Musteraufgabe M01

a) Beschreiben Sie, welche gegenseitige Lage eine Ebene und eine Gerade im Raum haben können und wie man diese bestimmen kann.

Gegeben sind die Gerade

$$g\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix};\ t \in \mathbb{R}$$ und die Ebene $E\colon x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 1$.

b) Zeigen Sie, dass g und E parallel sind.
Die Gerade h schneidet die Gerade g orthogonal in $P(2|0|2)$ und verläuft parallel zur Ebene E. Bestimmen Sie eine Gleichung der Geraden h.

c) Bestimmen Sie die Koordinaten eines Punktes, der von E den Abstand $3 \cdot \sqrt{21}$ hat.

d) Von allen Geraden, die in der Ebene E liegen und parallel zu g verlaufen, ist die Gerade j diejenige mit dem geringsten Abstand zur Geraden g.
Beschreiben Sie ein Verfahren, mit dem man eine Gleichung der Geraden j bestimmen kann.

Lösung M01

Lösungsvorbereitung:

a) Lage Ebene – Gerade im $R3$:
Eine Gerade verläuft parallel zu einer Ebene:
Nachweis über Skalarprodukt aus Richtungsvektor von und Normalenvektor von muss null sein.
Eine Gerade verläuft in der Ebene:
Nachweis über Skalarprodukt aus Richtungsvektor von und Normalenvektor von muss null sein und zusätzlich muss der Aufpunkt der Geraden die Ebenengleichung erfüllen.
In allen anderen Fällen schneidet eine Gerade die Ebene in einem Punkt.
Nachweis keiner der zuvor genannten Kriterien ist tritt ein.

b) $g\colon \vec{x} = \begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix};\ t \in \mathbb{R}$ und die Ebene $E\colon x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 1$.

$\overrightarrow{rv_g} = \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix};\ \overrightarrow{n_E} = \begin{pmatrix}1\\2\\-4\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{rv_g} \circ \overrightarrow{n_E} = \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}1\\2\\-4\end{pmatrix} = 2 + 2 - 4 = 0$

Prüfung, ob Aufpunkt von g die Ebenengleichung erfüllt:
$2 + 2\cdot 0 - 4\cdot 2 \overset{?}{=} 1$
$-6 \neq 1$
Die Gerade g verläuft echt parallel zur Ebene E.
Gerade h:
Der Schnittpunkt von h mit g ist gleich dem Aufpunkt von g.
Gesucht wird noch der Richtungsvektor von h. Dieser muss senkrecht sowohl auf dem Normalenvektor von E als auch auf dem Richtungsvektor von g stehen.

$k\cdot\overrightarrow{rv_h} = \overrightarrow{rv_g} \times \overrightarrow{n_E} = \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}1\\2\\-4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-6\\9\\3\end{pmatrix} = 3\cdot\begin{pmatrix}-2\\3\\1\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{rv_h} = \begin{pmatrix}-2\\3\\1\end{pmatrix}$

$h\colon \vec{x} = \begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}-2\\3\\1\end{pmatrix};\ t \in \mathbb{R}$

c) Wähle einen beliebigen Punkt der Ebene, z. B. $S(1|0|0)$. Einen Punkt S^* mit einem Abstand von $3\cdot\sqrt{21}$ von der Ebene erreichen wir mit
$\overrightarrow{OS^*} = \overrightarrow{OS} + 3\cdot\sqrt{21}\cdot\overrightarrow{n_{E_0}}$

$\overrightarrow{n_{E_0}} = \frac{\overrightarrow{n_E}}{|\overrightarrow{n_E}|} = \frac{\begin{pmatrix}1\\2\\-4\end{pmatrix}}{\sqrt{1+4+16}} = \frac{1}{\sqrt{21}}\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\-4\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{OS^*} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + 3\cdot\sqrt{21}\cdot\frac{1}{\sqrt{21}}\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\-4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}3\\6\\-12\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\6\\-12\end{pmatrix}$

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

d) Geringster Abstand heißt stets senkrechter Abstand. So muss beispielsweise der Aufpunkt von g senkrecht auf dem Aufpunkt von j stehen, wobei der Aufpunkt von j in der Ebene E liegen muss.
Q sei der Aufpunkt von g, R der Aufpunkt von j.
Wir bilden eine Gerade k durch Q mit dem Normalenvektor der Ebene $\overrightarrow{n_E}$ als Richtungsvektor.

$$k\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Wir schneiden die Gerade k mit der Ebene E und erhalten den Punkt R.

