Abitur allg. Gymnasium Leistungskurs Wahlteil Analysis 2021 BW

Lösungslogik A1.1

a) *Tiefster Punkt der Profillinie:*
Wir bilden die erste Ableitung, setzen diese auf Null und lösen nach x auf.

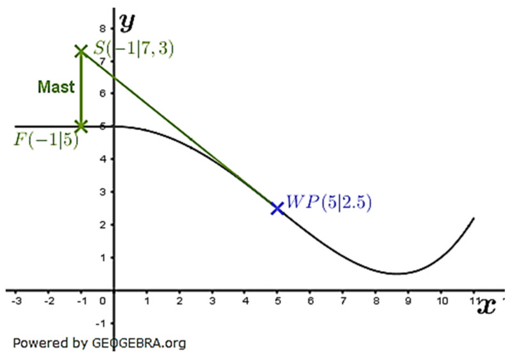
Nachweis des steilsten Hangs in $x = 5$ mit $80\,\%$ Gefälle:
Stärkste Zu- und Abnahme findet in den Wendepunkten statt. Wir bilden die erste Ableitung, setzen diese auf Null und lösen nach x auf.
Wir weisen nach, dass die Steigung $f'(5) = 0{,}8$ ist.

Nachweis des knickfreien Übergangs zwischen Hochfläche und Hang:
Diese Übergang liegt bei $x = 0$. Dort muss die Funktion f einen Hochpunkt $HP(0|5)$ aufweisen.

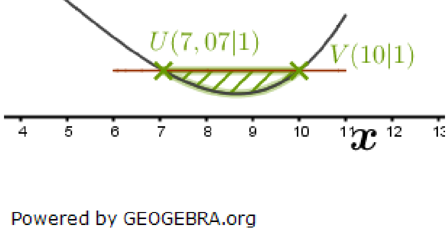
b) *Längenberechnung eines Seils:*
Wir berechnen die Länge der Strecke zwischen P und Q mit dem Satz des Pythagoras.

Verfahrensbeschreibung der Berechnung der maximalen vertikale Höhe des Seils über dem Gelände:
Siehe Klausuraufschrieb.

c) *Berechnen der Mindestlänge eines Lichtmasts:*
Das gesamte Gelände wird dann ausgeleuchtet, wenn der „Lichtstrahl" quasi Tangente an f im Wendepunkt WP ist.
Wir bilden die Funktionsgleichung der Wendetangente und Berechnen die y-Koordinate für $x = -1$.



d) *Berechnung des Volumens für eine Aufschüttung:*
Die Abflachung erfolgt in einer Höhe von $1\,m$. Wir benötigen die beiden Schnittpunkte der parallelen zur x-Achse mit $y = 1$ und der Funktion f. Dies sind dann die untere und obere Grenze für die Integralbildung zur Berechnung der Fläche. Diese Fläche muss dann noch mit 5 multipliziert werden, um das Volumen für die Aufschüttung zu erhalten.



Abitur allg. Gymnasium Leistungskurs Wahlteil Analysis 2021 BW

Klausuraufschrieb A1.1

a) *Tiefster Punkt der Profillinie:*

$f'(x) = 0{,}0032x^3 - 0{,}24x$

$0{,}0032x^3 - 0{,}24x = 0$

$x(0{,}0032x^2 - 0{,}24) = 0 \quad |$ Satz vom Nullprodukt

$x_1 = 0$

$0{,}0032x^2 - 0{,}24 = 0$

$0{,}0032x^2 = 0{,}24 \quad | \quad :0{,}0032$

$x^2 = 75 \quad | \quad \sqrt{}$

$x_2 = -5 \cdot \sqrt{3}; \quad x_3 = 5 \cdot \sqrt{3}$

Aus der gegebenen Grafik kann geschlossen werden, dass der gesuchte Tiefpunkt bei $x_3 = 5 \cdot \sqrt{3}$ liegt.

$f(5 \cdot \sqrt{3}) = 0{,}0008 \cdot 5625 - 0{,}12 \cdot 75 + 5 = 0{,}5$

Der tiefste Punkt der Profillinie hat die Koordinaten $TP(5 \cdot \sqrt{3}|0{,}5)$.

Nachweis des steilsten Hangs in $x = 5$ mit $80\,\%$ Gefälle.

