Abituraufgaben Wahlteil Analytische Geometrie 2004 BW

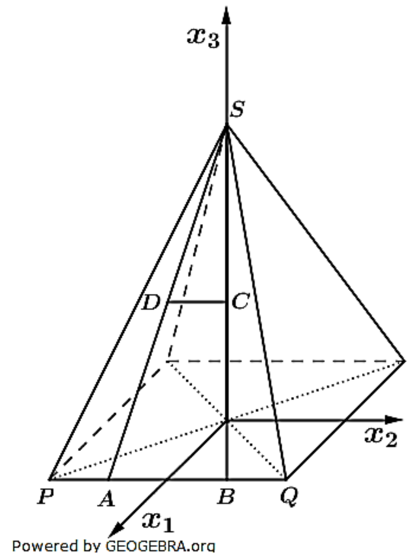
Aufgabe B1

Ein Zelt hat die Form einer senkrechten quadratischen Pyramide. Die Längen der Quadratseiten und die Pyramidenhöhe betragen jeweils $2{,}0\,m$.

a) Benachbarte Seitenfläche bilden einen stumpfen Winkel. Wie groß ist dieser?

b) In der Vorderfläche PQS befindet sich eine Einstiegsöffnung $ABCD$ in Form eines symmetrischen Trapezes. C und D sind die Mitten der Strecke BS bzw. der Strecke AS. Die Strecke AB hat die Länge $1\,m$. Wie viel Prozent der Vorderfläche beansprucht die Einstiegsöffnung?

c) Zur Beleuchtung wird im Zelt eine Lampe aufgehängt, die im Folgenden als punktförmige Lichtquelle betrachtet werden soll. Ihr Licht dringt durch die Einstiegsöffnung nach außen und erzeugt auf dem Boden vor dem Zelt das Bild $ABC'D'$ der Einstiegsöffnung als „Lichtteppich".
Berechnen Sie die Länge der Strecke $C'D'$, wenn sich die Lampe $25\,cm$ unter der Zeltspitze befindet.



Aufgabe B2.1

Gegeben sind die Punkte $A(10|0|0)$ und $B(0|10|0)$ sowie für jedes $a > 0$ eine Ebene $E_a: a \cdot x_1 - x_3 = 0$.

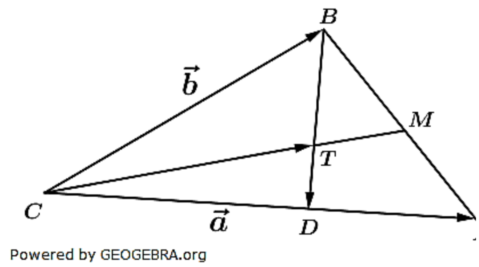
a) Beschreiben Sie die Lage der Ebene E_3.
Die zu E_a senkrechte Gerade durch A schneidet E_a im Punkt D_a. Bestimmen Sie seine Koordinaten.
(Teilergebnis: $D_a = \left(\frac{10}{1+a^2}|0|\frac{10a}{1+a^2}\right)$

b) Zeigen Sie, dass das Dreieck ABD_a für jedes $a > 0$ rechtwinklig ist.

Aufgabe B 2.2

(nicht mehr prüfungsrelevant)

Ein Dreieck ABC wird durch die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannt. M ist die Mitte der Strecke AB. T teilt die Strecke CM im Verhältnis $3:1$. Die Strecke BD verläuft durch T.
In welchem Verhältnis wird diese Strecke durch T geteilt?



