Lösung Aufgabensatz 1/23 A1

Lösungslogik

$f(x) = \sqrt{x+2}$

a) Für die maximale Definitionsmenge darf die Wurzel nicht kleiner als Null werden.

b) Der Inhalt der markierten Fläche ergibt sich aus der Summe zweier Integrale, zum einen aus der Fläche unter f von deren Nullstelle bis zum x-Wert des Punktes A und zum anderen der Fläche unter der Geraden vom x-Wert des Punktes A bis zum x-Wert des Punktes B.

Klausuraufschrieb

a) $x + 2 \geq 0$
$x \geq -2$
$\mathbb{D} = \ x \in \mathbb{R};\ x \geq -2$

b) $A_{ges} = \int_{-2}^{2} f(x)dx + \int_{2}^{3} g(x)dx$
$g(x) = mx + c$
$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{0-2}{3-2} = -2$
$g(x) = -2x + c$
Punktprobe mit B:
$0 = -2 \cdot 3 + c$
$c = 6$
$g(x) = -2x + 6$
$\int_{-2}^{2} \sqrt{x+2}dx = \int_{-2}^{2} (x+2)^{\frac{1}{2}} dx = \left[\frac{2}{3}(x+2)^{\frac{3}{2}}\right]_{-2}^{2} = \left[\frac{2(x+2)\cdot\sqrt{x+2}}{3}\right]_{-2}^{2}$
$= \frac{2\cdot 4\cdot 2}{3} = \frac{16}{3}\ FE$
$\int_{2}^{3}(-2x+6)dx = [-x^2 + 6x]_2^3 = -9 + 18 - (-4 + 12) = 1$
$A_{ges} = \frac{16}{3} + 1 = \frac{19}{3}\ FE$

Lösung Aufgabensatz 1/23 A2

Lösungslogik

a) Den Aufgabenangaben entnehmen wir, dass f zunächst an der x-Achse gespiegelt wird und dann um 2 Einheiten nach rechts verschoben wird.

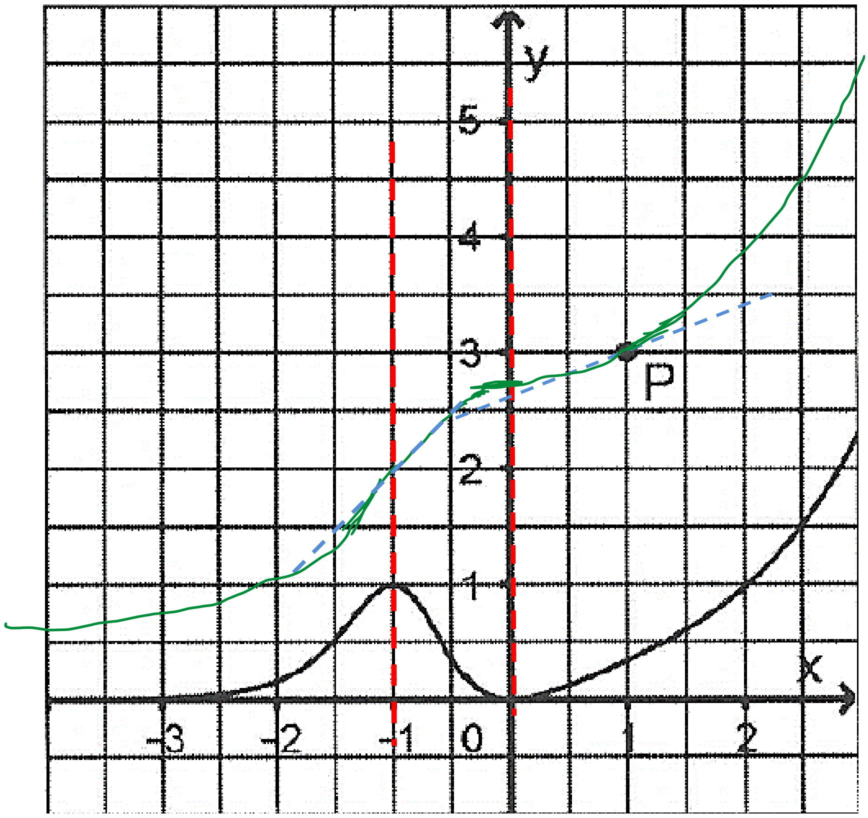
b) Extrempunkte der Ableitung sind Wendepunkte der Stammfunktion. Der Extrempunkt im Ursprung (Berührpunkt mit der x-Achse) führt zu einem Sattelpunkt in der Stammfunktion.

