



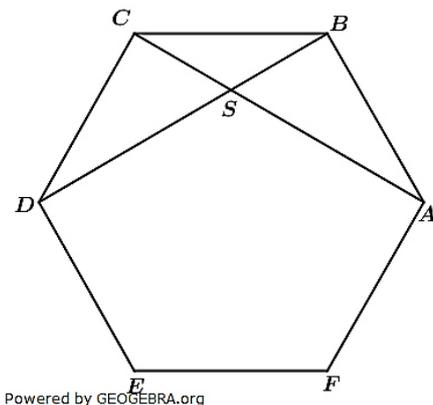
Aufgabe B1.1

Die Punkte $A(3|5|-4)$, $B(4|1|4)$ und $D(-4|9|0)$ legen eine Ebene E fest.

- a) Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung der Ebene E .
Zeigen Sie, dass das Dreieck ABD gleichschenkelig, aber nicht gleichseitig ist.
Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes C so, dass das Viereck $ABCD$ eine Raute ist.
Berechnen Sie die Koordinaten des Diagonalschnittpunkts M dieser Raute.
(Teilergebnisse: $E: 4x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 29$; $M(0|5|2)$)
- b) Gegeben ist ein weiterer Punkt $S(8|15|6)$.
Die Raute $ABCD$ bildet zusammen mit dem Punkt S eine Pyramide.
Bestimmen Sie das Volumen dieser Pyramide.
Der Pyramide wird ein Kreiskegel mit Spitze S einbeschrieben, dessen Grundfläche in der Ebene E liegt.
Berechnen Sie das Volumen dieses Kreiskegels.

Aufgabe B1.2 (nicht mehr prüfungsrelevant)

Gegeben ist das regelmäßige Sechseck $ABCDEF$.
Bestimmen Sie das Verhältnis, in dem sich die Strecken AC und BD teilen.



Aufgabe B2

In einem Freizeitpark steht eine Kletteranlage in Form eines Pyramidenstumpfes mit vier unterschiedlichen Kletterwänden.

Der Pyramidenstumpf entsteht aus einer Pyramide, indem diese parallel zur Grundfläche durchgeschnitten und der obere Teil weggelassen wird.

Der Pyramidenstumpf hat als Grundfläche das Viereck $ABCD$ mit

$$A(0|0|0), B(6|6|0), C(0|18|0) \text{ und } D(-8|4|0)$$

und als Deckfläche das Viereck $A^*B^*C^*D^*$ mit

$$A^*(4|1|20), B^*(7|4|20) \text{ und } C^*(4|10|20)$$

(Koordinatenangaben in Meter).

- a) Zeigen Sie, dass $S(8|2|40)$ die Spitze der ursprünglichen Pyramide ist.
Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes D^* .
Zeichnen Sie den Pyramidenstumpf in ein Koordinatensystem ein.
- b) Berechnen Sie den Flächeninhalt der Wand ABB^*A^* .
Untersuchen Sie, ob die Wand ABB^*A^* nach außen überhängt.

Lösung B1.1

Lösungslogik

a) *Koordinatengleichung der Ebene E:*

Wir bilden den Normalenvektor der Ebene über das Kreuzprodukt der Vektoren \vec{AB} und \vec{AD} und machen dann eine Punktprobe mit A.

Gleichschenkliges Dreieck ABD:

Für das Dreieck muss gelten, dass nur zwei der Strecken \vec{AB} , \vec{AD} bzw. \vec{BD} gleich lang sind.

Koordinaten von C für Viereck ABCD als Raute:

Über die Linearkombination $\vec{OC} = \vec{OA} + \vec{AB} + \vec{AD}$.

