

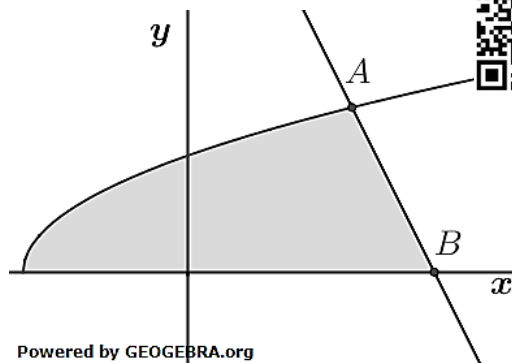
Abitur allg. bildendes Gymnasium Leistungskurs Pflichtteil 2023-1 BW



Aufgabensatz 1/23 A1

Die Abbildung zeigt den Graphen der Funktion f mit $f(x) = \sqrt{x+2}$ und die Gerade durch die Punkte $A(2|2)$ und $B(3|0)$.

- a) Geben Sie die maximale Definitionsmenge der Funktion f an.
- b) Bestimmen Sie den Inhalt der markierten Fläche.

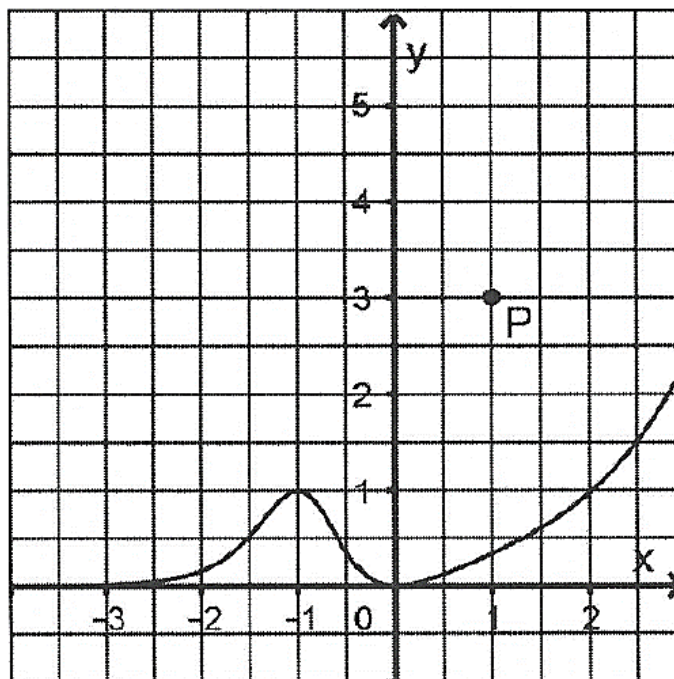


(Quelle Abitur BW 2023)

Aufgabensatz 1/23 A2

Die Abbildung in der Anlage zeigt den Graphen der in \mathbb{R} definierten Funktion f , dessen einzige Extrempunkte $A(-1|1)$ und $B(0|0)$ sind, sowie den Punkt P .

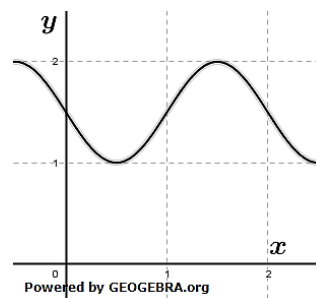
- a) Geben Sie die Koordinaten des Tiefpunkts des Graphen der in \mathbb{R} definierten Funktion g mit $g(x) = -f(x-3)$ an.
- b) Der Graph einer Stammfunktion von f verläuft durch P . Skizzieren Sie diesen Graphen in der Abbildung.



(Quelle Abitur BW 2023)

Aufgabensatz 1/23 A3

Die Abbildung zeigt den Graphen einer in \mathbb{R} definierten Funktion f .



