

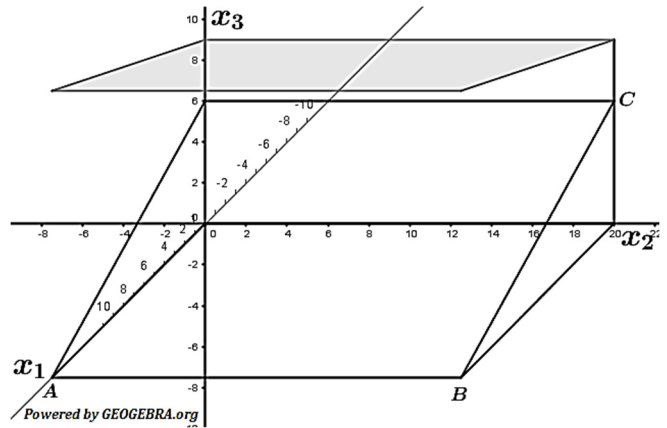


Aufgabe B1.1

In einem Koordinatensystem beschreiben die Punkte $A(15|0|0)$, $B(15|20|0)$ und $C(0|20|6)$ Eckpunkte der rechteckigen Nutzfläche einer Tribüne (alle Koordinatenangaben in Meter).

Die x_1x_2 -Ebene stellt den Erdboden dar.

Die Eckpunkte der Dachfläche liegen vertikal über den Eckpunkten der Nutzfläche. Die Dachfläche liegt in der durch $E: x_1 - 3x_3 = -27$ beschriebenen Ebene (siehe Abbildung).



- a) Bestimmen Sie die Koordinatengleichung der Ebene, in der die Nutzfläche liegt. Berechnen Sie den Neigungswinkel der Nutzfläche gegen den Erdboden. Ermitteln Sie den Inhalt der Nutzfläche.

- b) Aus Sicherheitsgründen muss die senkrecht zum Erdboden verlaufende Rückwand zwischen der Nutzfläche und der Dachfläche mindestens 2,50 m hoch sein. Überprüfen Sie, ob diese Bedingung erfüllt ist. Zur Installation von Lautsprechern wird eine 5,2 m lange, senkrecht zum Erdboden verlaufende Stütze montiert. Ihre Enden werden an der Kante \overline{BC} und am Dach der Tribüne fixiert. Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes auf der Kante \overline{BC} , in dem das untere Ende der Stütze fixiert wird.

Aufgabe B2.1

Die Punkte $A(0|-6|0)$, $B(6|0|0)$, $C(0|6|0)$ und $S(0|0|5)$ sind die Eckpunkte der Pyramide $ABCS$. Der Punkt M_1 ist der Mittelpunkt der Kante AS und M_2 ist der Mittelpunkt der Kante CS . Die Ebene E verläuft durch M_1 , M_2 und B .

- a) Die Ebene E schneidet die Pyramide in einer Schnittfläche. Stellen Sie Pyramide und Schnittfläche in einem Koordinatensystem dar. Berechnen Sie den Umfang der Schnittfläche. Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung von E .
- b) Der Punkt Q liegt auf der Kante BS und bildet mit M_1 und M_2 ein rechtwinkliges Dreieck. Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes Q .
- c) Der Punkt Z liegt in der x_1x_3 -Ebene und im Inneren der Pyramide $ABCS$. Er hat von der Grundfläche ABC , der Seitenfläche ACS und von E den gleichen Abstand. Berechnen Sie die Koordinaten von Z .

Lösung B1.1

Lösungslogik

a) *Koordinatengleichung der Ebene F:*

Wir bestimmen den Normalenvektor der Ebene über das Kreuzprodukt der Vektoren \vec{AB} und \vec{AC} . Zusammen mit dem Punkt A ergibt sich die Koordinatengleichung der Ebene E.