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Klausuraufschrien:

a) $g(x) = -f(x)$:
$g(x)$ ist Spiegelung von $f(x)$ an der x-Achse. Damit sind die Koordinaten des gespiegelten Punkte $P(1|-3)$
$g(x) = -f(x-3)$:
Die Spiegelung von $f(x)$ an der x-Achse wird um drei Einheiten nach rechts verschoben.
Koordinaten des gespiegelten und verschobenen Punktes nunmehr Punkte $P(3|-3)$.

b)



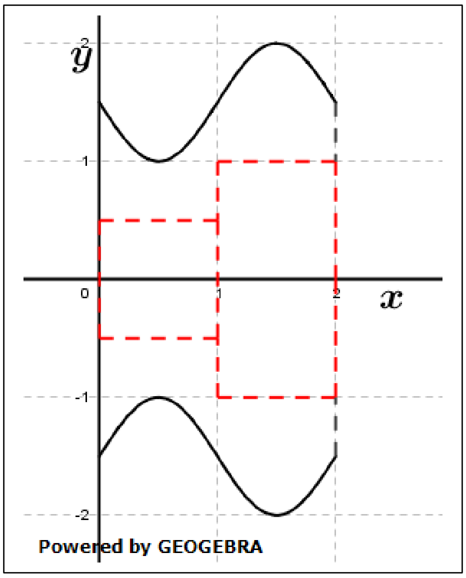
© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Abitur allg. bildendes Gymnasium Leistungskurs Pflichtteil 2023-1 BW

Lösung Aufgabensatz 1/23 A3

a) Die Grafik zeigt eine an der x-Achse gespiegelte Kosinuskurve mit einer Amplitude von $a = 0{,}5$, einer Periode $p = 2$, die in y-Richtung um $1{,}5$ Einheiten nach oben verschoben wurde.
$f(x) = -0{,}5\cos(\pi x) + 1{,}5$
$f'(x) = -\frac{1}{2\pi}\sin(\pi x) + 1{,}5x$
Maximale Steigung im Wendepunkt bei $x_0 = 1$.
$f'(1) = -\frac{1}{2\pi}\sin(\pi) + 1{,}5 = 0 + 1{,}5 = 1{,}5$
Die maximale Steigung ist $f'(1) = 1{,}5$, die Aussage stimmt.

b) Der Term $\pi \cdot \int_0^2 f(x)^2\,dx$ gibt das Volumen des Körpers an, der entsteht, wenn das Flächenstück, das der Graph von f mit der x-Achse einschließt, um die x-Achse rotiert.



<u>Interpretation des Terms $\pi \cdot 0{,}5^2 + \pi \cdot 1{,}0^2$:</u>
Das Volumen eines Zylinders errechnet sich aus $V_{Zyl} = \pi \cdot r^2 \cdot h_{zyl}$.
Betrachtet man sich die Grafik, so kann man sich im Intervall $[0; 1]$ einen Zylinder vorstellen mit Radius $r = 0{,}5$ und $h_{zyl} = 1$.
Somit ist $\pi \cdot 0{,}5^2$ das Volumen eines Zylinders mit diesen Maßen.
Betrachtet man sich die Grafik, so kann man sich im Intervall $[1; 2]$ einen Zylinder vorstellen mit Radius $r = 1$ und $h_{zyl} = 1$. Somit ist $\pi \cdot 1{,}0^2$ das Volumen eines Zylinders mit diesen Maßen.
Die Summe der Volumina dieser beide Zylinder ist – wie man in der Grafik erkennen kann – kleiner als das Volumen des um die x-Achse rotierenden Graphen der Funktion f.

Lösung Aufgabensatz 1/23 A4

a) $g\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix};\ t \in \mathbb{R}$
$E\colon x_1 + x_2 + x_3 = 2$
Aus der Geradengleichung folgt:
$x_1 = t$
$x_2 = 1$
$x_3 = 1 - t$
$x_1; x_2; x_3 \to E$
$t + 1 + 1 - t = 2$
$2 = 2$
Die Geraden g liegt in der Ebene E.

b) $g\colon \vec{x} = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix};\ t \in \mathbb{R}$

$h_a\colon \vec{x} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}1\\a\\0\end{pmatrix};\ s \in \mathbb{R}$

$g \cap h_a$

$\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}1\\a\\0\end{pmatrix} \quad | \quad -s \cdot \begin{pmatrix}1\\a\\0\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} - s \cdot \begin{pmatrix}1\\a\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \quad | \quad -\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$

$t \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} - s \cdot \begin{pmatrix}1\\a\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix}$

(1) $t - s = 0$
(2) $-as = -1$
(3) $-t = 0 \quad ➔ \quad t = 0$
$t \to (1)$
(1) $0 - s = 0 \quad ➔ \quad s = 0$
$s \to (2)$
(2) $-a \cdot 0 = -1$
$0 = 1 \quad ➔$ Widerspruch

Das LGS hat für alle a keine Lösung. Die beiden Geraden sind für alle a windschief.