- Beurteilen Sie die folgende Aussage:
„Für jeden Wert von x mit $0 \leq x \leq 2$ ist die Steigung des Graphen von f kleiner als 3.“
- Mit dem Term $\pi \cdot \int_0^2 f(x)^2 dx$ kann das Volumen eines Körpers berechnet werden. Begründen Sie, dass dieses Volumen größer als $\pi \cdot 0,5^2 + \pi \cdot 1,0^2$ ist.

(Quelle Abitur BW 2023)

Aufgabensatz 1/23 A4

Gegeben ist die Gerade g mit $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$; $t \in \mathbb{R}$.

- Zeigen Sie, dass g in der Ebene $E: x_1 + x_2 + x_3 = 2$ liegt.
- Gegeben ist außerdem die Schar der Geraden $h_a: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 0 \end{pmatrix}$; $s \in \mathbb{R}$
und $a \in \mathbb{R}$.
Weisen Sie nach, dass g und h_a für jeden Wert von a windschief sind.

(Quelle Abitur BW 2023)

Aufgabensatz 1/23 A5

Gegeben ist die Gerade g mit $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ und h mit $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $r, s \in \mathbb{R}$.

- Begründen Sie, dass g und h nicht identisch sind.
- Die Gerade g soll durch Spiegelung an einer Ebene auf die Gerade h abgebildet werden. Bestimmen Sie eine Gleichung einer geeigneten Ebene und erläutern Sie Ihr Vorgehen.

(Quelle Abitur BW 2023)

Aufgabensatz 1/23 A6

In einem Behälter befinden sich fünf Kugeln, auf denen jeweils eine Zahl steht. Auf drei der Kugeln steht die Zahl 2, auf zwei der Kugeln die negative Zahl a . Zweimal nacheinander wird eine Kugel zufällig entnommen und wieder zurückgelegt.

- Geben Sie im Sachzusammenhang ein Ereignis an, dessen Wahrscheinlichkeit mit dem Term $2 \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{5}$ berechnet werden kann.
- Die Zufallsgröße X gibt das Produkt der Zahlen an, die auf den beiden entnommenen Kugeln stehen. Der Erwartungswert von X ist 4. Bestimmen Sie den Wert von a .

(Quelle Abitur BW 2023)

Lösung Aufgabensatz 1/23 A1

Lösungslogik

$$f(x) = \sqrt{x+2}$$

- Für die maximale Definitionsmenge darf die Wurzel nicht kleiner als Null werden.
- Der Inhalt der markierten Fläche ergibt sich aus der Summe zweier Integrale, zum einen aus der Fläche unter f von deren Nullstelle bis zum x -Wert des Punktes A und zum anderen der Fläche unter der Geraden vom x -Wert des Punktes A bis zum x -Wert des Punktes B .

Klausuraufschrieb

a) $x + 2 \geq 0$

$$x \geq -2$$

$$\mathbb{D} = x \in \mathbb{R}; x \geq -2$$

b) $A_{ges} = \int_{-2}^2 f(x) dx + \int_2^3 g(x) dx$

$$g(x) = mx + c$$

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{0 - 2}{3 - 2} = -2$$

$$g(x) = -2x + c$$

Punktprobe mit B:

$$0 = -2 \cdot 3 + c$$

$$c = 6$$

$$g(x) = -2x + 6$$

$$\begin{aligned} \int_{-2}^2 \sqrt{x+2} dx &= \int_{-2}^2 (x+2)^{\frac{1}{2}} dx = \left[\frac{2}{3} (x+2)^{\frac{3}{2}} \right]_{-2}^2 = \left[\frac{2(x+2) \cdot \sqrt{x+2}}{3} \right]_{-2}^2 \\ &= \frac{2 \cdot 4 \cdot 2}{3} = \frac{16}{3} \text{ FE} \end{aligned}$$

$$\int_2^3 (-2x + 6) dx = [-x^2 + 6x]_2^3 = -9 + 18 - (-4 + 12) = 1$$

$$A_{ges} = \frac{16}{3} + 1 = \frac{19}{3} \text{ FE}$$

Lösung Aufgabensatz 1/23 A2

Lösungslogik

- Den Aufgabenangaben entnehmen wir, dass f zunächst an der x -Achse gespiegelt wird und dann um 2 Einheiten nach rechts verschoben wird.
- Extrempunkte der Ableitung sind Wendepunkte der Stammfunktion. Der Extrempunkt im Ursprung (Berührungspunkt mit der x -Achse) führt zu einem Sattelpunkt in der Stammfunktion.