$k \cap E$

$x_1 = 2 + s; \quad x_2 = 2s; \quad x_3 = 2 - 4s$

$2 + s + 4s - 8 + 16s = 1$

$21s = 7$

$s = \frac{1}{3}$

$$\overrightarrow{OR} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Wir bilden die Geradengleichung von j aus dem Aufpunkt R und dem Richtungsvektor der Geraden g als Richtungsvektor von j.

$$j\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} \frac{7}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Lösungspräsentation
Siehe Video unter

Musteraufgabe M02

Die Punkte $A(2|1|0)$ und $B(4|0|2)$ liegen auf der Geraden g.

a) Prüfen Sie, ob der Punkt $C(0|2|-2)$ auf der Geraden g liegt.

b) Zeigen Sie, dass die Gerade g in der Ebene $E\colon\ x_1 + 2x_2 = 4$ liegt.
Ermitteln Sie die Gleichung einer weiteren Ebene, die ebenfalls die Gerade g enthält.

c) Bestimmen Sie die Koordinaten eines Punktes D, der auf der Geraden g liegt und vom Punkt A den Abstand 9 hat.

d) Beschreiben Sie ein Verfahren, mit dem man die Koordinaten eines Punktes P bestimmen kann, der mit den beiden Punkten A und B ein gleichseitiges Dreieck bildet.

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Lösung M02

Lösungsvorbereitung:

a) Gerade g durch A und B:

$$g\colon \vec{x} = \overrightarrow{OA} + t \cdot \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4-2 \\ 0-1 \\ 2-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Punktprobe mit $C(0|2|-2)$:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Aus der x_3-Koordinate folgt $t = -1$.

x_1-Koordinate: $2 - 2 = 0$

x_2-Koordinate: $1 + 1 = 2$

Der Punkt $C(0|2|-2)$ liegt auf g.

b) Prüfung, ob $g \in E$:

Zunächst Prüfung auf Parallelität:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 - 2 = 0$$

$g \parallel E$

$\overrightarrow{OA} \in E$:

$2 + 2 = 4$

$4 = 4$

g verläuft in E.

Weitere Ebene, die ebenfalls g enthält:

$F\colon x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 0$

c) $$g\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix};\ \overrightarrow{v_0} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}=|} = \frac{1}{\sqrt{4+1+4}} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} \pm \overrightarrow{v_0} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \pm 9 \cdot \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \pm 3 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{OD_1} = \begin{pmatrix} 2+6 \\ 1-3 \\ 0+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix};\ \overrightarrow{OD_2} = \begin{pmatrix} 2-6 \\ 1+3 \\ 0-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix}$$

d) Gesucht ist der Punkt C, sodass $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{BC}|$ ist.

Wir bilden den Mittelpunkt der Strecke $\overline{AB}$.

Wir bilden einen Vektor $\overrightarrow{MC}$, der senkrecht auf dem Vektor $\overrightarrow{AB}$ steht.

Weir bilden die Gerade h mit dem Mittelpunkt M als Aufpunkt und $\overrightarrow{MC}$ als Richtungsvektor.

$h\colon \vec{x} = \overrightarrow{OM} + t \cdot \overrightarrow{MC}$

Wir bestimmen den Punkt C auf h, sodass $|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{AB}| = 3$ ist.

Lösungspräsentation

Siehe Video unter

Musteraufgabe M03

a) Gegeben sind die Punkte $A(2|3|-2)$ und $B(0|1|6)$.
Bestimmen Sie die Koordinaten des Mittelpunkts der Strecke $\overline{AB}$.
A und B liegen spiegelbildlich bezüglich einer Ebene A. Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung von E.