$f''(x) = 0{,}0096x^2 - 0{,}24$

$0{,}0096x^2 - 0{,}24 = 0$

$0{,}0096x^2 = 0{,}24 \quad | \quad 0{,}0096$

$x^2 = 25$

$x_1 = -5; \quad x_2 = 5$

Aus der gegebenen Grafik kann geschlossen werden, dass der gesuchte Wendepunkt bei $x_2 = 5$ liegt.

$f'(5) = 0{,}0032 \cdot 125 - 0{,}24 \cdot 5 = -0{,}8 = -80{,}0\,\%$

Das steilste Gefällt des Hangs beträgt $80{,}0\,\%$ und legt bei $x = 5$.

Nachweis des knickfreien Übergangs zwischen Hochfläche und Hang:

$f'(0) = 0{,}0032 \cdot 0^3 - 0{,}24 \cdot 0 = 0$

$f(0) = 5$

f hat einen Hochpunkt in $HP(0|5)$, der Übergang ist knickfrei.

b) *Längenberechnung eines Seils:*

$f(5) = 0{,}0008 \cdot 625 - 0{,}12 \cdot 25 + 5 = 2{,}5$

$f(10) = 0{,}0008 \cdot 10000 - 0{,}12 \cdot 100 + 5 = 1$

$P(5|2{,}5); \quad Q(10|1)$

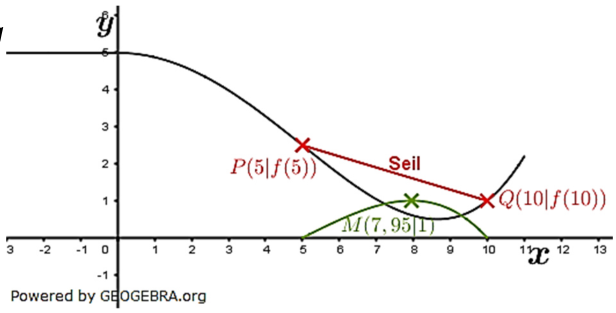
Länge der Strecke PQ mit dem Satz des Pythagoras:

$d(P;Q) = \sqrt{(10-5)^2 + (2{,}5-1)^2} = \sqrt{25 + 2{,}25} \approx 5{,}2$

Das Seil ist etwa $5{,}2\,m$ lang.

Verfahrensbeschreibung der Berechnung der maximalen vertikale Höhe des Seils über dem Gelände:

Wir bilden eine Geradengleichung g durch die Punkte P und Q. Wir bilden die Differenzkurve $d(x) = g(x) - f(x)$, und ermitteln den Hochpunkt x_{HP} von d. Der Wert von $d(x_{HP})$ ist die maximale Höhe des Seils über dem Gelände.



c) *Berechnen der Mindestlänge eines Lichtmasts:*
Funktionsgleichung der Wendetangente:
$t(x) = f'(x_{WP}) \cdot (x - x_{WP}) + f(x_{WP})$
$t(x) = -0{,}8 \cdot (x - 5) + 2{,}5 = -0{,}8x + 6{,}5$
$t(-1) = 0{,}8 + 6{,}5 = t(x) = 7{,}3$
Mindesthöhe des Mastes:
$h = y_S - y_F = 7{,}3 - 5 = 2{,}3$
Der Mast muss mindestens $2{,}3\ m$ hoch sein.

d) *Berechnung des Volumens für eine Aufschüttung:*
$V = 5 \cdot \int_a^b 1 - f(x)\,dx$
Berechnung von a und b:
$f \cap y = 1$
$0{,}0008x^4 - 0{,}12x^2 + 5 = 1$
$-0{,}0008x^4 + 0{,}12x^2 - 4 = 0 \qquad | \qquad :(-0{,}0008)$
$x^4 - 150x^2 + 5000 = 0$
$x_{1,2}^2 = 75 \pm \sqrt{5625 - 5000} = 75 \pm \sqrt{625} = 75 \pm 25$
$x_1^2 = 100; \quad x_2^2 = 50$
$x_1 = 10; \quad x_2 = \sqrt{50}$
$a = x_2 = \sqrt{50}; \quad b = x_1 = 10$
$V = 5 \cdot \int_{\sqrt{50}}^{10} -0{,}008x^4 + 0{,}12x^2 - 4\,dx = 5 \cdot \left[-\frac{0{,}008x^5}{5} + 0{,}04x^3 - 4x\right]_{\sqrt{50}}^{10}$
$V = 5 \cdot (-\frac{0{,}008 \cdot 10^5}{5} + 0{,}04 \cdot 10^3 - 4 \cdot 10 - (-\frac{0{,}008 \cdot \sqrt{50}^8}{5} + 0{,}04 \cdot \sqrt{50}^3 - 4 \cdot \sqrt{50})$
$V = 5 \cdot (-16 + 16{,}97) = 5 \cdot 0{,}97 \approx 5$
Es werden ca. $5\ m^3$ Sand für die Aufschüttung benötigt.

