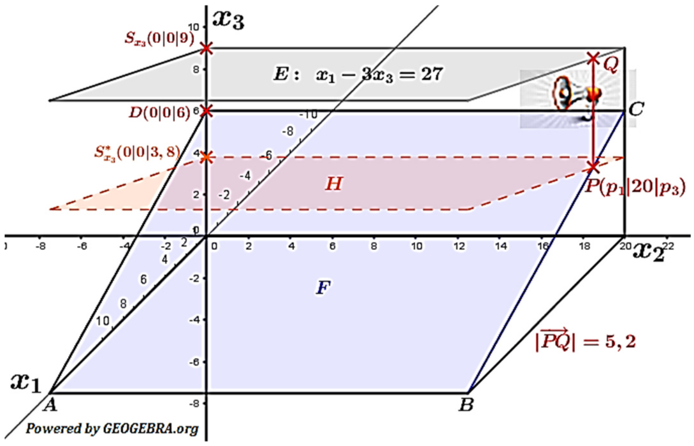
Lösung B1.1

Lösungslogik

a) *Koordinatengleichung der Ebene F:*
Wir bestimmen den Normalenvektor der Ebene über das Kreuzprodukt der Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$. Zusammen mit dem Punkt A ergibt sich die Koordinatengleichung der Ebene E.
Winkel zwischen Nutzfläche und Boden:
Berechnung über den Schnittwinkel zwischen zwei Ebenen. Der Normalenvektor von F ist bereits errechnet, der Normalenvektor der x_1x_2-Ebene ist $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. **Achtung:** GTR-MODE muss auf *DEGREE* stehen.

b) *Prüfung des Sicherheitsabstandes:*
Aufgrund der rechteckigen Nutzfläche sind die Koordinaten des Punktes $D(0|0|6)$.
Der Punkt S ist der Spurpunkt der Ebene E mit der x_3-Achse.
Der Abstand der Nutzfläche vom Dach entspricht der Strecke DS.



Koordinaten des Befestigungspunktes P:
Der Abstand des Punktes P und Q soll nach Aufgabenstellung $5{,}2\,m$ betragen. Wir bilden eine Hilfsebene H parallel zu E, die $5{,}2\,LE$ unterhalb von E liegt.
Der Schnittpunkt von H mit der Geraden g durch B und C ist dann der Verankerungspunkt P.

Abituraufgaben Analytische Geometrie Wahlteil 2016 BW

Klausuraufschrieb

a) *Koordinatengleichung der Nutzfläche F:*

$$k \cdot \overrightarrow{n_E} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 20 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -15 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 120 \\ 0 \\ 300 \end{pmatrix} = 60 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \Longrightarrow \overrightarrow{n_E} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$F\colon\ 2x_1 + 5x_3 = d$ | Punktprobe mit $A(15|0|0)$

$F\colon\ 2 \cdot 15 + 5 \cdot 0 = d \quad \Longrightarrow \quad d = 30$

$F\colon\ 2x_1 + 5x_3 = 30$

Neigungswinkel von F gegen den Erdboden (x_1x_2-Ebene):

$$\overrightarrow{n_E} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{n_{x_1x_2}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$cos\alpha = \frac{\left|\overrightarrow{n_E} \circ \overrightarrow{n_{x_1x_2}}\right|}{\left|\overrightarrow{n_E}\right| \cdot \left|\overrightarrow{n_{x_1x_2}}\right|} = \frac{\left|\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right|} = \frac{|5|}{\sqrt{29}}$$

$$\alpha = cos^{-1}\left(\frac{5}{\sqrt{29}}\right) = 21{,}8\,°$$

F schneidet die x_1x_2-Ebene unter einem Winkel von etwa $21{,}8\,°$.

Inhalt der Nutzfläche:

$$A = \left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{BC}\right| = \left|\begin{pmatrix} 120 \\ 0 \\ 300 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{120^2 + 300^2} \approx 323{,}1$$

Die Nutzfläche hat einen Flächeninhalt von etwa $323\ m^2$.

b) *Prüfung des Sicherheitsabstandes:*

Punkt $D(0|0|6)$

Spurpunkt von E mit der x_3-Achse ist $S_{x_3}(0|0|9)$

Abstand Nutzfläche / Dachfläche: $d = \left|\overrightarrow{DS_{x_3}}\right| = 3$

Der Sicherheitsabstand wird eingehalten.