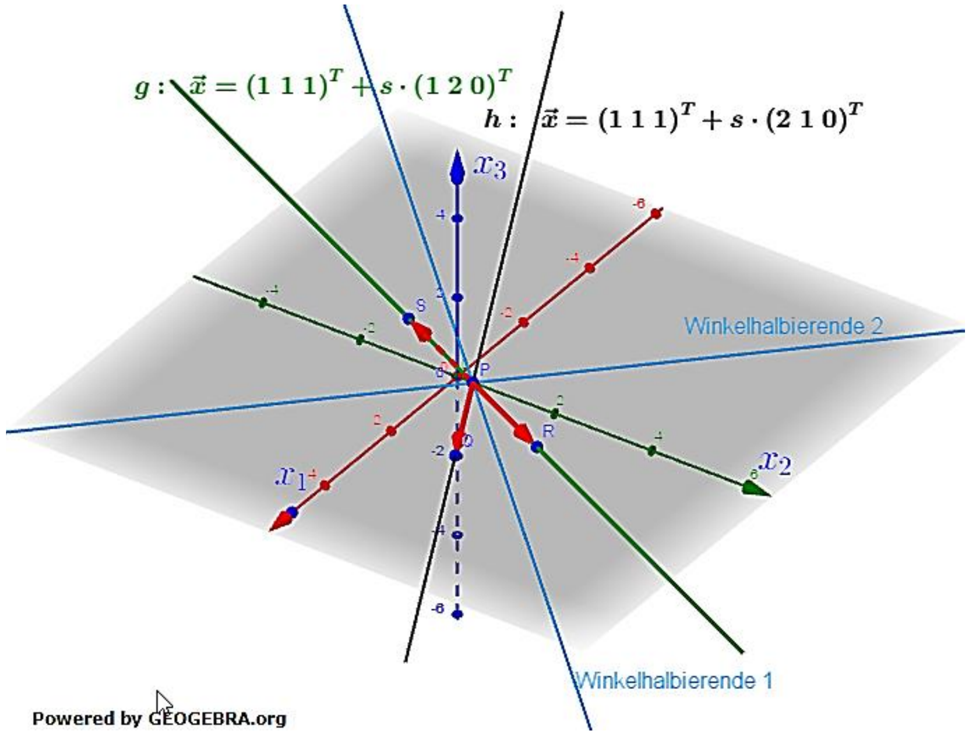
Lösung Aufgabensatz 1/23 A5

$g\colon \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix};\quad h\colon \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix};\ r; s \in \mathbb{R}$

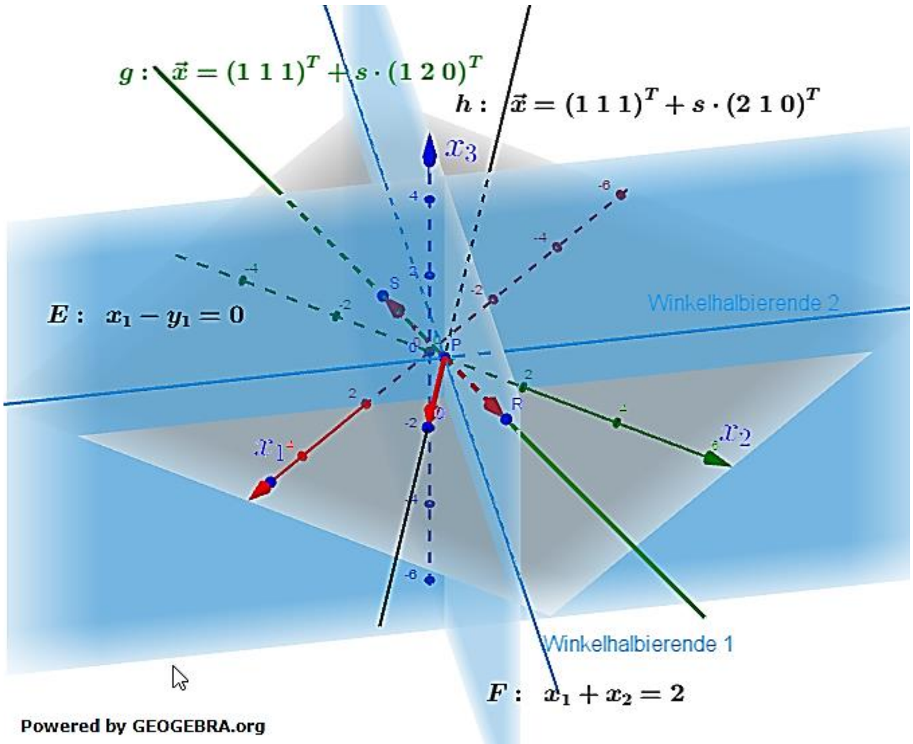
a) Die beiden Richtungsvektoren $\vec{u} = \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$ und $\vec{v} = \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$ sind keine Vielfachen voneinander. Deshalb sind die beiden Geraden nicht identisch.