Lösungslogik A1.2
Bestimmung von $f(-1)$:
Gegeben ist $f(x) = v(u(x))$.
Aus der gegebenen Grafik lesen wir ab:
$u(-1) = 1{,}5$
$v(1{,}5) = 2{,}5$
$f(-1) = 2{,}5$

Anzahl Nullstellen von $f(x) = v(u(x))$:
Nullstelle der äußeren Funktion v ist bei etwa $x = 0{,}7$.
Die innere Funktion u hat die y-Werte $0{,}7$ an zwei Stellen.

Klausuraufschrieb A1.2
Bestimmung von $f(-1)$:
$f(x) = v(u(x))$
Aus Grafik ab gelesen:
$u(-1) = 1{,}5$
$v(1{,}5) = 2{,}5$
$f(-1) = 2{,}5$

Anzahl Nullstellen von $f(x) = v(u(x))$:
Nullstelle der äußeren Funktion v ist bei etwa $x = 0{,}7$.
Die innere Funktion u hat die y-Werte $0{,}7$ an zwei Stellen.
$f(x)$ besitzt im abgebildeten Bereich zwei Nullstellen.

Abitur allg. Gymnasium Leistungskurs Wahlteil Analysis 2021 BW

Klausuraufschrieb A1.3

Aus dem Aufgabentext schließen wir:
$w''(0) = 0$ ➔ Wendepunkt von w.
$g''(0) = 0$ ➔ Wendepunkt von g.
Zu zeigen:
$w'(0) = 0$ ➔ Wendepunkt von w mit waagrechter Tangente (Sattelpunkt)
Wir bilden die Ableitungen von g:
$g(x) = e^{w(x)} - 2$
$g'(x) = w'(x)e^{w(x)}$
$g''(x) = w''(x)e^{w(x)} + w'(x) \cdot w'(x) \cdot e^{w(x)} = e^{w(x)}(w'(x)^2 + w''(x))$
$g''(0) = 0$
$w''(0)e^{w(0)} + w'(0)^2 \cdot e^{w(0)} = e^{w(0)}(w'(0)^2 + w''(0))$
$w'(0)^2 + w''(0) = 0$ | Satz vom Nullprodukt
$w'(0)^2 = 0$ | Einsetzen von $w''(0) = 0$
$w'(0) = 0$ **q.e.d.**

Lösungslogik A2.1

a) *Bestimmung des Zeitraums einer Wachstumsgeschwindigkeit größer* $0{,}5\ m/Jahr$*.*
Einzeichnen einer parallelen zur x-Achse im Abstand und Ablesen der t-Werte der Schnittpunkte.

Höhe des Apfelbaums zwei Jahre nach Beobachtungsbeginn:
Wir müssen aus der Grafen Kästchen abzählen zwischen der Kurve und der t -Achse im Intervall [0;2]. Zu diesem Wert muss noch der Anfangsbestand von 0,8 m hinzuaddiert werden.

b) *Berechnung der größten Wachstumsgeschwindigkeit eines Birnbaums:*
Gegeben ist die Änderungsrate des Wachstums. Die größte Änderungsrate liegt im Hochpunkt des Graphen der Funktion. Wir setzen $g'(t)$ auf Null und lösen nach t auf.

Begründung des weiteren Wachstums nach zwei Jahren:
Siehe Klausuraufschrieb.
Formulierung einer Frage im Sachzusammenhang:
Siehe Klausuraufschrieb.

c) *Nachweis eine Stammfunktion zur Wachstumsgeschwindigkeit:*
Dies ist dann der Fall, wenn $h'(t)$ gleich $g(t)$ ist.

