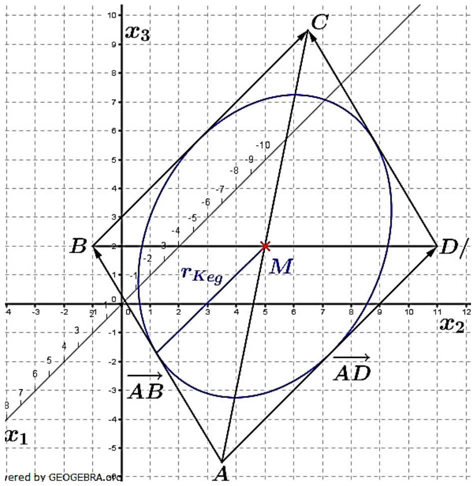
Lösung B1.1

Lösungslogik

a) *Koordinatengleichung der Ebene E:*
Wir bilden den Normalenvektor der Ebene über das Kreuzprodukt der Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AD}$ und machen dann eine Punktprobe mit A.
Gleichschenkliges Dreieck ABD:
Für das Dreieck muss gelten, dass nur zwei der Strecken $\overline{AB}$, $\overline{AD}$ bzw. $\overline{BD}$ gleich lang sind.
Koordinaten von C für Viereck $ABCD$ als Raute:
Über die Linearkombination $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.
Koordinaten des Diagonalschnittpunktes M der Raute:
Dies ist die Streckenmitte des Vektors $\overrightarrow{AC}$ bzw. $\overrightarrow{BD}$
$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}\right) = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}\right)$

b) *Volumen der Pyramide:*
Berechnung über das Spatprodukt, siehe Klausuraufschrieb.
Volumen des eingeschriebenen Kreiskegels:
Die Situation ergibt sich aus nebenstehender Grafik. Wegen der räumlichen Darstellung, fallen der Punkt D und S in der Grafik zusammen.
Der Grundkreis des Kreiskegels liegt in der Raute. Der Radius des Kreiskegels ist der Abstand des Punktes M von z.B. der Strecke $\overline{AB}$. Berechnung des Volumens über $V_{Kegel} = \frac{1}{3}\pi r^2 h$



Klausuraufschrieb

a) *Koordinatengleichung der Ebene E:*

$$k \cdot \overrightarrow{n_e} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -7 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -48 \\ -60 \\ -24 \end{pmatrix} = -12 \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{n_e} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$E\colon\ 4x_1 + 5x_2 + 2x_3 = d$
$E\colon\ 4 \cdot 3 + 5 \cdot 5 + 2 \cdot (-4) = d \Rightarrow d = 29$ | Punktprobe mit A
$E\colon\ 4x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 29$

Gleichschenkliges Dreieck ABD:

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix}\right| = 9; \quad \left|\overrightarrow{AD}\right| = \left|\begin{pmatrix} -7 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}\right| = 9; \quad \left|\overrightarrow{BD}\right| = \left|\begin{pmatrix} -8 \\ 8 \\ -4 \end{pmatrix}\right| = 12$$

Wegen $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\overrightarrow{AD}\right| \neq \left|\overrightarrow{BD}\right|$ ist das Dreieck ABD gleichschenklig und nicht gleichseitig.

Abituraufgaben Analytische Geometrie Wahlteil 2006 BW

Koordinaten von C für Viereck $ABCD$ als Raute:

$$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\begin{pmatrix}3\\5\\-4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\-4\\8\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-7\\4\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\5\\8\end{pmatrix}$$

Der Punkt C hat die Koordinaten $C(-3|5|8)$

Koordinaten des Diagonalschnittpunktes M der Raute:

$$\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}\right)=\frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix}3\\5\\-4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-3\\5\\8\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}0\\5\\2\end{pmatrix}$$

Die Koordinaten des Diagonalenschnittpunkts sind $M(0|5|2)$.

b) *Volumen der Pyramide:*

Das Volumen einer 4–seitigen Pyramide bestimmt sich aus dem dritten Teil des Spatproduktes aus zwei Grundseitenvektoren ($\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AD}$) und dem Seitenkantenvektor ($\overrightarrow{AS}$).

$$V_{Pyr}=\frac{1}{3}\cdot\left|\left(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}\right)\circ\overrightarrow{AS}\right|;\quad \overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}=\begin{pmatrix}-48\\-60\\-24\end{pmatrix}\text{ (sieheTeilaufgabe a))}$$

$$V_{Pyr}=\frac{1}{3}\cdot\left|\begin{pmatrix}-48\\-60\\-24\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}5\\10\\10\end{pmatrix}\right|=\frac{1}{3}\cdot|-240-600-240|=\frac{1}{3}\cdot 1080=360$$

Das Volumen der Pyramide beträgt $360\ VE$.