Koordinaten des Diagonalschnittpunktes M der Raute:

Dies ist die Streckenmitte des Vektors \vec{AC} bzw. \vec{BD}

$$\vec{OM} = \frac{1}{2}(\vec{OA} + \vec{OC}) = \frac{1}{2}(\vec{OB} + \vec{OD})$$

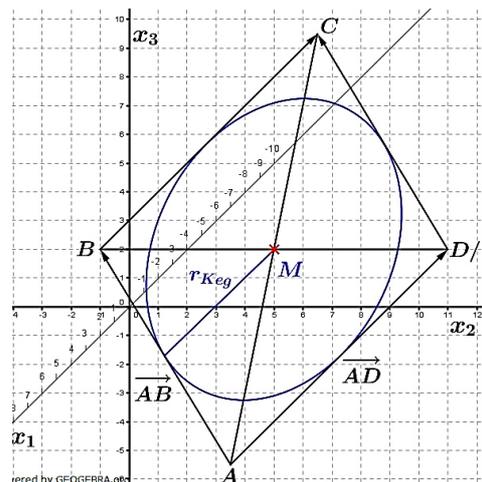
b) *Volumen der Pyramide:*

Berechnung über das Spatprodukt, siehe Klausuraufschrieb.

Volumen des eingeschriebenen Kreiskegels:

Die Situation ergibt sich aus nebenstehender Grafik. Wegen der räumlichen Darstellung, fallen der Punkt D und S in der Grafik zusammen.

Der Grundkreis des Kreiskegels liegt in der Raute. Der Radius des Kreiskegels ist der Abstand des Punktes M von z.B. der Strecke \vec{AB} . Berechnung des Volumens über $V_{Kegel} = \frac{1}{3}\pi r^2 h$



Klausuraufschrieb

a) *Koordinatengleichung der Ebene E:*

$$k \cdot \vec{n}_e = \vec{AB} \times \vec{AD} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -7 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -48 \\ -60 \\ -24 \end{pmatrix} = -12 \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{n}_e = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$E: 4x_1 + 5x_2 + 2x_3 = d$$

$$E: 4 \cdot 3 + 5 \cdot 5 + 2 \cdot (-4) = d \Rightarrow d = 29 \quad | \quad \text{Punktprobe mit A}$$

$$E: 4x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 29$$

Gleichschenkliges Dreieck ABD:

$$|\vec{AB}| = \left| \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix} \right| = 9; \quad |\vec{AD}| = \left| \begin{pmatrix} -7 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} \right| = 9; \quad |\vec{BD}| = \left| \begin{pmatrix} -8 \\ 8 \\ -4 \end{pmatrix} \right| = 12$$

Wegen $|\vec{AB}| = |\vec{AD}| \neq |\vec{BD}|$ ist das Dreieck ABD gleichschenklig und nicht gleichseitig.

Abituraufgaben Analytische Geometrie Wahlteil 2006 BW

Koordinaten von C für Viereck $ABCD$ als Raute:

$$\vec{OC} = \vec{OA} + \vec{AB} + \vec{AD} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -7 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Der Punkt C hat die Koordinaten $C(-3|5|8)$

Koordinaten des Diagonalschnittpunktes M der Raute:

$$\vec{OM} = \frac{1}{2}(\vec{OA} + \vec{OC}) = \frac{1}{2} \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Die Koordinaten des Diagonalschnittpunktes sind $M(0|5|2)$.

b) **Volumen der Pyramide:**

Das Volumen einer 4-seitigen Pyramide bestimmt sich aus dem dritten Teil des Spatproduktes aus zwei Grundseitenvektoren (\vec{AB} und \vec{AD}) und dem Seitenkantenvektor (\vec{AS}).

$$V_{Pyr} = \frac{1}{3} \cdot |(\vec{AB} \times \vec{AD}) \circ \vec{AS}|; \quad \vec{AB} \times \vec{AD} = \begin{pmatrix} -48 \\ -60 \\ -24 \end{pmatrix} \text{ (siehe Teilaufgabe a)}$$

$$V_{Pyr} = \frac{1}{3} \cdot \left| \begin{pmatrix} -48 \\ -60 \\ -24 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{3} \cdot |-240 - 600 - 240| = \frac{1}{3} \cdot 1080 = 360$$

Das Volumen der Pyramide beträgt 360 VE.