Klausuraufschrien:

a) $g(x) = -f(x)$:

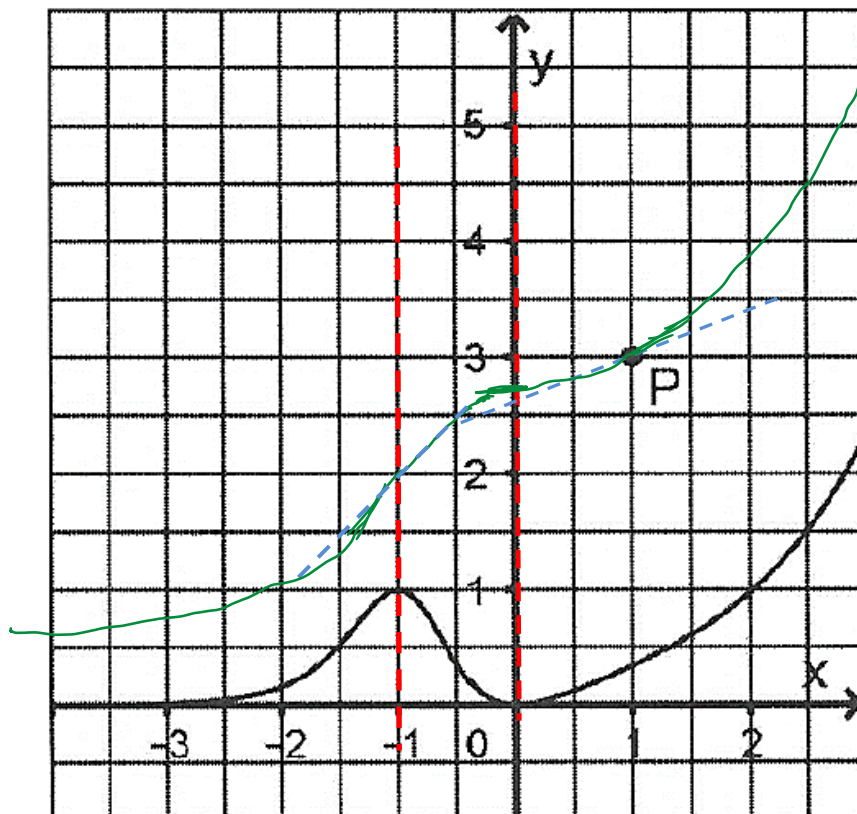
$g(x)$ ist Spiegelung von $f(x)$ an der x -Achse. Damit sind die Koordinaten des gespiegelten Punkte $P(1|-3)$

$g(x) = -f(x-3)$:

Die Spiegelung von $f(x)$ an der x -Achse wird um drei Einheiten nach rechts verschoben.

Koordinaten des gespiegelten und verschobenen Punktes nunmehr Punkte $P(3|-3)$.

b)



Lösung Aufgabensatz 1/23 A3

- a) Die Grafik zeigt eine an der x -Achse gespiegelte Kosinuskurve mit einer Amplitude von $a = 0,5$, einer Periode $p = 2$, die in y -Richtung um 1,5 Einheiten nach oben verschoben wurde.

$$f(x) = -0,5 \cos(\pi x) + 1,5$$

$$f'(x) = -\frac{1}{2\pi} \sin(\pi x) + 1,5x$$

Maximale Steigung im Wendepunkt bei $x_0 = 1$.

$$f'(1) = -\frac{1}{2\pi} \sin(\pi) + 1,5 = 0 + 1,5 = 1,5$$

Die maximale Steigung ist $f'(1) = 1,5$, die Aussage stimmt.