Abitur allg. bildendes Gymnasium Leistungskurs Pflichtteil 2023-1 BW

b) g und h schneiden sich im Aufpunkt $P(1|1|1)$. Somit liegt dieser Punkt auch in der gesuchten Ebene.
Die nachfolgende Grafik verdeutlicht die Situation:



Die Gerade g kann an zwei Ebenen gespiegelt werden. Die Ebenen verlaufen durch den Punkt $P(1|1|1)$ end enthalten jeweils die Gerade der Winkelhalbierenden der Richtungsvektoren von g und h.



Dabei ist der Richtungsvektor der Winkelhalbierenden 1 gleich Normalenvektor der Ebene E und der Richtungsvektor der Winkelhalbierenden 2 ist Normalenvektor von F (siehe Grafik).

Da die beiden Richtungsvektoren der Geraden g und h gleiche Länge besitzen $\left(\left|\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}\right| = \sqrt{5};\ \left|\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}\right| = \sqrt{5}\right)$, wird der Normalenvektor von E über $\overrightarrow{n_E} = \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\3\\0\end{pmatrix}$ und der von F über $\overrightarrow{n_F} = \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$ ermittelt.

Bestimmung von E:

$3x_1 + 3x_2 = d$

Punktprobe mit $P(1|1|1)$

$3 + 3 = d$

$d = 6$

$3x_1 + 3x_2 = 6 \qquad | \quad :3$

$E\colon\ x_1 + x_2 = 2$

Bestimmung von F:

$x_1 - x_2 = d$

Punktprobe mit $P(1|1|1)$

$1 * 1 = d$

$d = 0$

$F\colon\ x_1 - x_2 = 0$

Lösung Aufgabensatz 1/23 A6

a) $P(2) = \frac{3}{5};\quad P(a) = \frac{2}{5}$

Ziehen mit Zurücklegen.

Das Ereignis lautet:

A: „Es wird eine Kugel mit einer „2“ und eine Kugel mit einem „a“ gezogen.“

b) Bestimmung des Ergebnisraums:

$S = (2 \cdot 2; -2a; -a \cdot 2; a \cdot a)$

Somit kann X die Werte $4; -2 \cdot a; -a \cdot 2; a^2$ annehmen.

Ermittlung der Wahrscheinlichkeiten

$P(X = 4) = \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{9}{25};\ P(X = 2a) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{6}{25};\ P(X = a \cdot 2) = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{6}{25}$

$P(X = a^2) = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{4}{25}$

Berechnung von $E(X)$:

$E(X) = 4 \cdot \frac{9}{25} + 2a \cdot \frac{6}{25} + 2a \cdot \frac{6}{25} + a^2 \cdot \frac{4}{25} = \frac{36}{25} + \frac{24}{25}a + \frac{4}{25}a^2$

Gegeben $E(X) = 4$

$\frac{4}{25}a^2 + \frac{24}{25}a + \frac{36}{25} = 4 \qquad | \quad -4$

$\frac{4}{25}a^2 + \frac{24}{25}a - \frac{64}{25} = 0 \qquad | \quad \cdot \frac{25}{4}$
$a^2 + 6a - 16 = 0$
$a_{1,2} = -3 \pm \sqrt{9+16} = -3 \pm 5$
$a_1 = 2;\ \ a_2 = -8$
Wegen Aufgabenstellung „a ist negative Zahl" sind die beiden Kugel mit -8 beschriftet.