Winkel zwischen Nutzfläche und Boden:

Berechnung über den Schnittwinkel zwischen zwei Ebenen. Der Normalenvektor von F ist bereits errechnet, der Normalenvektor der

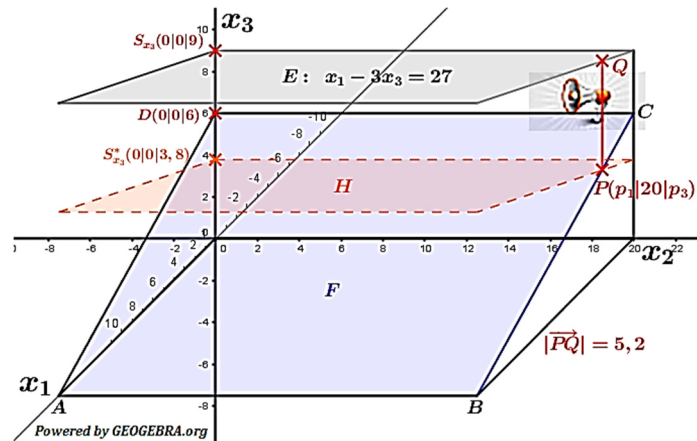
x_1x_2 -Ebene ist $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. **Achtung:** GTR-MODE muss auf **DEGREE** stehen.

b) *Prüfung des Sicherheitsabstandes:*

Aufgrund der rechteckigen Nutzfläche sind die Koordinaten des Punktes $D(0|0|6)$.

Der Punkt S ist der Spurpunkt der Ebene E mit der x_3 -Achse.

Der Abstand der Nutzfläche vom Dach entspricht der Strecke DS.



Koordinaten des Befestigungspunktes P:

Der Abstand des Punktes P und Q soll nach Aufgabenstellung 5,2 m betragen. Wir bilden eine Hilfsebene H parallel zu E, die 5,2 LE unterhalb von E liegt.

Der Schnittpunkt von H mit der Geraden g durch B und C ist dann der Verankerungspunkt P.

Abituraufgaben Analytische Geometrie Wahlteil 2016 BW

Klausuraufschrieb

a) *Koordinatengleichung der Nutzfläche F:*

$$k \cdot \vec{n}_E = \overline{AB} \times \overline{BC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 20 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -15 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 120 \\ 0 \\ 300 \end{pmatrix} = 60 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{n}_E = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

F: $2x_1 + 5x_3 = d$ | Punktprobe mit $A(15|0|0)$

F: $2 \cdot 15 + 5 \cdot 0 = d \Rightarrow d = 30$

F: $2x_1 + 5x_3 = 30$

Neigungswinkel von F gegen den Erdboden (x_1x_2 -Ebene):

$$\vec{n}_E = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \vec{n}_{x_1x_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\cos \alpha = \frac{|\vec{n}_E \cdot \vec{n}_{x_1x_2}|}{|\vec{n}_E| \cdot |\vec{n}_{x_1x_2}|} = \frac{\left| \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right|}{\left| \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right|} = \frac{|5|}{\sqrt{29}}$$

$$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{5}{\sqrt{29}}\right) = 21,8^\circ$$

F schneidet die x_1x_2 -Ebene unter einem Winkel von etwa $21,8^\circ$.

Inhalt der Nutzfläche:

$$A = |\overline{AB} \times \overline{BC}| = \left| \begin{pmatrix} 120 \\ 0 \\ 300 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{120^2 + 300^2} \approx 323,1$$

Die Nutzfläche hat einen Flächeninhalt von etwa 323 m^2 .

b) *Prüfung des Sicherheitsabstandes:*

Punkt $D(0|0|6)$

Spurpunkt von E mit der x_3 -Achse ist $S_{x_3}(0|0|9)$

Abstand Nutzfläche / Dachfläche: $d = |\overline{DS_{x_3}}| = 3$

Der Sicherheitsabstand wird eingehalten.

Koordinaten des Befestigungspunktes P:

Gerade g durch B und C :

$$g: \vec{x} = \overline{OB} + r \cdot \overline{AC} = \begin{pmatrix} 15 \\ 20 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -15 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Hilfsebene H parallel E mit $5,2 \text{ LE}$ unterhalb von E :

Spurpunkt H mit der x_3 -Achse $S_{x_3}^*(0|0|9 - 5,2)$

H: $x_1 - 3x_3 = d$ | Punktprobe mit $S_{x_3}^*(0|0|3,8)$

$-3 \cdot 3,8 = d \Rightarrow d = -11,4$

H: $x_1 - 3x_3 = -11,4$

$H \cap g$

$x_1 = 15 - 15r; x_2 = 20; x_3 = 6r$

$x_1; x_2; x_3 \rightarrow H$

$15 - 15r - 3 \cdot 6r = -11,4$

$15 - 33r = -11,4$

$33r = 26,4 \Rightarrow r = 0,8$

$$\overline{OP} = \begin{pmatrix} 15 \\ 20 \\ 0 \end{pmatrix} + 0,8 \cdot \begin{pmatrix} -15 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 20 \\ 4,8 \end{pmatrix}$$

