse  $y = 30$ .

c) *Aufstellung der Differentialgleichung:*

Eine Differentialgleichung des beschränkten Wachstums hat die Form  $g'(t) = k \cdot (S - g(t))$ . Die Schranke ist  $S = 80$ ,  $k = 0,05$ . Dies ergibt sich aus der gegebenen Funktion  $g(t)$ . Wir setzen die gefundenen Werte in die allgemeine Gleichung einer Differentialrechnung des beschränkten Wachstums ein.

**Abitur allg. bildendes Gymnasium Wahlteil Analysis 2012 BW**

Wirkstoffzufuhr pro Minute für langfristig 90 mg Wirkstoff im Blut:

Zur Bestimmung der nötigen konstanten Zufuhr gehen wir die Überlegungen von gerade zuvor rückwärts. Langfristig 90 mg Wirkstoff im Blut bedeutet, dass die Schranke  $S = 90$  sein muss, also  $g'(t) = 0,05 \cdot (90 - g(t))$ . Hieraus ergibt sich die konstante Zufuhr zu

$$Z = k \cdot S_{neu} = 0,05 \cdot 90.$$

Klausuraufschrieb

a) Zeitraum, in dem das Medikament wirkt:

$$f(t) \cap y = 36$$

GTR                      GTR

$$t_1 \approx 0,628; \quad t_2 \approx 6,305$$

$$t_2 - t_1 = 6,305 - 0,628 \approx 5,7$$

Das Medikament wirkt von ca. 0,6 Stunden bis 6,3 Stunden nach der Injektion.

Stärkste Zu- bzw. Abnahme der Wirkstoffmenge:

Für  $0 \leq x \leq 24$ :

GTR                      GTR

$$f'(t)_{max} = 78 \text{ bei } t_1 = 0$$

GTR                      GTR

$$f'(t)_{min} \approx -7,74 \text{ bei } t_2 \approx 4,63$$

Gleich zu Beginn nimmt die Wirkstoffmenge am stärksten zu, nach etwa 4,6 Stunden nimmt sie am stärksten wieder ab.

Mittlere Wirkstoffmenge während der ersten 12 Stunden:

GTR

$$\bar{m} = \frac{1}{12} \cdot \int_0^{12} f(t) dt \approx 35,712$$

Die mittlere Wirkstoffmenge im Blut beträgt während der ersten 12 Stunden etwa 35,7 mg.

b) Langfristige Wirkstoffmenge im Blut:

Wegen  $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-0,05t} = 0$  ist  $\lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = 80$ .

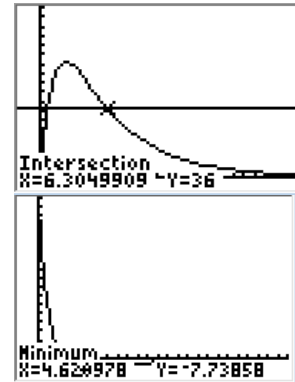
Langfristig befinden sich 80 mg Wirkstoff im Blut.

Ständige Zunahme der Wirkstoffmenge:

$$g'(t) = 4 \cdot e^{-0,05t}$$

Wegen  $e^{-0,05t} > 0$  für  $t \in \mathbb{R}$  ist auch  $g'(t) > 0$  für  $t \in \mathbb{R}$ .

Der Funktion  $g$  ist streng monoton wachsend, d.h. die Wirkstoffmenge im Blut nimmt ständig zu.



$$\frac{1}{12} \cdot \int_0^{12} f(x) dx = 35.7120280$$

**Abitur allg. bildendes Gymnasium Wahlteil Analysis 2012 BW**

Zeitpunkt der momentanen Änderungsrate für  $1 \frac{mg}{min}$ :

$$g'(t) \cap y = 1$$

GTR

$$t \approx 27,73$$

Etwa 28 Minuten nach Beobachtungsbeginn beträgt die momentane Änderungsrate  $1 \frac{mg}{min}$ .

15-Minuten-Zeitraum für Änderung der Wirkstoffmenge um 30 mg:

$$g(t + 15) - g(t) = 30$$

GTR

$$t \approx 6,83$$

Der 15-Minuten-Zeitraum mit einer Wirkstoffzunahme von 30 mg geht von ca. 7 Minuten bis ca. 22 Minuten nach Infusionsbeginn.

$$g(t + 15) - g(t) = 30$$

GTR

$$t \approx 6,83$$

Der 15-Minuten-Zeitraum mit einer Wirkstoffzunahme von 30 mg geht von ca. 7 Minuten bis ca. 22 Minuten nach Infusionsbeginn.

c) **Aufstellung der Differentialgleichung:**

$g'(t) = k \cdot (S - g(t))$	allgemeine Form der Differentialgleichung für beschränktes Wachstum gemäß Aufgabenstellung
$S = 80; \quad k = 0,05$	

$$g'(t) = 0,05 \cdot (80 - g(t))$$

$$g'(t) = 4 - 0,05 \cdot g(t)$$

Die Differentialgleichung des beschränkten Wachstums lautet:

$$g'(t) = 4 - 0,05 \cdot g(t).$$

Wirkstoffzufuhr pro Minute für langfristig 90 mg Wirkstoff im Blut:

$S_{neu} = 90$  wegen langfristig 90 mg Wirkstoff im Blut. Daraus folgt:

$$g'(t) = 0,05 \cdot (90 - g(t))$$

$$Z = k \cdot S_{neu} = 0,05 \cdot 90 = 4,5$$

Damit sich langfristig 90 mg Wirkstoff im Blut befinden, müssten 4,5 mg Wirkstoffmenge pro Minute zugeführt werden.