Alternativ:

In der Volumenformel einer Pyramide $V_{Pyr}=\frac{1}{3}\cdot G\cdot h$ ist h der senkrechte Abstand der Pyramidenspitze zur Grundfläche. Die Ebenengleichung ist in Teilaufgabe a) bereits erstellt, der Abstand von S zu E errechnet sich über die HNF.

$$h=\frac{|4\cdot 8+5\cdot 15+2*6-29|}{\sqrt{16+25+4}}=\frac{90}{\sqrt{45}}=2\cdot\sqrt{45}.$$

Die Grundfläche ist gleich dem Betrag des Kreuzproduktes von

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}=\begin{pmatrix}-48\\-60\\-24\end{pmatrix}.$$

$$G=\left|\begin{pmatrix}-48\\-60\\-24\end{pmatrix}\right|=\sqrt{(-12)^2\cdot(4^2+5^2+2^2)}=12\cdot\sqrt{45}$$

Somit erhalten wir $V_{Pyr}=\frac{1}{3}\cdot 12\cdot\sqrt{45}\cdot 2\cdot\sqrt{45}=8\cdot 45=360.$

Es geht aber noch umständlicher:

Die Grundfläche der Pyramide ist eine Raute. Die Fläche einer Raute errechnet sich aus $A_{Raute}=\frac{1}{2}\cdot e\cdot f$ mit e und f als den Diagonallängen, also

$$A_{Raute}=\frac{1}{2}\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|\cdot\left|\overrightarrow{BD}\right|=\frac{1}{2}\cdot\left|\begin{pmatrix}-6\\0\\12\end{pmatrix}\right|\cdot\left|\begin{pmatrix}-8\\8\\-4\end{pmatrix}\right|=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{180}\cdot 12=6\cdot\sqrt{4\cdot 45}$$

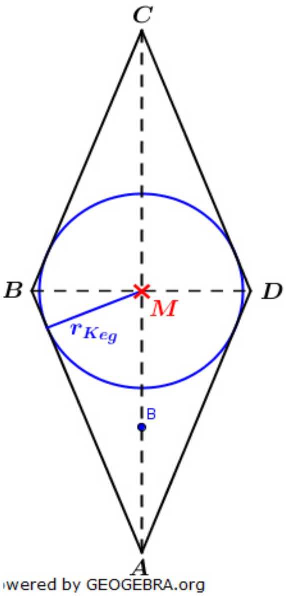
$A_{Raute}=12\cdot\sqrt{45}.$

Entscheiden Sie selbst, welchen Lösungsweg Sie wählen.

Volumen des eingeschriebenen Kegels:

$V_{Keg} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h$

r ist der Radius des Grundkreises. h ist der senkrechte Abstand der Kegelspitze zum Grundkreis. Die Situation der Grundfläche ergibt sich aus nebenstehender Grafik. Der Radius des „einbeschriebenen" Grundkreises ist der kürzeste Abstand des bereits ermittelten Schnittpunktes M der beiden Diagonalen von den Seitenkanten der Raute. Wir können r_{Keg} berechnen über den Abstand des Punktes M von der Geraden durch A und B.



g_{AB}: $\vec{x} = \overrightarrow{OA} + r \cdot \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix}$; $r \in \mathbb{R}$

Für die Abstandsberechnung führen wir hier keinesfalls die umständliche Rechenweise über eine Hilfsebene durch M mit dem Richtungsvektor von g_{AB} als Normalenvektor aus. Wir verwenden die einfache Abstandsformel eines Punktes zu einer Geraden:

$d = \frac{|\overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{rv_g}|}{|\overrightarrow{rv_g}|}$ Hieraus ergibt sich:

$$r_{Keg} = \frac{\left|\overrightarrow{AM} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix}\right|} = \frac{\left|\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix}\right|}{\sqrt{81}} = \frac{\left|\begin{pmatrix} 24 \\ 30 \\ 12 \end{pmatrix}\right|}{9} = \frac{\sqrt{1620}}{9} = \frac{\sqrt{81 \cdot 20}}{9} = \sqrt{20} = 2 \cdot \sqrt{5}$$