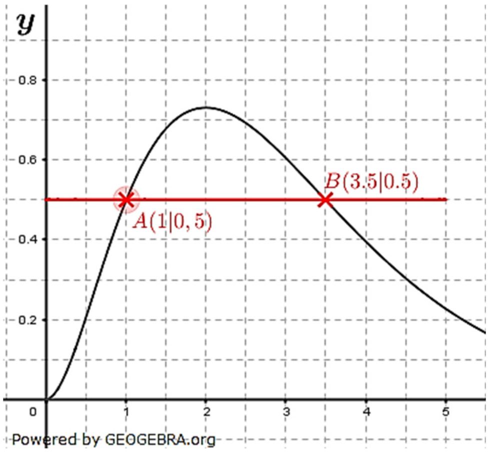
d) *Zeitpunkt, bis zu dem die Wachstumsgeschwindigkeit des gedüngten Birnbaums größer ist als die des ungedüngten Birnbaums*:
Wir bilden zunächst $k'(t)$ als Wachstumsrate des gedüngten Birnbaums und danach die Differenzfunktion der Funktionsgleichungen der Wachstumsraten des gedüngten und des ungedüngten Birnbaumes und berechnen die Nullstellen dieser Differenzfunktion.
Untersuchung, welcher der beiden Bäume zuerst eine Höhe von $3{,}1\ m$ *erreicht:*
Wir setzen die jeweiligen Gleichungen auf $3{,}1$ und lösen beide Gleichungen nach t auf.

Abitur allg. Gymnasium Leistungskurs Wahlteil Analysis 2021 BW

Klausuraufschrieb A2.1

a) *Bestimmung des Zeitraums einer Wachstumsgeschwindigkeit größer* $0{,}5\ m/Jahr$.

Ablesen aus Grafik:
$t_1 = 1;\quad t_2 = 3{,}5$
Zwischen dem $1.$ *und* $3{,}5.$ *Jahr nach Beobachtungsbeginn wächst der Apfelbaum etwa* $0{,}5\ m/Jahr$.



Höhe des Apfelbaums zwei Jahre nach Beobachtungsbeginn:
Anzahl Kästchen zwischen Kurve und x-Achse im Intervall $[0;2]$ etwa 17. *Ein Kästchen entspricht* $0{,}5 Jahr \cdot 0{,}1 \frac{m}{Jahr} = 0{,}05\ m$
$17 \cdot 0{,}05\ m = 0{,}85\ m$
Die Höhe des Apfelbaums 2 *Jahre nach Beobachtungsbeginn beträgt etwa* $1{,}65\ m$.

b) *Berechnung der größten Wachstumsgeschwindigkeit eines Birnbaums:*
$g'(t) = 0$
$e^{-t}(2t - t^2) = 0$ | Satz vom Nullprodukt
$2t - t^2 = 0$
$t(2 - t) = 0$ | Satz vom Nullprodukt
$t_1 = 0;\quad t_2 = 2$
$g(2) = 4 \cdot e^{-2} \approx 0{,}54$
Zwei Jahre nach Beobachtungsbeginn ist die Wachstumsgeschwindigkeit des Birnbaums mit etwa $0{,}54\ m/Jahr$ *am größten.*

Begründung des weiteren Wachstums nach zwei Jahren:
In liegt ein Hochpunkt vor, sodass die Wachstumsrate für $t > 2$ wieder abnimmt. Allerding kann die Änderungsrate des Wachstums nicht kleiner Null werden, sodass der Birnbaum weiter wachsen wird.
$t^2 \cdot e^{-t} > 0$ für $t > 2$.

Formulierung einer Frage im Sachzusammenhang:
Die Auflösung der Gleichung $\frac{1}{5} \cdot \int_x^{x+5} g(t)\, dt = 0{,}3$ nach x liefert den Anfangszeitpunkt eines Zeitraumes von 5 Jahren, in dem das mittlere Wachstum des Birnbaums $0{,}3\ m$ pro Jahr beträgt.

c) *Nachweis eine Stammfunktion zur Wachstumsgeschwindigkeit:*
$h'(t) \overset{?}{=} g(t)$
$h'(t) = (-2t - 2)e^{-t} - (-t^2 - 2t - 2)e^{-t}$
$h'(t) = e^{-t}(-2t - 2 + t^2 + 2t + 2) = t^2 \cdot e^{-t} = g(t)$

Abitur allg. Gymnasium Leistungskurs Wahlteil Analysis 2021 BW

d) *Zeitpunkt, bis zu dem die Wachstumsgeschwindigkeit des gedüngten Birnbaums größer ist als die des ungedüngten Birnbaums*:

Wachstumsrate $k'(t)$ gedüngter Birnbaum:

$k'(t) = 2{,}3e^{-t}$

Birnbaum ungedüngt: $g(t) = t^2 \cdot e^{-t}$

Differenzfunktion $d(t) = k'(t) - g(t)$:

$d(t) = 2{,}3e^{-t} - t^2 \cdot e^{-t} = e^{-t} \cdot (2{,}3 - t^2)$

$d(t) = 0$

$e^{-t} \cdot (2{,}3 - t^2) = 0$

$2{,}3 - t^2 = 0$ | Satz vom Nullprodukt

$t^2 = 2{,}3$

$t_{1,2} = \pm\sqrt{2{,}3} = \pm 1{,}52$

Wegen $t > 0$ interessiert nur $t_1 = 1{,}52$.

