Abituraufgaben Wahlteil Analytische Geometrie 2004 BW

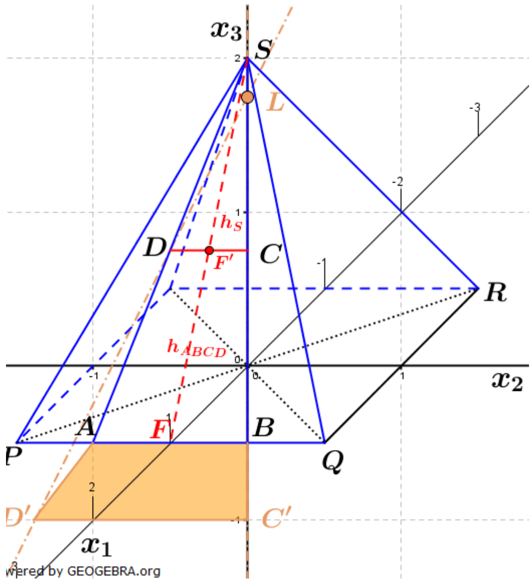
Lösung B1

Lösungslogik

a) *Stumpfer Winkel zwischen zwei Seitendreiecken:*
Die zwei Seitendreiecke liegen je in einer Ebene, der Schnittwinkel der beiden Ebenen, z. B. die Ebene PQS und die Ebene QRS (der Eckpunkt R muss noch bestimmt werden) ergibt sich dann aus den beiden Normalenvektoren der beiden Ebenen. Achtung!!! Die Formel liefert den spitzen Winkel, wir müssen also noch die Ergänzung zu $180°$ bilden.

b) *Prozentualer Anteil der Einstiegsöffnung an der Vorderfläche:*
Es wird die Flächenformel für ein Trapez benötigt, hierzu müssen wir allerdings noch die Höhe des Trapezes bestimmen, z.B. über die Strecke $\overline{FF'}$. Weiterhin benötigen wir die Fläche des Dreiecks PQS, die wir über den Betrag des ungekürzten Kreuzproduktes der Vektoren $\overrightarrow{PQ}$ und $\overrightarrow{PS}$ ermitteln. Das prozentuale Verhältnis ist den $\frac{A_{Trapez}}{A_{PQS}}$.

c) *Länge der Strecke $C'D'$:*
Der Punkt D' ist der Spurpunkt der Geraden durch L und D mit der x_1x_2–Koordinatenebene.
Der Punkt C' ist der Spurpunkt der Geraden durch L und C mit der x_1x_2–Koordinatenebene.
Die Länge von $\overline{C'D'}$ entspricht dem Betrag des Vektors $\overrightarrow{C'D'}$.



Klausuraufschrieb

Bestimmung der Koordinaten der Punkte:

$P(1|-1|0)$; $Q(1|1|0)$; $R(-1|1|0)$; $S(0|0|2)$
$L(0|0|1{,}75)$; $A(1|-0{,}5|0)$; $B(1|0{,}5|0)$; $F(1|0|0)$

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \tfrac{1}{2}\overrightarrow{AS} = \begin{pmatrix} 1 \\ -0{,}5 \\ 0 \end{pmatrix} + \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 0{,}5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ -0{,}25 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow C(0{,}5|-0{,}25|1)$$

$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OB} + \tfrac{1}{2}\overrightarrow{BS} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0{,}5 \\ 0 \end{pmatrix} + \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ -0{,}5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 0{,}25 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow D(0{,}5|0{,}25|1)$$

$$\overrightarrow{OF'} = \overrightarrow{OF} + \tfrac{1}{2}\overrightarrow{FS} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow F'(0{,}5|0|1)$$

Abituraufgaben Analytische Geometrie Wahlteil 2004 BW

a) *Stumpfer Winkel zwischen zwei Seitendreiecken:*

$\sphericalangle(E_{PQS}, E_{QRS}) = \varphi$

$cos\varphi = \frac{\left|\overrightarrow{n_{E_{PQS}}} \circ \overrightarrow{n_{E_{QRS}}}\right|}{\left|\overrightarrow{n_{E_{PQS}}}\right| \cdot \left|\overrightarrow{n_{E_{QRS}}}\right|}$

$k \cdot \overrightarrow{n_{E_{PQS}}} = \overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PS} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{n_{E_{PQS}}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$k \cdot \overrightarrow{n_{E_{QRS}}} = \overrightarrow{QR} \times \overrightarrow{QS} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{n_{E_{QRS}}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$cos\varphi = \frac{\left|\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right|} = \frac{1}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}} = \frac{1}{5}$