Gegeben ist die Ebene F: $2x_1 + x_2 = 4$.

b) Skizzieren Sie die Ebene F im Koordinatensystem.
Ermitteln Sie eine Gleichung der Geraden, die sowohl in F als auch in der x_1x_2-Ebene liegt.

c) Berechnen Sie die Größe des Winkels, unter dem F die x_1x_3-Ebene schneidet.
Durch Ersetzen des Koeffizienten 2 in der Ebenengleichung von F durch eine reelle Zahl a mit $a \neq 0$ verändert sich der Schnittwinkel der Ebene mit der x_1x_3-Ebene.
Bestimmen Sie einen Wert von a_1, für den dieser Schnittwinkel $45\,°$ groß ist.
Untersuchen Sie, welche Größe dieser Schnittwinkel für $a \neq 0$ annehmen kann.

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Lösung M03

Lösungsvorbereitung:

a) Mittelpunkt M der Strecke $\overline{AB}$:

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\cdot(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}) = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix}2\\3\\-2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\1\\6\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$$

Der Mittelpunkt hat die Koordinaten $M(1|2|2)$.

Ebene E:

Der Vektor wird zum Normalenvektor der Ebene E, Der Mittelpunkt liegt in E.

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix}0-2\\1-3\\6-(-2)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\-2\\8\end{pmatrix} = -2\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\-4\end{pmatrix}$$

E: $x_1+x_2-4x_3=d$

$M \to E$:

$1+2-4\cdot 2=-5$

E: $x_1+x_2-4x_3=-5$

b) F: $2x_1+x_2=4$

Spurpunkte von F:

$S_{x_1}(2|0|0)$; $S_{x_2}(0|4|0)$; S_3 nicht existent.

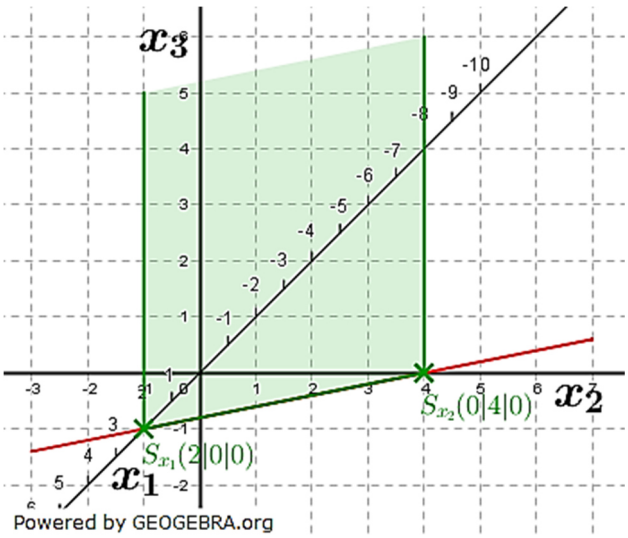
Zeichnung siehe Grafik.

Gerade g sowohl in F als auch in der x_1x_2-Ebene:

Da F senkrecht auf der x_1x_2-Ebene steht, kann diese Gerade nur die Spurgerade von F in der x_1x_2-Ebene sein.

g: $\vec{x} = \overrightarrow{OS_{x_1}} + r\cdot\overrightarrow{S_{x_2}S_{x_1}}$

$$g:\ \vec{x} = \begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}-2\\4\\0\end{pmatrix}$$



c) Schnittwinkel von F mit x_1x_3-Ebene:

$$cos(\alpha) = \frac{|\overrightarrow{n_F}\circ\overrightarrow{n_{x_1x_3}}|}{|\overrightarrow{n_F}|\cdot|\overrightarrow{n_{x_1x_3}}|} = \frac{\left|\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}\right|\cdot\left|\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right|} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$\alpha = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) = 63{,}43\,°$

F_a: $a\cdot x_1+x_2=4$

$$cos(\alpha) = \frac{|\overrightarrow{n_F}\circ\overrightarrow{n_{x_1x_3}}|}{|\overrightarrow{n_F}|\cdot|\overrightarrow{n_{x_1x_3}}|} = \frac{\left|\begin{pmatrix}a\\1\\0\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix}a\\1\\0\end{pmatrix}\right|\cdot\left|\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right|} = \frac{1}{\sqrt{a^2+1}}$$

$cos(45\,°) = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{2} = \frac{1}{\sqrt{a^2+1}}$

$\frac{1}{2} = \frac{1}{a^2+1}$ ➔ $a^2+1=2$

$a^2=1$

$a_{1,2}=\pm 1$

Für $a=1 \vee a=-1$ schneidet F die x_1x_3-Ebene unter $45\,°$.