Alternativ:

In der Volumenformel einer Pyramide $V_{Pyr} = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$ ist h der senkrechte Abstand der Pyramidenspitze zur Grundfläche. Die Ebenengleichung ist in Teilaufgabe a) bereits erstellt, der Abstand von S zu E errechnet sich über die HNF.

$$h = \frac{|4 \cdot 8 + 5 \cdot 15 + 2 \cdot 6 - 29|}{\sqrt{16 + 25 + 4}} = \frac{90}{\sqrt{45}} = 2 \cdot \sqrt{45}.$$

Die Grundfläche ist gleich dem Betrag des Kreuzproduktes von

$$\vec{AB} \times \vec{AD} = \begin{pmatrix} -48 \\ -60 \\ -24 \end{pmatrix}.$$

$$G = \left| \begin{pmatrix} -48 \\ -60 \\ -24 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{(-12)^2 \cdot (4^2 + 5^2 + 2^2)} = 12 \cdot \sqrt{45}$$

Somit erhalten wir $V_{Pyr} = \frac{1}{3} \cdot 12 \cdot \sqrt{45} \cdot 2 \cdot \sqrt{45} = 8 \cdot 45 = 360$.

Es geht aber noch umständlicher:

Die Grundfläche der Pyramide ist eine Raute. Die Fläche einer Raute errechnet sich aus $A_{Raute} = \frac{1}{2} \cdot e \cdot f$ mit e und f als den Diagonallängen, also

$$A_{Raute} = \frac{1}{2} \cdot |\vec{AC}| \cdot |\vec{BD}| = \frac{1}{2} \cdot \left| \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} -8 \\ 8 \\ -4 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{180} \cdot 12 = 6 \cdot \sqrt{4 \cdot 45}$$

$$A_{Raute} = 12 \cdot \sqrt{45}.$$

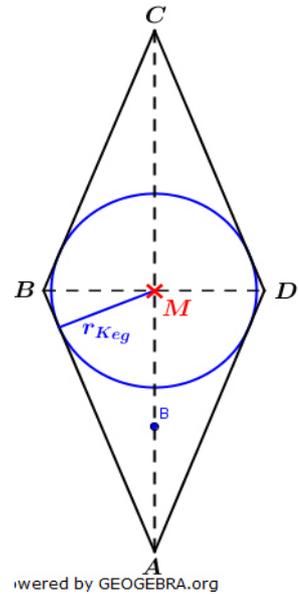
Entscheiden Sie selbst, welchen Lösungsweg Sie wählen.

Abituraufgaben Analytische Geometrie Wahlteil 2006 BW

Volumen des eingeschriebenen Kegels:

$$V_{Keg} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h$$

r ist der Radius des Grundkreises. h ist der senkrechte Abstand der Kegelspitze zum Grundkreis. Die Situation der Grundfläche ergibt sich aus nebenstehender Grafik. Der Radius des „eingeschriebenen“ Grundkreises ist der kürzeste Abstand des bereits ermittelten Schnittpunktes M der beiden Diagonalen von den Seitenkanten der Raute. Wir können r_{Keg} berechnen über den Abstand des Punktes M von der Geraden durch A und B .



$$g_{AB}: \vec{x} = \overrightarrow{OA} + r \cdot \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix}; r \in \mathbb{R}$$

Für die Abstandsberechnung führen wir hier keinesfalls die umständliche Rechenweise über eine Hilfsebene durch M mit dem Richtungsvektor von g_{AB} als Normalenvektor aus. Wir verwenden die einfache Abstandsformel eines Punktes zu einer Geraden:

$$d = \frac{|\overrightarrow{P_1 P_2} \times \overrightarrow{rv_g}|}{|\overrightarrow{rv_g}|} \quad \text{Hieraus ergibt sich:}$$

$$r_{Keg} = \frac{\left| \overrightarrow{AM} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix} \right|}{\left| \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix} \right|} = \frac{\left| \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix} \right|}{\sqrt{81}} = \frac{\left| \begin{pmatrix} 24 \\ 30 \\ 12 \end{pmatrix} \right|}{9} = \frac{\sqrt{1620}}{9} = \frac{\sqrt{81 \cdot 20}}{9} = \sqrt{20} = 2 \cdot \sqrt{5}$$

Für die Höhe h müssen wir den Abstand des Punktes S von der Ebene E über die HNF ermitteln. Dies ist zuvor unter „alternativ“ für die Pyramide bereits geschehen, wir haben $h = 2 \cdot \sqrt{45}$ festgestellt. Somit ergibt sich für das Volumen des Kegels:

$$V_{Keg} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot (2 \cdot \sqrt{5})^2 \cdot 2 \cdot \sqrt{45} = \frac{40}{3} \cdot \pi \cdot \sqrt{45} = 40\pi\sqrt{5} = 281$$

Das Volumen des eingeschriebenen Kegels beträgt 281 VE.