Nach etwa $1{,}52$ Jahren ist die Wachstumsgeschwindigkiet des gedüngten Birnbaums größer als die des ungedüngten Birnbaums.

Untersuchung, welcher der beiden Bäume zuerst eine Höhe von $3{,}1\,m$ erreicht:

Wachstumsfunktion ungedüngter Birnbaum:

$h(t) = (-t^2 - 2t - 2) \cdot e^{-t} + 3{,}2$

Wachstumsfunktion gedüngter Birnbaum:

$k(t) = -2{,}3e^{-t} + 3{,}5$

$k(t) = 3{,}1$

$-2{,}3e^{-t} + 3{,}5 = 3{,}1$

$-2{,}3e^{-t} + 0{,}4 = 0$

$2{,}3e^{-t} = 0{,}4$ | $:2{,}3$

$e^{-t} = 0{,}1739$ | ln

$-t = \ln(0{,}1739)$

$t = 1{,}75$

Der gedüngte Birnbaum erreicht nach $1{,}75$ Jahren eine Höhe von $3{,}1\,m$.

$h(1{,}75) = (-1{,}75^2 - 2 \cdot 1{,}75 - 2) \cdot e^{-1{,}75} + 3{,}2$

$h(1{,}75) = 1{,}71$

Der ungedüngte Birnbaum erreicht nach $1{,}75$ Jahren erst eine Höhe von $1{,}7\,m$.

Der gedüngte Birnbaum erreicht zuerst eine Höhe von $3{,}1\,m$.

Abitur allg. Gymnasium Leistungskurs Wahlteil Analysis 2021 BW

Klausuraufschrieb A2.2

$f_t(x) = -4x^3 + 12tx^2$.

a) Nullstellen von f_t über $f_t(x) = 0$

$-4x^3 + 12tx^2 = 0$

$x^2(12t - 4x) = 0$ | Satz vom Nullprodukt

$x_{1,2} = 0$ | doppelte Nullstelle

$12t - 4x = 0$

$4x = 12t$

$x_3 = 3t$ | einfache Nullstelle

t für $A_t = \frac{16}{3}$:

$A_t = \int_0^{3t} -4x^3 + 12tx^2\,dx = [-x^4 + 4tx^3]_0^{3t} = -81t^4 + 108t^4 = 27t^4$

$27t^4 = \frac{16}{3}$ | $:27$

$t^4 = \frac{16}{81}$ | $\sqrt[4]{}$

$t_{1,2} = \pm\frac{2}{3}$

Wegen $t > 0$ ist $t_1 = \frac{2}{3}$ die Lösung.

b) *Tangenten an den Graphen von $f_{\frac{2}{3}}$, die den Punkt $S(3|0)$ enthalten:*

$y = f_{\frac{2}{3}}'(u) \cdot (x - u) + f_{\frac{2}{3}}(u)$

$f_{\frac{2}{3}}(x) = -4x^3 + 8x^2$

$f_{\frac{2}{3}}'(x) = -12x^2 + 16x$

$f_{\frac{2}{3}}'(u) = -12u^2 + 16u$

$y = (-12u^2 + 16u) \cdot (x - u) - 4u^3 + 8u^2$

Punktprobe mit $S(3|0)$

$0 = (-12u^2 + 16u) \cdot (3 - u) - 4u^3 + 8u^2$

$0 = -36u^2 + 48u + 12u^3 - 16u^2 - 4u^3 + 8u^2$

$0 = 8u^3 - 44u^2 + 48u$

$8u(u^2 - 5{,}5u + 6) = 0$ | Satz vom Nullprodukt

$u_1 = 0$

$u^2 - 5{,}5u + 6 = 0$

$u_{2,3} = 2{,}75 \pm \sqrt{7{,}5625 - 6} = 2{,}75 \pm \sqrt{1{,}5625} = 2{,}75 \pm 1{,}25$

$u_2 = 4;\quad u_3 = 1{,}5$

Die x-Koordiaten der zugehörigen Berührpunkte sind $x_1 = 0$, $x_2 = 1{,}5$ und $x_3 = 4$