Koordinaten des Befestigungspunktes P:

Gerade g durch B und C:

$$g\colon\ \vec{x} = \overrightarrow{OB} + r \cdot \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 15 \\ 20 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -15 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Hilfsebene H parallel E mit $5{,}2\ LE$ unterhalb von E:

Spurpunkt H mit der x_3-Achse $S^*_{x_3}(0|0|9 - 5{,}2)$

$H\colon\ x_1 - 3x_3 = d$ | Punktprobe mit $S^*_{x_3}(0|0|3{,}8)$

$-3 \cdot 3{,}8 = d \Longrightarrow \ d = -11{,}4$

$H\colon\ x_1 - 3x_3 = -11{,}4$

$H \cap g$

$x_1 = 15 - 15r;\ \ x_2 = 20;\ \ x_3 = 6r$

$x_1; x_2; x_3 \longrightarrow H$

$15 - 15r - 3 \cdot 6r = -11{,}4$

$15 - 33r = -11{,}4$

$33r = 26{,}4 \Longrightarrow \ r = 0{,}8$

$$\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 15 \\ 20 \\ 0 \end{pmatrix} + 0{,}8 \cdot \begin{pmatrix} -15 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 20 \\ 4{,}8 \end{pmatrix}$$

Die Koordinaten des Verankerungspunktes sind $P(3|20|4{,}8)$

Abituraufgaben Analytische Geometrie Wahlteil 2016 BW

Lösung B2.1

Lösungslogik

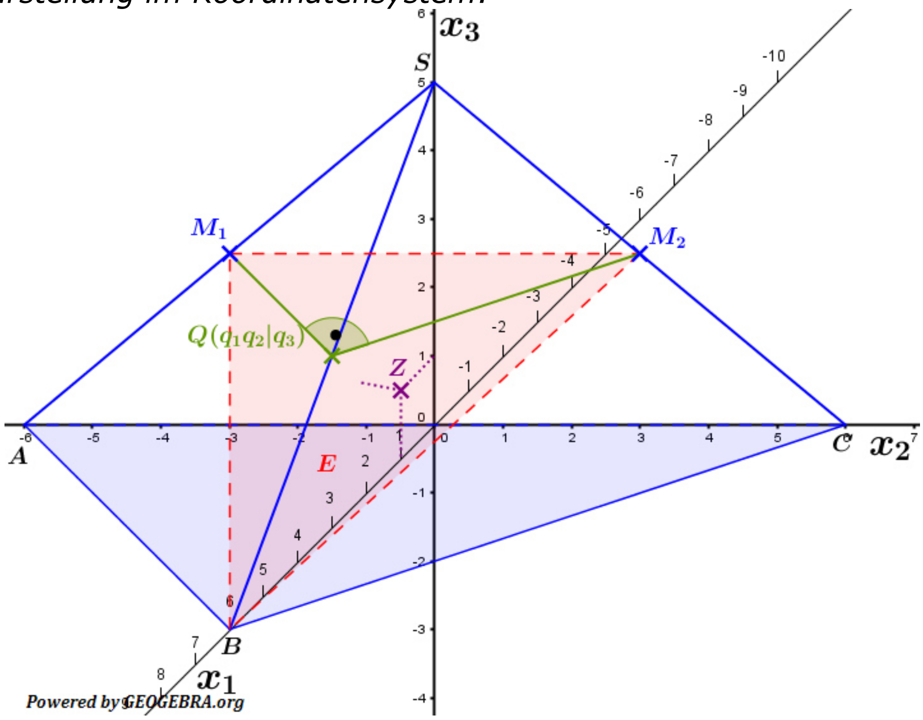
a) *Darstellung im Koordinatensystem:*
Siehe Klausuraufschrieb
Umfang der Schnittfläche:
Der Umfang der Schnittfläche ist die Summe der Beträge der Vektoren $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\overrightarrow{M_1B}$ und $\overrightarrow{M_2B}$. Die Koordinaten von M_1 und M_2 müssen hierzu ermittelt werden.
Koordinatengleichung von E:
Bildung des Normalenvektors von E über das Kreuzprodukt der Vektoren $\overrightarrow{M_1M_2}$ und $\overrightarrow{M_1B}$ und anschließender Punktprobe mit $B(6|0|0)$ zur Errechnung von d.

b) *Koordinaten von Q:*
Der Punkt Q liegt auf der Geraden durch B und S. Die Geradengleichung g beschreibt die Koordinaten von Q.
Wegen der Rechtwinkligkeit muss das Skalarprodukt der beiden Vektoren $\overrightarrow{M_1Q}$ und $\overrightarrow{M_2Q}$ gleich Null sein. Hierüber ermitteln wir den Skalar r der Geradengleichung g. Es entsteht eine quadratische Gleichung mit zwei Lösungen für r, wobei die Lösung $r > 1$ keine Lösung ist, da dann der Punkt Q oberhalb der Spitze der Pyramide zu liegen käme.

c) *Koordinaten von Z:*
Z liegt in der x_1x_3-Ebene, also ist die x_2-Koordinate gleich 0. Er hat von der Grundfläche ABC (gleich x_1x_2-Ebene) den Abstand $x_3 = a$. Laut Aufgabenstellung soll dieser Abstand gleich groß sein zur Seitenfläche ACS (gleich x_2x_3-Ebene), also $x_1 = a$. Somit gilt: $Z(a|0|a)$. Über die HNF der Ebene E ermitteln wir dann a.