Lösung B1.2

Klausuraufschrieb

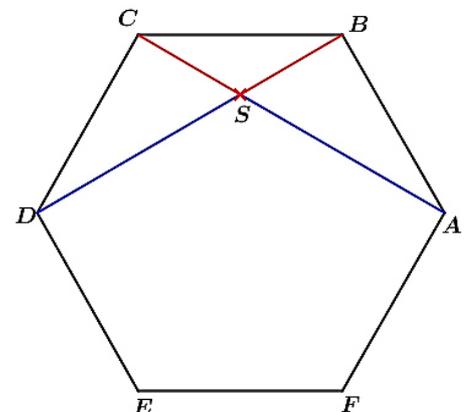
In einem regelmäßigen Sechseck sind die sechs Innendreiecke, die von den Diagonalen gebildet werden, gleichseitige Dreiecke. Somit ist z. B. die Strecke \overline{DA} doppelt so lang wie die Seite \overline{CB} .

Unter Anwendung des 2. Strahlensatzes können wir also bilden:

$$\frac{\overline{BS}}{\overline{SD}} = \frac{\overline{CS}}{\overline{SA}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AD}} = \frac{1}{2}$$

Die Strecken \overline{BC} und \overline{AD} teilen sich im Verhältnis 1:2

Die Berechnung über eine Linearkombination zweier Vektoren ist hier aufwändig und fehleranfällig und soll deshalb hier nicht näher erläutert werden.



Powered by GEOGEBRA.org

Abituraufgaben Analytische Geometrie Wahlteil 2006 BW

Lösung B2

Lösungslogik

a) Spitze S der ursprünglichen Pyramide:

Nachweis, dass S der Schnittpunkt der Geraden durch A und A^* sowie B und B^* ist.

Koordinaten von D^* :

Für D^* muss gelten, dass die x_3 -Koordinate gleich groß mit den x_3 -Koordinaten von A^* , B^* bzw. C^* , also $x_{3_{D^*}} = 20$ sein muss. Der Punkt liegt auf der Geraden durch D und S .

Zeichnung in Koordinatensystem: Siehe Grafik rechts.

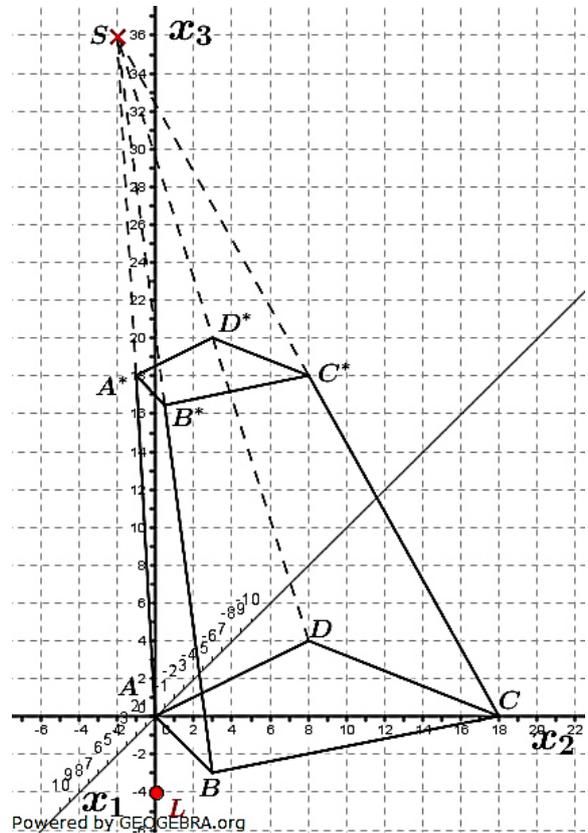
b) Flächeninhalt von ABB^*A^* :

Wir untersuchen zunächst die Form der Fläche ABB^*A^* . Es zeigt sich, dass die Fläche ein nicht gleichschenkliges Trapez ist. Die Berechnung der Fläche erfolgt dann über die Trapezformel.