Abituraufgaben Wahlteil Analytische Geometrie 2004 BW

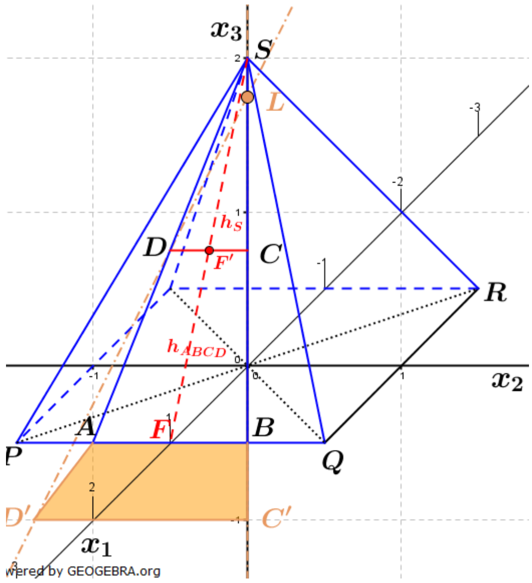
Lösung B1

Lösungslogik

a) *Stumpfer Winkel zwischen zwei Seitendreiecken:*
Die zwei Seitendreiecke liegen je in einer Ebene, der Schnittwinkel der beiden Ebenen, z. B. die Ebene PQS und die Ebene QRS (der Eckpunkt R muss noch bestimmt werden) ergibt sich dann aus den beiden Normalenvektoren der beiden Ebenen. Achtung!!! Die Formel liefert den spitzen Winkel, wir müssen also noch die Ergänzung zu $180°$ bilden.

b) *Prozentualer Anteil der Einstiegsöffnung an der Vorderfläche:*
Es wird die Flächenformel für ein Trapez benötigt, hierzu müssen wir allerdings noch die Höhe des Trapezes bestimmen, z.B. über die Strecke $\overline{FF'}$. Weiterhin benötigen wir die Fläche des Dreiecks PQS, die wir über den Betrag des ungekürzten Kreuzproduktes der Vektoren $\overrightarrow{PQ}$ und $\overrightarrow{PS}$ ermitteln. Das prozentuale Verhältnis ist den $\frac{A_{Trapez}}{A_{PQS}}$.

c) *Länge der Strecke $C'D'$:*
Der Punkt D' ist der Spurpunkt der Geraden durch L und D mit der x_1x_2–Koordinatenebene.
Der Punkt C' ist der Spurpunkt der Geraden durch L und C mit der x_1x_2–Koordinatenebene.
Die Länge von $\overline{C'D'}$ entspricht dem Betrag des Vektors $\overrightarrow{C'D'}$.



Klausuraufschrieb

Bestimmung der Koordinaten der Punkte:

$P(1|-1|0)$; $Q(1|1|0)$; $R(-1|1|0)$; $S(0|0|2)$
$L(0|0|1{,}75)$; $A(1|-0{,}5|0)$; $B(1|0{,}5|0)$; $F(1|0|0)$

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \tfrac{1}{2}\overrightarrow{AS} = \begin{pmatrix} 1 \\ -0{,}5 \\ 0 \end{pmatrix} + \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 0{,}5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ -0{,}25 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow C(0{,}5|-0{,}25|1)$$

$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OB} + \tfrac{1}{2}\overrightarrow{BS} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0{,}5 \\ 0 \end{pmatrix} + \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ -0{,}5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 0{,}25 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow D(0{,}5|0{,}25|1)$$

$$\overrightarrow{OF'} = \overrightarrow{OF} + \tfrac{1}{2}\overrightarrow{FS} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow F'(0{,}5|0|1)$$

Abituraufgaben Analytische Geometrie Wahlteil 2004 BW

a) *Stumpfer Winkel zwischen zwei Seitendreiecken:*

$\sphericalangle(E_{PQS}, E_{QRS}) = \varphi$

$cos\varphi = \frac{\left|\overrightarrow{n_{E_{PQS}}} \circ \overrightarrow{n_{E_{QRS}}}\right|}{\left|\overrightarrow{n_{E_{PQS}}}\right| \cdot \left|\overrightarrow{n_{E_{QRS}}}\right|}$

$k \cdot \overrightarrow{n_{E_{PQS}}} = \overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PS} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{n_{E_{PQS}}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$k \cdot \overrightarrow{n_{E_{QRS}}} = \overrightarrow{QR} \times \overrightarrow{QS} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{n_{E_{QRS}}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$cos\varphi = \frac{\left|\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right|} = \frac{1}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}} = \frac{1}{5}$

$\varphi = cos^{-1}\left(\frac{1}{5}\right) = 78{,}46\,°$

$\varphi^* = 180° - 78{,}46° \approx 101{,}5\,°$

Der stumpfe Winkel benachbarter Seitenflächen ist $101{,}5\,°$ *groß.*

b) *Prozentualer Anteil der Einstiegsöffnung an der Vorderfläche:*

$A_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot (\overline{AB} + \overline{CD}) \cdot h_{ABCD}$