- b) Der Term $\pi \cdot \int_0^2 f(x)^2 dx$ gibt das Volumen des Körpers an, der entsteht, wenn das Flächenstück, das der Graph von f mit der x -Achse einschließt, um die x -Achse rotiert.

Interpretation des Terms $\pi \cdot 0,5^2 + \pi \cdot 1,0^2$:

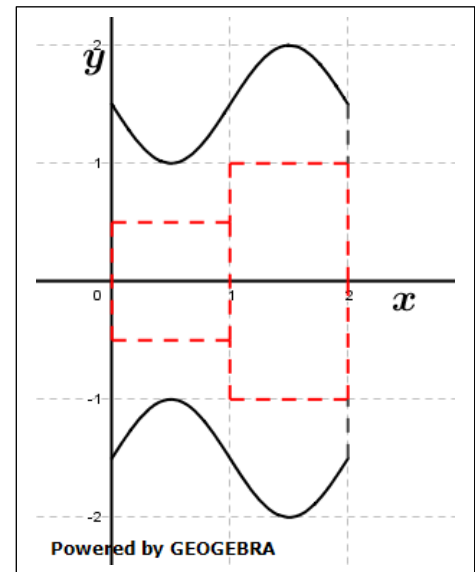
Das Volumen eines Zylinders errechnet sich aus $V_{\text{Zyl}} = \pi \cdot r^2 \cdot h_{\text{Zyl}}$.

Betrachtet man sich die Grafik, so kann man sich im Intervall $[0; 1]$ einen Zylinder vorstellen mit Radius $r = 0,5$ und $h_{\text{Zyl}} = 1$.

Somit ist $\pi \cdot 0,5^2$ das Volumen eines Zylinders mit diesen Maßen.

Betrachtet man sich die Grafik, so kann man sich im Intervall $[1; 2]$ einen Zylinder vorstellen mit Radius $r = 1$ und $h_{\text{Zyl}} = 1$. Somit ist $\pi \cdot 1,0^2$ das Volumen eines Zylinders mit diesen Maßen.

Die Summe der Volumina dieser beide Zylinder ist – wie man in der Grafik erkennen kann – kleiner als das Volumen des um die x -Achse rotierenden Graphen der Funktion f .



Lösung Aufgabensatz 1/23 A4

a) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}; t \in \mathbb{R}$

$$E: x_1 + x_2 + x_3 = 2$$

Aus der Geradengleichung folgt:

$$x_1 = t$$

$$x_2 = 1$$

$$x_3 = 1 - t$$

$$x_1; x_2; x_3 \rightarrow E$$

$$t + 1 + 1 - t = 2$$

$$2 = 2$$

Die Geraden g liegt in der Ebene E .

$$b) \quad g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}; \quad t \in \mathbb{R}$$

$$h_a: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 0 \end{pmatrix}; \quad s \in \mathbb{R}$$

$g \cap h_a$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 0 \end{pmatrix} \quad | \quad -s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad | \quad - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(1) \quad t - s = 0$$