Klausuraufschrieb

a) *Darstellung im Koordinatensystem:*



Abituraufgaben Analytische Geometrie Wahlteil 2016 BW

Umfang der Schnittfläche:

$u = \left|\overrightarrow{M_1M_2}\right| + \left|\overrightarrow{M_1B}\right| + \left|\overrightarrow{M_2B}\right|$

$$\overrightarrow{OM_1} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OS}\right) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0+0 \\ -6+0 \\ 0+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 2{,}5 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{OM_2} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OS}\right) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0+0 \\ 6+0 \\ 0+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2{,}5 \end{pmatrix}$$

$$\left|\overrightarrow{M_1M_2}\right| = 6$$

$$\left|\overrightarrow{M_1B}\right| = \sqrt{(6-0)^2 + (0-(-3))^2 + (0-2.5)^2} = \sqrt{36+9+6{,}25} \approx 7{,}16$$

$$\left|\overrightarrow{M_2B}\right| = \sqrt{(6-0)^2 + (0-3)^2 + (0-2.5)^2} = \sqrt{36+9+6{,}25} \approx 7{,}16$$

$u = 6 + 7{,}16 + 7{,}16 = 20{,}32$

Der Umfang der Schnittfläche beträgt $20{,}32\ LE$.

Koordinatengleichung von E*:*

$$k \cdot \overrightarrow{n_E} = \overrightarrow{M_1M_2} \times \overrightarrow{M_1B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ -2{,}5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15 \\ 0 \\ -36 \end{pmatrix} = (-3) \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{n_E} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix}$$

$E\colon\ 5x_1 + 12x_3 = d$ | Punktprobe mit $B(6|0|0)$

$E\colon\ 5 \cdot 6 + 12 \cdot 0 = d \quad \Rightarrow \quad d = 30$

$E\colon\ 5x_1 + 12x_3 = 30$

b) *Koordinaten von* Q*:*

Gerade g durch B und S:

$$g\colon\ \vec{x} = \overrightarrow{OB} + r \cdot \overrightarrow{BS} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{OQ} = \begin{pmatrix} 6-6r \\ 0 \\ 5r \end{pmatrix}$$

$\overrightarrow{M_1Q} \circ \overrightarrow{M_2Q} = 0$ | Wegen des rechten Winkels

$$\begin{pmatrix} 6-6r \\ 3 \\ 5r-2{,}5 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 6-6r \\ -3 \\ 5r-2{,}5 \end{pmatrix} = 0$$

$(6-6r)^2 - 9 + (5r-2{,}5)^2 = 0$

$36 - 72r + 36r^2 - 9 + 25r^2 - 25r + 6{,}25 = 0$

$33{,}25 + 61r^2 - 97r = 0$

$r_1 \overset{\text{GTR}}{=} 0{,}5; \quad r_2 \overset{\text{GTR}}{\approx} 1{,}09$

$$\overrightarrow{OQ_1} = \begin{pmatrix} 6-6\cdot 0{,}5 \\ 0 \\ 5 \cdot 0{,}5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2{,}5 \end{pmatrix}; \quad \overrightarrow{OQ_2} = \begin{pmatrix} 6-6\cdot 1{,}09 \\ 0 \\ 5 \cdot 1{,}09 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}54 \\ 0 \\ 5{,}45 \end{pmatrix}$$

Der Punkt Q_2 gehört nicht zu Lösung, da er oberhalb der Spitze der Pyramide zu liegen käme.

Q hat die Koordinaten $(3|0|2{,}5)$

c) *Koordinaten von* Z*:*

$Z(z_1|z_2|z_3)$.

Z liegt in der x_1x_3–Ebene, somit $z_2 = 0$.

Abstand von Z zur Seitenfläche ACS (gleich x_2x_3–Ebene) ist $x_1 = a$.

Abstand von Z zur Grundfläche ABC (gleich x_1x_2–Ebene) ist $x_3 = b$.

Wegen Aufgabenstellung ist $a = b$. Also hat Z die Koordinaten $(a|0|a)$.

Abituraufgaben Analytische Geometrie Wahlteil 2016 BW

Dieser Abstand a soll auch der Abstand zur Ebene E sein, Berechnung über die HNF.

$\frac{5x_1+12x_3-30}{\sqrt{25+144}}=0$ | Punkt Z einsetzen

$\frac{|5a+12a-30|}{\sqrt{169}}=a$

$|5a+12a-30|=13a$

$|17a-30|=13a$

$4a-30=0$

$a_1=7{,}5$

$30a-30=0$

$a_2=1$

$Z_1(7{,}5|0|7{,}5);\quad Z_2(1|0|1)$

Da Z_1 außerhalb der Pyramide liegt ist Z_2 der gesuchte Punkt.