$\varphi = cos^{-1}\left(\frac{1}{5}\right) = 78{,}46\,°$

$\varphi^* = 180° - 78{,}46° \approx 101{,}5\,°$

Der stumpfe Winkel benachbarter Seitenflächen ist $101{,}5\,°$ *groß.*

b) *Prozentualer Anteil der Einstiegsöffnung an der Vorderfläche:*

$A_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot (\overline{AB} + \overline{CD}) \cdot h_{ABCD}$

$\overline{AB} = 1; \quad \overline{CD} = 0{,}5; \quad h_{ABCD} = \left|\overrightarrow{FF'}\right| = \sqrt{0{,}5^2 + 1} = \sqrt{1{,}25}$

$A_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot 1{,}5 \cdot \sqrt{1{,}25} = 0{,}75 \cdot \sqrt{1{,}25}$

$A_{PQS} = \frac{1}{2} \cdot \left|\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PS}\right| = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{16 + 4} = \sqrt{5}$

$\frac{A_{ABCD}}{A_{PQS}} = \frac{0{,}75 \cdot \sqrt{1{,}25}}{\sqrt{5}} = 0{,}75 \cdot 0{,}5 = 0{,}375 = 37{,}5\,\%$

Die Einstiegsöffnung beansprucht $37{,}5\,\%$ *der Vorderfläche.*

c) *Länge der Strecke* $C'D'$*:*

C' ist Spurpunkt der Geraden durch L und C mit der x_1x_2–Koordinatenebene.
D' ist Spurpunkt der Geraden durch L und D mit der x_1x_2–Koordinatenebene.

$g_{\overline{LC}}: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1{,}75 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ -0{,}25 \\ -0{,}75 \end{pmatrix}$

$x_{3_{C'}} = 0 = 1{,}75 - 0{,}75t \implies t = \frac{7}{3}$

$C'\left(\frac{7}{6} \middle| -\frac{7}{12} \middle| 0\right)$

$g_{\overline{LD}}: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1{,}75 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 0{,}25 \\ -0{,}75 \end{pmatrix}$

$x_{3_{D'}} = 0 = 1{,}75 - 0{,}75t \implies t = \frac{7}{3}$

$D'\left(\frac{7}{6} \middle| \frac{7}{12} \middle| 0\right)$

$\overline{C'D'} = \frac{7}{6}$

Die Strecke $\overline{C'D'}$ *ist* $\frac{7}{6}\,LE$ *lang.*

Abituraufgaben Analytische Geometrie Wahlteil 2004 BW

Lösung B2.1

Lösungslogik

a) *Lage von E_3:*
Siehe Klausuraufschrieb.
Koordinaten des Punktes D_a:
Die Gerade g_a durch A hat als Richtungsvektor den Normalenvektor der Ebene E_a. Wir bilden $g_a \cap E_a$ und erhalten damit die Koordinaten des Punktes D_a.

b) *Nachweis, dass jedes Dreieck ABD_a rechtwinklig ist:*
Wir weisen nach, dass $\overrightarrow{D_aA} \circ \overrightarrow{D_aB}$ für jedes $a > 0$ stets 0 ist.

Klausuraufschrieb

a) *Lage von E_3:*
$E_3\colon\ 3x_1 - x_3 = 0$
In der Ebenengleichung fehlt die x_2–Koordinate. Folglich ist die Ebene parallel zur x_2–Achse. Da E_3 durch den Ursprung verläuft, verläuft die x_2–Achse in der Ebene.
Koordinaten des Punktes D_a:

$$g_a\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix};\ \ r \in \mathbb{R}$$

$g_a \cap E_a$
Aus g_a folgt:
$x_1 = 10 + ra; \quad x_3 = -r$
$E_a\colon\ a(10 + ra) + r = 0$
$ra^2 + r + 10a = 0$
$r(a^2 + 1) = -10a$
$r = -\frac{10a}{a^2+1}$

$$\overrightarrow{OD_a} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{10a}{a^2+1} \cdot \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 - \frac{10a^2}{a^2+1} \\ 0 \\ \frac{10a}{a^2+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{10a^2+10}{a^2+1} - \frac{10a^2}{a^2+1} \\ 0 \\ \frac{10a}{a^2+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{10}{a^2+1} \\ 0 \\ \frac{10a}{a^2+1} \end{pmatrix}$$