$$(2) \quad -as = -1$$

$$(3) \quad -t = 0 \quad \rightarrow \quad t = 0$$

$$t \rightarrow (1)$$

$$(1) \quad 0 - s = 0 \quad \rightarrow \quad s = 0$$

$$s \rightarrow (2)$$

$$(2) \quad -a \cdot 0 = -1$$

$$0 = 1 \quad \rightarrow \quad \text{Widerspruch}$$

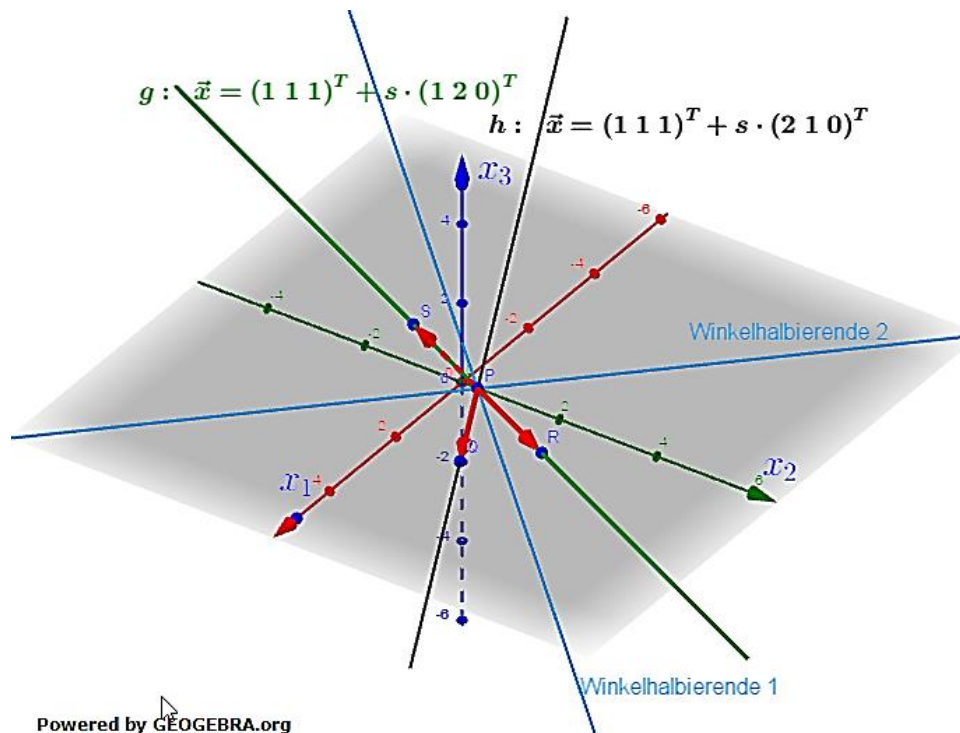
Das LGS hat für alle a keine Lösung. Die beiden Geraden sind für alle a windschief.

Lösung Aufgabensatz 1/23 A5

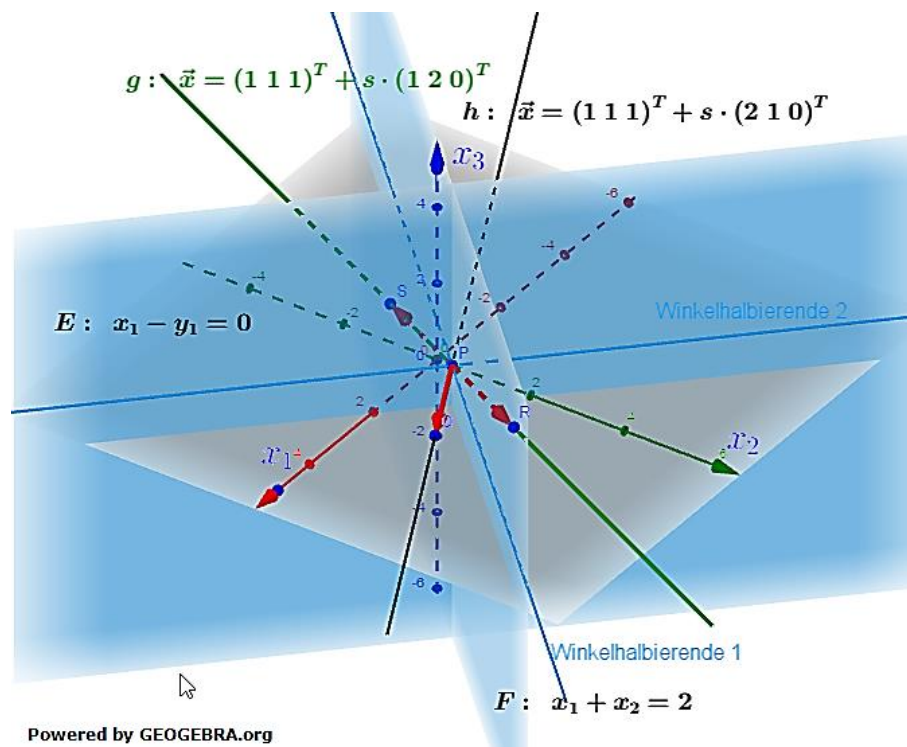
$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad r, s \in \mathbb{R}$$

- a) Die beiden Richtungsvektoren $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ sind keine Vielfachen voneinander. Deshalb sind die beiden Geraden nicht identisch.