Die Koordinaten des Verankerungspunktes sind $P(3|20|4,8)$

Abituraufgaben Analytische Geometrie Wahlteil 2016 BW

Lösung B2.1

Lösungslogik

a) *Darstellung im Koordinatensystem:*

Siehe Klausuraufschrieb

Umfang der Schnittfläche:

Der Umfang der Schnittfläche ist die Summe der Beträge der Vektoren $\overline{M_1M_2}$, $\overline{M_1B}$ und $\overline{M_2B}$. Die Koordinaten von M_1 und M_2 müssen hierzu ermittelt werden.

Koordinatengleichung von E:

Bildung des Normalenvektors von E über das Kreuzprodukt der Vektoren $\overline{M_1M_2}$ und $\overline{M_1B}$ und anschließender Punktprobe mit $B(6|0|0)$ zur Errechnung von d .

b) *Koordinaten von Q:*

Der Punkt Q liegt auf der Geraden durch B und S . Die Geradengleichung g beschreibt die Koordinaten von Q .

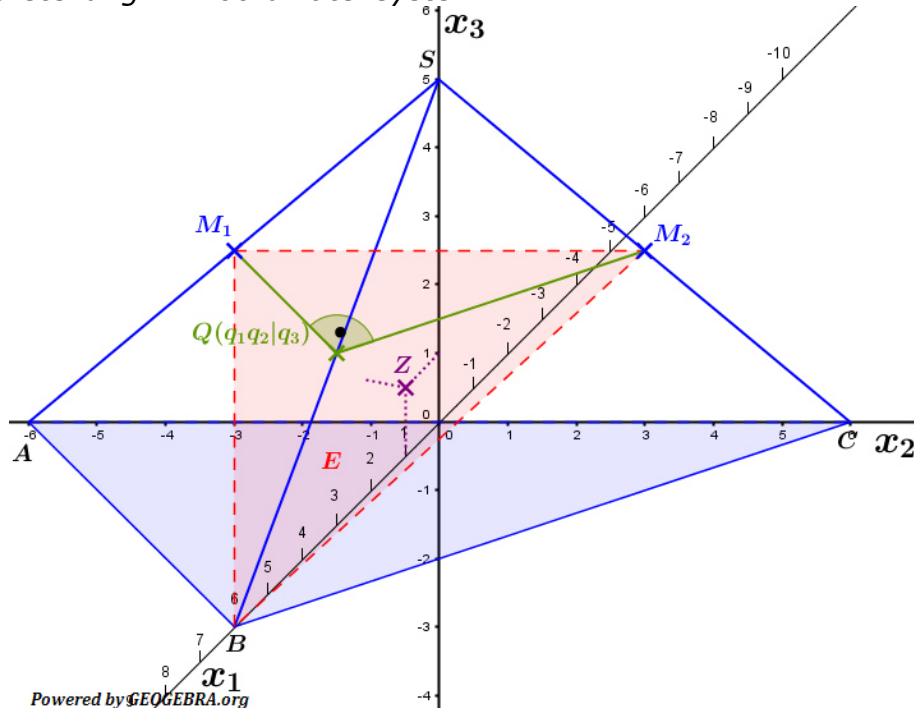
Wegen der Rechtwinkligkeit muss das Skalarprodukt der beiden Vektoren $\overline{M_1Q}$ und $\overline{M_2Q}$ gleich Null sein. Hierüber ermitteln wir den Skalar r der Geradengleichung g . Es entsteht eine quadratische Gleichung mit zwei Lösungen für r , wobei die Lösung $r > 1$ keine Lösung ist, da dann der Punkt Q oberhalb der Spitze der Pyramide zu liegen käme.

c) *Koordinaten von Z:*

Z liegt in der x_1x_3 -Ebene, also ist die x_2 -Koordinate gleich 0. Er hat von der Grundfläche ABC (gleich x_1x_2 -Ebene) den Abstand $x_3 = a$. Laut Aufgabenstellung soll dieser Abstand gleich groß sein zur Seitenfläche ACS (gleich x_2x_3 -Ebene), also $x_1 = a$. Somit gilt: $Z(a|0|a)$. Über die HNF der Ebene E ermitteln wir dann a .