Der Schnittpunkt hat die Koordinaten $D_a\left(\frac{10}{a^2+1}\middle|0\middle|\frac{10a}{a^2+1}\right)$.

b) *Nachweis, dass jedes Dreieck ABD_a rechtwinklig ist:*

$$\overrightarrow{D_aA} = \begin{pmatrix} 10 - \frac{10}{a^2+1} \\ 0 \\ -\frac{10a}{a^2+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{10a^2}{a^2+1} \\ 0 \\ -\frac{10a}{a^2+1} \end{pmatrix}; \quad \overrightarrow{BD_a} = \begin{pmatrix} -\frac{10}{a^2+1} \\ 10 \\ -\frac{10a}{a^2+1} \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AD_a} \circ \overrightarrow{BD_a} = \begin{pmatrix} \frac{10a^2}{a^2+1} \\ 0 \\ -\frac{10a}{a^2+1} \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -\frac{10}{a^2+1} \\ 10 \\ -\frac{10a}{a^2+1} \end{pmatrix} = -\frac{100a^2}{(a^2+1)^2} + \frac{100a^2}{(a^2+1)^2} = 0$$

Wegen $\overrightarrow{AD_a} \circ \overrightarrow{BD_a} = 0$ für alle $a \neq 0$ ist das Dreieck ABD_a stets rechtwinklig.

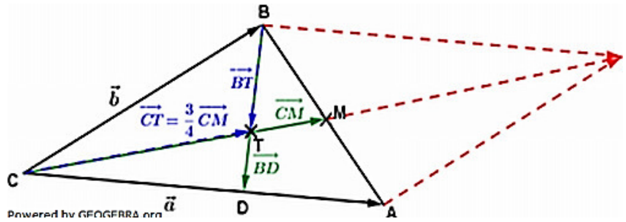
Lösung B2.2

Klausuraufschrieb

Die unabhängigen Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ spannen ein Parallelogramm auf, deshalb gilt:

$\overrightarrow{CM} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b})$ und somit

$\overrightarrow{CT} = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}) = \frac{3}{8}(\vec{a} + \vec{b})$



Wir betrachten den geschlossenen Vektorzug BTC. Es gilt:

$$\overrightarrow{BT} + \overrightarrow{TC} + \vec{b} = \vec{o}$$
$$\overrightarrow{BT} = \overrightarrow{CT} - \vec{b} = \frac{3}{8}(\vec{a} + \vec{b}) - \vec{b} = \frac{3}{8}\vec{a} - \frac{5}{8}\vec{b}$$

Wir skalieren den Vektor $\vec{a}$ mit s und betrachten den geschlossenen Vektorzug BDC. Es gilt:

$$\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DC} + \vec{b} = \vec{o}$$
$$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{CD} - \vec{b} = s \cdot \vec{a} - \vec{b}$$

Der Vektor $\overrightarrow{BT}$ ist Teilstück des Vektors $\overrightarrow{BD}$ und wir können schreiben:

$$\overrightarrow{BT} = r \cdot \overrightarrow{BD} = r \cdot \left(s \cdot \vec{a} - \vec{b}\right)$$

Durch Gleichsetzung erhalten wir:

$$\frac{3}{8}\vec{a} - \frac{5}{8}\vec{b} = r \cdot \left(s \cdot \vec{a} - \vec{b}\right) \implies$$
$$\frac{3}{8}\vec{a} - \frac{5}{8}\vec{b} - r \cdot s \cdot \vec{a} + r \cdot \vec{b} = \vec{o} \quad | \quad \text{Faktorisieren}$$
$$\vec{a}\left(\frac{3}{8} - rs\right) + \vec{b}\left(r - \frac{5}{8}\right) = \vec{o}$$

Wegen der linearen Unabhängigkeit von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ muss somit gelten:

(1) $\quad \frac{3}{8} - rs = 0$

(2) $\quad r - \frac{5}{8} = 0 \implies r = \frac{5}{8} \longrightarrow (1)$

$\frac{3}{8} - \frac{5}{8}s = 0 \implies s = \frac{3}{5}$

Da $\overrightarrow{BT} = r \cdot \overrightarrow{BD}$ ist dadurch $\overrightarrow{BT} = \frac{5}{8} \cdot \overrightarrow{BD}$ und $\overrightarrow{TD} = \frac{3}{8} \cdot \overrightarrow{BD}$.

Das Verhältnis $\frac{\overline{BT}}{\overline{TD}}$ ergibt somit $\frac{5}{3}$.