Generelle Größe des Schnittwinkels:
$cos(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{a^2+1}}$
Der Ausdruck $\frac{1}{\sqrt{a^2+1}}$ kann nicht null werden und wegen Aufgabenstellung $a \neq 0$ auch nicht 1 werden.
Somit gilt wegen $0 < \cos(\alpha) < 1$: $0\,° < \alpha < 90°$

Lösungspräsentation
Siehe Video unter

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Musteraufgabe M04

Gegeben sind die Gerade

$$g\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix};\ t \in \mathbb{R}$$

und die Ebene

$$E\colon 2x_1 - x_3 = 6$$

a) Begründen Sie, dass sich g und E schneiden und berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunkts S von g und E.

b) Bestimmen Sie den Schnittwinkel von g und E.

c) Die Gerade g wird an der Ebene E gespiegelt. Erläutern Sie ein Verfahren, wie man die Gleichung der Spiegelgeraden g^* erhalten kann.

d) Die Gerade h ist parallel zu E und schneidet gleichzeitig die Gerade g orthogonal. Beschrieben Sie eine Verfahren, wie man die Gleichung von h bestimmen kann.

Lösung M04

Lösungsvorbereitung:

a) Begründung:
Das Skalarprodukt aus Richtungsvektor von g und Normalenvektor von E ist nicht null.
Schnittpunkt:
$g \cap E$
$x_1 = 2 + t; \quad x_3 = 2$
$E: \quad 2 \cdot (2 + t) - 2 = 6$
$4 + 2t - 2 = 6$
$t = 2$
$\overrightarrow{OS} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$
Der Schnittpunkt hat die Koordinaten $S(4|1|2)$.

b) Schnittwinkel Gerade – Ebene:
$\sin(\alpha) = \frac{\left|\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right|} = \frac{2}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}} = \frac{2}{5}$
$\alpha = arcsin\left(\frac{2}{5}\right) = 23{,}58\,°$

c) Spiegelgerade g^*:
Wähle beliebigen Punkt auf g, der nicht der Schnittpunkt ist, z. B. den Aufpunkt $P(2|-3|2)$.
Bilde Gerade h durch P mit dem Normalenvektor von E als Richtungsvektor.
Schneide h mit E und bestimme Schnittpunkt Q.
Ermittle Spiegelpunkt P^* mit $\overrightarrow{OP^*} = \overrightarrow{OP} + 2 \cdot \overrightarrow{PQ}$
Bilde g^* mit g^*: $\vec{x} = \overrightarrow{OS} + r \cdot \overrightarrow{SP^*}$

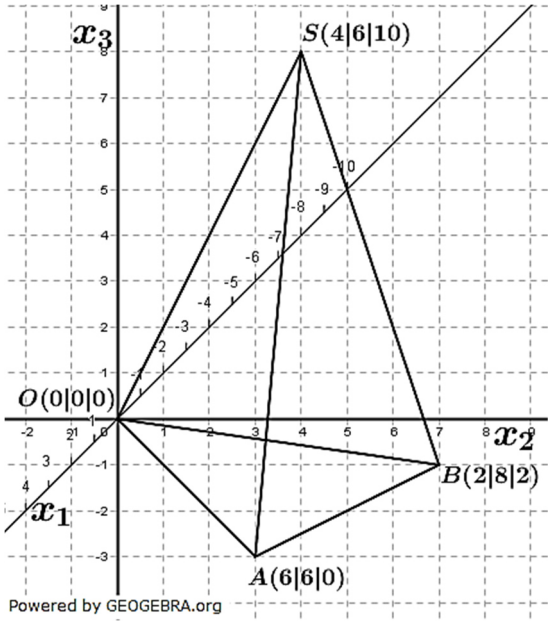
d) Gleichung einer Geraden h orthogonal zu g und E:
Der Richtungsvektor von h muss senkrecht auf dem Richtungsvektor $\overrightarrow{rv_g}$ von g und dem Normalenvektor $\overrightarrow{n_E}$ von E stehen.
Wir bilden diesen Richtungsvektor $\overrightarrow{rv_h}$ über das Kreuzprodukt
$k \cdot \overrightarrow{rv_h} = \overrightarrow{rv_g} \times \overrightarrow{n_E}$
Gerade h aufstellen durch den Aufpunkt von g und dem gerade ermittelten Richtungsvektor $\overrightarrow{rv_h}$.