$\overline{AB} = 1; \quad \overline{CD} = 0{,}5; \quad h_{ABCD} = \left|\overrightarrow{FF'}\right| = \sqrt{0{,}5^2 + 1} = \sqrt{1{,}25}$

$A_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot 1{,}5 \cdot \sqrt{1{,}25} = 0{,}75 \cdot \sqrt{1{,}25}$

$A_{PQS} = \frac{1}{2} \cdot \left|\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PS}\right| = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{16 + 4} = \sqrt{5}$

$\frac{A_{ABCD}}{A_{PQS}} = \frac{0{,}75 \cdot \sqrt{1{,}25}}{\sqrt{5}} = 0{,}75 \cdot 0{,}5 = 0{,}375 = 37{,}5\,\%$

Die Einstiegsöffnung beansprucht $37{,}5\,\%$ *der Vorderfläche.*

c) *Länge der Strecke* $C'D'$*:*

C' ist Spurpunkt der Geraden durch L und C mit der x_1x_2–Koordinatenebene.
D' ist Spurpunkt der Geraden durch L und D mit der x_1x_2–Koordinatenebene.

$g_{\overline{LC}}: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1{,}75 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ -0{,}25 \\ -0{,}75 \end{pmatrix}$

$x_{3_{C'}} = 0 = 1{,}75 - 0{,}75t \;\Rightarrow\; t = \frac{7}{3}$

$C'\left(\frac{7}{6}\middle|-\frac{7}{12}\middle|0\right)$

$g_{\overline{LD}}: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1{,}75 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 0{,}25 \\ -0{,}75 \end{pmatrix}$

$x_{3_{D'}} = 0 = 1{,}75 - 0{,}75t \;\Rightarrow\; t = \frac{7}{3}$

$D'\left(\frac{7}{6}\middle|\frac{7}{12}\middle|0\right)$

$\overline{C'D'} = \frac{7}{6}$

Die Strecke $\overline{C'D'}$ *ist* $\frac{7}{6}\,LE$ *lang.*

Abituraufgaben Analytische Geometrie Wahlteil 2004 BW

Lösung B2.1

Lösungslogik

a) *Lage von E_3:*
Siehe Klausuraufschrieb.
Koordinaten des Punktes D_a:
Die Gerade g_a durch A hat als Richtungsvektor den Normalenvektor der Ebene E_a. Wir bilden $g_a \cap E_a$ und erhalten damit die Koordinaten des Punktes D_a.

b) *Nachweis, dass jedes Dreieck ABD_a rechtwinklig ist:*
Wir weisen nach, dass $\overrightarrow{D_aA} \circ \overrightarrow{D_aB}$ für jedes $a > 0$ stets 0 ist.

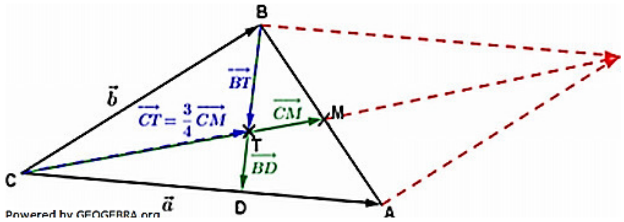
Klausuraufschrieb

a) *Lage von E_3:*
$E_3\colon\ 3x_1 - x_3 = 0$
In der Ebenengleichung fehlt die x_2–Koordinate. Folglich ist die Ebene parallel zur x_2–Achse. Da E_3 durch den Ursprung verläuft, verläuft die x_2–Achse in der Ebene.
Koordinaten des Punktes D_a:
$$g_a\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix};\ \ r \in \mathbb{R}$$
$g_a \cap E_a$
Aus g_a folgt:
$x_1 = 10 + ra; \quad x_3 = -r$
$E_a\colon\ a(10 + ra) + r = 0$
$ra^2 + r + 10a = 0$
$r(a^2 + 1) = -10a$
$r = -\frac{10a}{a^2+1}$
$$\overrightarrow{OD_a} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{10a}{a^2+1} \cdot \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 - \frac{10a^2}{a^2+1} \\ 0 \\ \frac{10a}{a^2+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{10a^2+10}{a^2+1} - \frac{10a^2}{a^2+1} \\ 0 \\ \frac{10a}{a^2+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{10}{a^2+1} \\ 0 \\ \frac{10a}{a^2+1} \end{pmatrix}$$
Der Schnittpunkt hat die Koordinaten $D_a\left(\frac{10}{a^2+1} \middle| 0 \middle| \frac{10a}{a^2+1}\right)$.