Überhang der Wand ABB^*A^* nach außen:

Die Wand ABB^*A^* hängt dann über, wenn der Lotfußpunkt der zum Viereck $ABCD$ orthogonalen Geraden durch den Punkt S außerhalb des Vierecks liegt.

Die x_3 -Koordinaten der Punkte A , B , C und D sind alle gleich 0, d.h., der Normalenvektor der Ebene, in der die Grundfläche liegt ist $\vec{n}_E = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.



Klausuraufschrieb

a) Spitze S der ursprünglichen Pyramide:

$$g_{AA^*}: \vec{x} = r \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 20 \end{pmatrix}$$

$$g_{BB^*}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 20 \end{pmatrix}$$

$$g_{AA^*} \cap g_{BB^*}: r \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 20 \end{pmatrix} - s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Die Lösung des LGS mit dem GTR führt zu $r = 2$ und $s = 2$.

$$\vec{OS} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 40 \end{pmatrix}$$

Die Spitze hat die Koordinaten $S(8|2|40)$.

$$\begin{array}{l} \mathbf{B1} \\ \begin{bmatrix} 4 & -1 & 6 \\ 1 & 2 & 6 \\ 20 & -20 & 0 \end{bmatrix} \\ \hline \text{ref}(\mathbf{B1}) \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

q.e.d.

Abituraufgaben Analytische Geometrie Wahlteil 2006 BW

Koordinaten von D^* :

Dieser Punkt liegt auf der Geraden durch D und S und hat die x_3 -Koordinate 20.

$$g_{DS}: \vec{x} = \begin{pmatrix} -8 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 16 \\ -2 \\ 40 \end{pmatrix}$$

$$x_3 = 20 = 40t \Rightarrow t = 0,5$$

$$\overrightarrow{OD^*} = \begin{pmatrix} -8 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + 0,5 \cdot \begin{pmatrix} 16 \\ -2 \\ 40 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 20 \end{pmatrix}$$

Der Punkt hat die Koordinaten $D^*(0|3|20)$

b) **Flächeninhalt der Wand ABB^*A^* :**

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} = 6 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \overrightarrow{A^*B^*} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{A^*B^*}$$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{72}; \quad |\overrightarrow{A^*B^*}| = \sqrt{18}$$

$|\overrightarrow{AB}| \neq |\overrightarrow{A^*B^*}| \Rightarrow$ Das Viereck ABB^*A^* ist ein Trapez.

$$A_{\text{Trapez}} = \frac{1}{2} \cdot (|\overrightarrow{AB}| + |\overrightarrow{A^*B^*}|) \cdot h$$

Die Höhe h ist gleich dem Abstand des Punktes A^* von der Geraden durch A und B .

$$h = \frac{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AA^*}|}{|\overrightarrow{AB}|} = \frac{\left| \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 20 \end{pmatrix} \right|}{\sqrt{72}} = \frac{\left| \begin{pmatrix} 120 \\ -120 \\ -18 \end{pmatrix} \right|}{\sqrt{72}} = \frac{\sqrt{29124}}{6\sqrt{2}} = \frac{6 \cdot \sqrt{809}}{6\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{809}}{\sqrt{2}}$$

$$A_{\text{Trapez}} = \frac{1}{2} \cdot (6\sqrt{2} + 3\sqrt{2}) \cdot \frac{\sqrt{809}}{\sqrt{2}} = 4,5\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{809}}{\sqrt{2}} = 4,5 \cdot \sqrt{809} = 128$$

Die Fläche der Wand ABB^*A^* beträgt 128 m^2 .

Überhang der Wand ABB^*A^* :

Die Grundfläche liegt in der x_1x_2 -Ebene. Der Normalenvektor ist $\vec{n}_E = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Gleichung der Gerade durch S orthogonal zur Grundfläche:

$$g_{SG}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 40 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Der Lotfußpunkt ist gleich dem Spurpunkt der Geraden mit der x_1x_2 -Ebene.

$$x_3 = 0 = 40 + t \Rightarrow t = -40$$

$$\overrightarrow{OL} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 40 \end{pmatrix} - 40 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow L(8|2|0)$$

Aus der Grafik erkennen wir, dass dieser Punkt nicht innerhalb des Vierecks $ABCD$ liegt, also hängt die Wand ABB^*A^* über O .