- b) Abitur allg. bildendes Gymnasium Leistungskurs Pflichtteil 2023-1 BW
 g und h schneiden sich im Aufpunkt $P(1|1|1)$. Somit liegt dieser Punkt auch in der gesuchten Ebene.
 Die nachfolgende Grafik verdeutlicht die Situation:



Die Gerade g kann an zwei Ebenen gespiegelt werden. Die Ebenen verlaufen durch den Punkt $P(1|1|1)$ und enthalten jeweils die Gerade der Winkelhalbierenden der Richtungsvektoren von g und h .



Abitur allg. bildendes Gymnasium Leistungskurs Pflichtteil 2023-1 BW

Dabei ist der Richtungsvektor der Winkelhalbierenden 1 gleich Normalenvektor der Ebene E und der Richtungsvektor der Winkelhalbierenden 2 ist Normalenvektor von F (siehe Grafik).

Da die beiden Richtungsvektoren der Geraden g und h gleiche Länge

besitzen $\left(\left|\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{5}; \left|\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{5}\right)$, wird der Normalenvektor von E über

$$\vec{n}_E = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und der von } F \text{ über } \vec{n}_F = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ermittelt.

Bestimmung von E :

$$3x_1 + 3x_2 = d$$

Punktprobe mit $P(1|1|1)$

$$3 + 3 = d$$

$$d = 6$$

$$3x_1 + 3x_2 = 6 \quad | :3$$

$$E: x_1 + x_2 = 2$$

Bestimmung von F :

$$x_1 - x_2 = d$$

Punktprobe mit $P(1|1|1)$

$$1 * 1 = d$$

$$d = 0$$

$$F: x_1 - x_2 = 0$$

Lösung Aufgabensatz 1/23 A6

a) $P(2) = \frac{3}{5}; P(a) = \frac{2}{5}$

Ziehen mit Zurücklegen.

Das Ereignis lautet:

A: „Es wird eine Kugel mit einer „2“ und eine Kugel mit einem „a“ gezogen.“

b) Bestimmung des Ergebnisraums:

$$S = (2 \cdot 2; -2a; -a \cdot 2; a \cdot a)$$

Somit kann X die Werte $4; -2 \cdot a; -a \cdot 2; a^2$ annehmen.

Ermittlung der Wahrscheinlichkeiten

$$P(X = 4) = \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{9}{25}; P(X = 2a) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{6}{25}; P(X = a \cdot 2) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{6}{25}$$

$$P(X = a^2) = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{4}{25}$$

Berechnung von $E(X)$:

$$E(X) = 4 \cdot \frac{9}{25} + 2a \cdot \frac{6}{25} + 2a \cdot \frac{6}{25} + a^2 \cdot \frac{4}{25} = \frac{36}{25} + \frac{24}{25}a + \frac{4}{25}a^2$$

Gegeben $E(X) = 4$

$$\frac{4}{25}a^2 + \frac{24}{25}a + \frac{36}{25} = 4 \quad | -4$$

Abitur allg. bildendes Gymnasium Leistungskurs Pflichtteil 2023-1 BW

$$\frac{4}{25}a^2 + \frac{24}{25}a - \frac{64}{25} = 0 \quad | \quad \cdot \frac{25}{4}$$

$$a^2 + 6a - 16 = 0$$

$$a_{1,2} = -3 \pm \sqrt{9 + 16} = -3 \pm 5$$

$$a_1 = 2; a_2 = -8$$

Wegen Aufgabenstellung „ a ist negative Zahl“ sind die beiden Kugel mit -8 beschriftet.