b) *Nachweis, dass jedes Dreieck ABD_a rechtwinklig ist:*
$$\overrightarrow{D_aA} = \begin{pmatrix} 10 - \frac{10}{a^2+1} \\ 0 \\ -\frac{10a}{a^2+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{10a^2}{a^2+1} \\ 0 \\ -\frac{10a}{a^2+1} \end{pmatrix}; \quad \overrightarrow{BD_a} = \begin{pmatrix} -\frac{10}{a^2+1} \\ 10 \\ -\frac{10a}{a^2+1} \end{pmatrix}$$
$$\overrightarrow{AD_a} \circ \overrightarrow{BD_a} = \begin{pmatrix} \frac{10a^2}{a^2+1} \\ 0 \\ -\frac{10a}{a^2+1} \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -\frac{10}{a^2+1} \\ 10 \\ -\frac{10a}{a^2+1} \end{pmatrix} = -\frac{100a^2}{(a^2+1)^2} + \frac{100a^2}{(a^2+1)^2} = 0$$
Wegen $\overrightarrow{AD_a} \circ \overrightarrow{BD_a} = 0$ für alle $a \neq 0$ ist das Dreieck ABD_a stets rechtwinklig.

Lösung B2.2

Klausuraufschrieb



Die unabhängigen Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ spannen ein Parallelogramm auf, deshalb gilt:

$\overrightarrow{CM} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})$ und somit

$\overrightarrow{CT} = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}) = \frac{3}{8}(\vec{a} + \vec{b})$

Wir betrachten den geschlossenen Vektorzug BTC. Es gilt:

$$\overrightarrow{BT} + \overrightarrow{TC} + \vec{b} = \vec{o}$$
$$\overrightarrow{BT} = \overrightarrow{CT} - \vec{b} = \frac{3}{8}(\vec{a} + \vec{b}) - \vec{b} = \frac{3}{8}\vec{a} - \frac{5}{8}\vec{b}$$

Wir skalieren den Vektor $\vec{a}$ mit s und betrachten den geschlossenen Vektorzug BDC. Es gilt:

$$\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DC} + \vec{b} = \vec{o}$$
$$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{CD} - \vec{b} = s \cdot \vec{a} - \vec{b}$$

Der Vektor $\overrightarrow{BT}$ ist Teilstück des Vektors $\overrightarrow{BD}$ und wir können schreiben:

$$\overrightarrow{BT} = r \cdot \overrightarrow{BD} = r \cdot \left(s \cdot \vec{a} - \vec{b}\right)$$

Durch Gleichsetzung erhalten wir:

$$\frac{3}{8}\vec{a} - \frac{5}{8}\vec{b} = r \cdot \left(s \cdot \vec{a} - \vec{b}\right) \implies$$
$$\frac{3}{8}\vec{a} - \frac{5}{8}\vec{b} - r \cdot s \cdot \vec{a} + r \cdot \vec{b} = \vec{o} \qquad | \qquad \text{Faktorisieren}$$
$$\vec{a}\left(\frac{3}{8} - rs\right) + \vec{b}\left(r - \frac{5}{8}\right) = \vec{o}$$

Wegen der linearen Unabhängigkeit von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ muss somit gelten:

(1) $\quad \frac{3}{8} - rs = 0$

(2) $\quad r - \frac{5}{8} = 0 \implies r = \frac{5}{8} \longrightarrow (1)$

$\frac{3}{8} - \frac{5}{8}s = 0 \implies s = \frac{3}{5}$

Da $\overrightarrow{BT} = r \cdot \overrightarrow{BD}$ ist dadurch $\overrightarrow{BT} = \frac{5}{8} \cdot \overrightarrow{BD}$ und $\overrightarrow{TD} = \frac{3}{8} \cdot \overrightarrow{BD}$.

Das Verhältnis $\frac{\overline{BT}}{\overline{TD}}$ ergibt somit $\frac{5}{3}$.