Klausuraufschrieb

a) *Darstellung im Koordinatensystem:*



Abituraufgaben Analytische Geometrie Wahlteil 2016 BW

Umfang der Schnittfläche:

$$u = |\overline{M_1M_2}| + |\overline{M_1B}| + |\overline{M_2B}|$$

$$\overline{OM_1} = \frac{1}{2}(\overline{OA} + \overline{OS}) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0+0 \\ -6+0 \\ 0+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 2,5 \end{pmatrix}$$

$$\overline{OM_2} = \frac{1}{2}(\overline{OC} + \overline{OS}) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0+0 \\ 6+0 \\ 0+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2,5 \end{pmatrix}$$

$$|\overline{M_1M_2}| = 6$$

$$|\overline{M_1B}| = \sqrt{(6-0)^2 + (0-(-3))^2 + (0-2,5)^2} = \sqrt{36+9+6,25} \approx 7,16$$

$$|\overline{M_2B}| = \sqrt{(6-0)^2 + (0-3)^2 + (0-2,5)^2} = \sqrt{36+9+6,25} \approx 7,16$$

$$u = 6 + 7,16 + 7,16 = 20,32$$

Der Umfang der Schnittfläche beträgt 20,32 LE.

Koordinatengleichung von E:

$$k \cdot \vec{n}_E = \overline{M_1M_2} \times \overline{M_1B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ -2,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15 \\ 0 \\ -36 \end{pmatrix} = (-3) \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{n}_E = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix}$$

$$E: 5x_1 + 12x_3 = d$$

$$E: 5 \cdot 6 + 12 \cdot 0 = d \Rightarrow d = 30$$

$$E: 5x_1 + 12x_3 = 30$$

| Punktprobe mit B(6|0|0)

b) Koordinaten von Q:

Gerade g durch B und S:

$$g: \vec{x} = \overline{OB} + r \cdot \overline{BS} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\overline{OQ} = \begin{pmatrix} 6-6r \\ 0 \\ 5r \end{pmatrix}$$

$$\overline{M_1Q} \cdot \overline{M_2Q} = 0$$

| Wegen des rechten Winkels

$$\begin{pmatrix} 6-6r \\ 3 \\ 5r-2,5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6-6r \\ -3 \\ 5r-2,5 \end{pmatrix} = 0$$

$$(6-6r)^2 - 9 + (5r-2,5)^2 = 0$$

$$36 - 72r + 36r^2 - 9 + 25r^2 - 25r + 6,25 = 0$$

$$33,25 + 61r^2 - 97r = 0$$

$$r_1 = 0,5; \quad r_2 \approx 1,09$$

$$\overline{OQ_1} = \begin{pmatrix} 6-6 \cdot 0,5 \\ 0 \\ 5 \cdot 0,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2,5 \end{pmatrix}; \quad \overline{OQ_2} = \begin{pmatrix} 6-6 \cdot 1,09 \\ 0 \\ 5 \cdot 1,09 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,54 \\ 0 \\ 5,45 \end{pmatrix}$$

Der Punkt Q_2 gehört nicht zu Lösung, da er oberhalb der Spitze der Pyramide zu liegen käme.

Q hat die Koordinaten (3|0|2,5)

c) Koordinaten von Z:

$Z(z_1|z_2|z_3)$.

Z liegt in der x_1x_3 -Ebene, somit $z_2 = 0$.

Abstand von Z zur Seitenfläche ACS (gleich x_2x_3 -Ebene) ist $x_1 = a$.

Abstand von Z zur Grundfläche ABC (gleich x_1x_2 -Ebene) ist $x_3 = b$.

Wegen Aufgabenstellung ist $a = b$. Also hat Z die Koordinaten $(a|0|a)$.

Abituraufgaben Analytische Geometrie Wahlteil 2016 BW

Dieser Abstand a soll auch der Abstand zur Ebene E sein, Berechnung über die HNF.

$$\frac{5x_1 + 12x_3 - 30}{\sqrt{25 + 144}} = 0$$

| Punkt Z einsetzen

$$\frac{|5a + 12a - 30|}{\sqrt{169}} = a$$

$$|5a + 12a - 30| = 13a$$

$$|17a - 30| = 13a$$

$$4a - 30 = 0$$

$$a_1 = 7,5$$

$$30a - 30 = 0$$

$$a_2 = 1$$

$$Z_1(7,5|0|7,5); \quad Z_2(1|0|1)$$

Da Z_1 außerhalb der Pyramide liegt ist Z_2 der gesuchte Punkt.