Für die Höhe h müssen wir den Abstand des Punktes S von der Ebene E über die HNF ermitteln. Dies ist zuvor unter „alternativ" für die Pyramide bereits geschehen, wir haben $h = 2 \cdot \sqrt{45}$ festgestellt. Somit ergibt sich für das Volumen des Kegels:

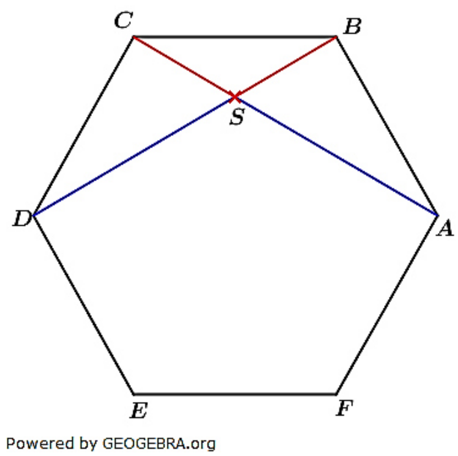
$V_{Keg} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \left(2 \cdot \sqrt{5}\right)^2 \cdot 2 \cdot \sqrt{45} = \frac{40}{3} \cdot \pi \cdot \sqrt{45} = 40\pi\sqrt{5} = 281$

Das Volumen des eingeschriebenen Kegels beträgt $281\,VE$.

Lösung B1.2

Klausuraufschrieb

In einem regelmäßigen Sechseck sind die sechs Innendreiecke, die von den Diagonalen gebildet werden, gleichseitige Dreiecke. Somit ist z. B. die Strecke $\overline{DA}$ doppelt so lang wie die Seite $\overline{CB}$.



Unter Anwendung des 2. Strahlensatzes können wir also bilden:

$\frac{\overline{BS}}{\overline{SD}} = \frac{\overline{CS}}{\overline{SA}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AD}} = \frac{1}{2}$

Die Strecken $\overline{BC}$ und $\overline{AD}$ teilen sich im Verhältnis 1:2

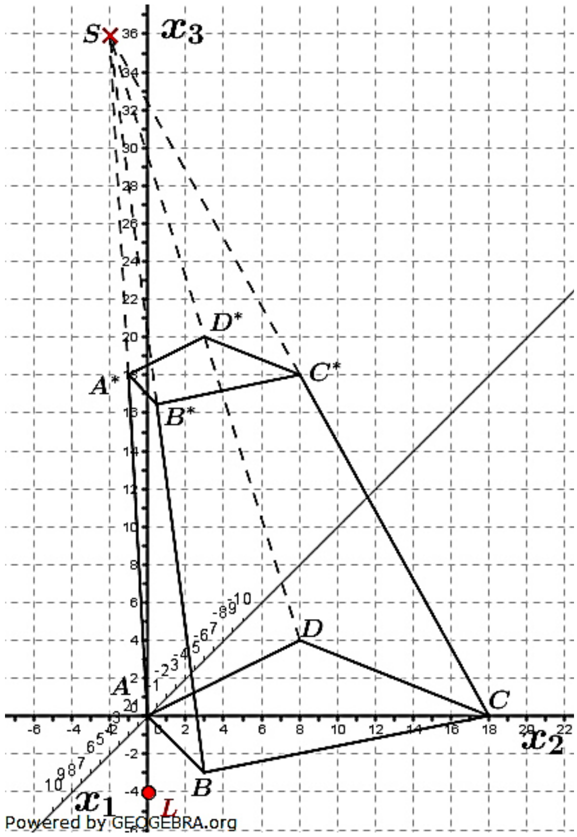
Die Berechnung über eine Linearkombination zweier Vektoren ist hier aufwändig und fehleranfällig und soll deshalb hier nicht näher erläutert werden.

Abituraufgaben Analytische Geometrie Wahlteil 2006 BW

Lösung B2

Lösungslogik

a) *Spitze S der ursprünglichen Pyramide:*
Nachweis, dass S der Schnittpunkt der Geraden durch A und A^* sowie B und B^* ist.
Koordinaten von D^*:
Für D^* muss gelten, dass die x_3–Koordinate gleich groß mit den x_3–Koordinaten von A^*, B^* bzw. C^*, also $x_{3_{D^*}} = 20$ sein muss. Der Punkt liegt auf der Geraden durch D und S.
Zeichnung in Koordinatensystem:
Siehe Grafik rechts.