Lösungspräsentation
Siehe Video unter

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Musteraufgabe M05

Die Punkte $A(6|6|0)$, $B(2|8|0)$ und $O(0|0|0)$ sind die Eckpunkte einer dreiseitigen Pyramide mit der Spitze $S(4|6|10)$. Die Ebene E enthält die Punkte A, B und S.



a) Bestimmen Sie eine Parameter-Gleichung von E und erläutern Sie Ihr vorgehen.
Zeigen Sie, dass die Ebene E die Koordinatengleichung
$E\colon\ 5x_1 + 10x_2 + x_3 = 90$ hat.

b) Prüfen Sie, ob das Dreieck ABS gleichschenklig ist.

c) Erläutern Sie, wie man das Volumen der Pyramide $OABS$ bestimmen kann.

d) Bei der Ebene E wird der x_3 –Koeffizient durch den Parameter a ersetzt und man erhält die Ebene
$E_a\colon\ 5x_1 + 10x_2 + ax_3 = 90$.
Beschrieben Sie a so, dass E und E_a orthogonal zueinander sind.

Lösung M05

Lösungsvorbereitung:

a) Parametergleichung Ebene E:

$E\colon\ \vec{x} = \overrightarrow{OA} + r \cdot \overrightarrow{AB} + s \cdot \overrightarrow{AS}$

$E\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2-6 \\ 8-6 \\ 0-0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 4-6 \\ 6-6 \\ 10-0 \end{pmatrix}$

$E\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix}$

Koordinatenform von E:

$k \cdot \overrightarrow{n_E} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AS} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 40 \\ 4 \end{pmatrix} = 4 \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{n_E} = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 1 \end{pmatrix}$

$E\colon\ 5x_1 + 10x_2 + x_3 = d$

$A \to E$:

$5 \cdot 6 + 10 \cdot 6 + 0 = d$

$d = 90$

$E\colon\ 5x_1 + 10x_2 + x_3 = 90$ **q.e.d.**

b) Dreieck ABS:

$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix};\quad |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{20}$

$\overrightarrow{AS} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix};\quad |\overrightarrow{AS}| = \sqrt{104}$

$\overrightarrow{BS} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 10 \end{pmatrix};\quad |\overrightarrow{BS}| = \sqrt{108}$

Das Dreieck ABS ist nicht gleichschenklig.

c) Volumen der Pyramide:

Das Volumen der Pyramide $OABS$ errechnet sich über:

$V_{OABS} = \frac{1}{6} \cdot \left|\left(\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}\right) \circ \overrightarrow{OS}\right|$

$V_{OABS} = \frac{1}{6} \cdot \left|\left(\begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \circ \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 10 \end{pmatrix}\right| = \frac{1}{6} \cdot \left|\begin{pmatrix} 0 \\ 12 \\ 36 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 10 \end{pmatrix}\right| = \frac{1}{6} \cdot (72 + 360) = 72\,VE$

d) $E\colon\ 5x_1 + 10x_2 + x_3 = 90$

$E_a\colon\ 5x_1 + 10x_2 + a \cdot x_3 = 90$

$E \perp E_a$ wenn $\overrightarrow{n_E} \circ \overrightarrow{n_{E_a}} = 0$

$\begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ a \end{pmatrix} = 0$

$25 + 100 + a = 0$

$a = -125$

E_{-125} ist orthogonal zu E_1.

Lösungspräsentation

Siehe Video unter

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de