b) *Flächeninhalt von ABB^*A^*:*
Wir untersuchen zunächst die Form der Fläche ABB^*A^*. Es zeigt sich, dass die Fläche ein nicht gleichschenkliges Trapez ist. Die Berechnung der Fläche erfolgt dann über die Trapezformel.
Überhang der Wand ABB^*A^* nach außen:
Die Wand ABB^*A^* hängt dann über, wenn der Lotfußpunkt der zum Viereck $ABCD$ orthogonalen Geraden durch den Punkt S außerhalb des Vierecks liegt.
Die x_3–Koordinaten der Punkte A, B, C und D sind alle gleich 0, d.h., der Normalenvektor der Ebene, in der die Grundfläche liegt ist $\overrightarrow{n_E} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Klausuraufschrieb

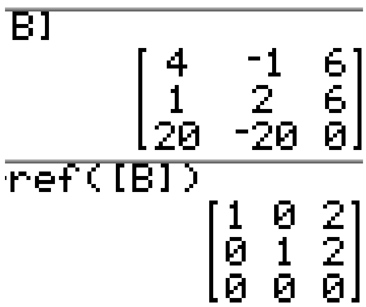
a) *Spitze S der ursprünglichen Pyramide:*

$g_{AA^*}\colon \vec{x} = r \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 20 \end{pmatrix}$

$g_{BB^*}\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 20 \end{pmatrix}$

$g_{AA^*} \cap g_{BB^*}$

$r \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 20 \end{pmatrix} - s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$



Die Lösung des LGS mit dem GTR führt zu $r = 2$ und $s = 2$.

$\overrightarrow{OS} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 40 \end{pmatrix}$

Die Spitze hat die Koordinaten $S(8|2|40)$. **q.e.d.**

Abituraufgaben Analytische Geometrie Wahlteil 2006 BW

Koordinaten von D^*:

Dieser Punkt liegt auf der Geraden durch D und S und hat die x_3–Koordinate 20.

$g_{DS}: \vec{x} = \begin{pmatrix} -8 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 16 \\ -2 \\ 40 \end{pmatrix}$

$x_3 = 20 = 40t \implies t = 0{,}5$

$\overrightarrow{OD^*} = \begin{pmatrix} -8 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + 0{,}5 \cdot \begin{pmatrix} 16 \\ -2 \\ 40 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 20 \end{pmatrix}$

Der Punkt hat die Koordinaten $D^*(0|3|20)$

b) *Flächeninhalt der Wand ABB^*A^*:*

$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} = 6 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \overrightarrow{A^*B^*} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{A^*B^*}$

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{72}; \quad |\overrightarrow{A^*B^*}| = \sqrt{18}$

$|\overrightarrow{AB}| \neq |\overrightarrow{A^*B^*}| \implies$ Das Viereck ABB^*A^* ist ein Trapez.

$A_{Trapez} = \frac{1}{2} \cdot \left(|\overrightarrow{AB}| + |\overrightarrow{A^*B^*}|\right) \cdot h$

Die Höhe h ist gleich dem Abstand des Punktes A^* von der Geraden durch A und B.

$h = \frac{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AA^*}|}{|\overrightarrow{AB}|} = \frac{\left|\begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 20 \end{pmatrix}\right|}{\sqrt{72}} = \frac{\left|\begin{pmatrix} 120 \\ -120 \\ -18 \end{pmatrix}\right|}{\sqrt{72}} = \frac{\sqrt{29124}}{6 \cdot \sqrt{2}} = \frac{6 \cdot \sqrt{809}}{6 \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{809}}{\sqrt{2}}$

$A_{Trapez} = \frac{1}{2} \cdot \left(6\sqrt{2} + 3\sqrt{2}\right) \cdot \frac{\sqrt{809}}{\sqrt{2}} = 4{,}5\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{809}}{\sqrt{2}} = 4{,}5 \cdot \sqrt{809} = 128$

Die Fläche der Wand ABB^*A^* beträgt $128\, m^2$.

Überhang der Wand ABB^*A^*:

Die Grundfläche liegt in der x_1x_2–Ebene. Der Normalenvektor ist $\overrightarrow{n_E} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Gleichung der Gerade durch S orthogonal zur Grundfläche:

$g_{SG}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 40 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Der Lotfußpunkt ist gleich dem Spurpunkt der Geraden mit der x_1x_2–Ebene.

$x_3 = 0 = 40 + t \implies t = -40$

$\overrightarrow{OL} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 40 \end{pmatrix} - 40 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \implies L(8|2|0)$

Aus der Grafik erkennen wir, dass dieser Punkt nicht innerhalb des Vierecks $ABCD$ liegt, also hängt die Wand ABB^*A^* über0.