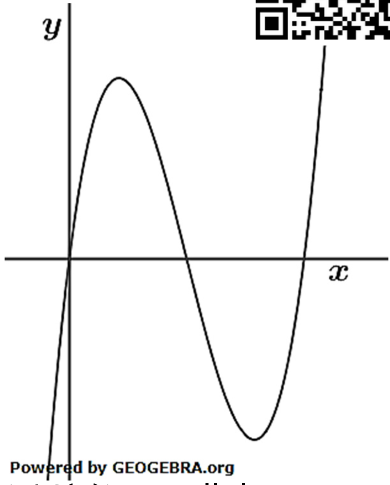
Abitur allg. Gymnasium Leistungskurs Wahlteil Analysis 2022 BW

Aufgabe A1.1

Die Abbildung zeigt den Graphen G_f der Funktion f mit $f(x) = x^3 - 6x^2 + 8x$.



a) Berechnen Sie die Nullstellen von f.
Berechnen Sie die Koordinaten des Wendepunktes W von G_f.
Die Gerade t_1 ist die Tangente an G_f in W.
Zeigen Sie, dass $y = -4x + 8$ eine Gleichung von t_1 ist.

b) Die Gerade t_2 ist die Tangente an G_f im Ursprung O. Die Geraden t_1 und t_2 schneiden sich im Punkt Q. Berechnen Sie für das Dreieck OWQ die Weite des Innenwinkels bei Q.
Für ein $u > 0$ ist die Tangente an G_f im Punkt $B(u|f(u))$ parallel zu t_2.
Bestimmen Sie den Wert von u.

c) Die Funktion I_0 mit $I_0(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ besitzt im Intervall $[0;4]$ ihren maximalen Wert an der Stelle x_0. Geben Sie x_0 an und begründen Sie Ihre Angabe.

d) Für die Funktion h mit $h(x) = x^3 - 4x$ gilt $f(x) = h(x-2)$. Erläutern Sie, welche Symmetrieeigenschaft daraus für G_f folgt.

e) Der Graph G_f^* entsteht durch Spiegelung des Graphen G_f an der Geraden mit der Gleichung $x = a$. Die Tangente an G_f^* im Wendepunkt von G_f^* schneidet die y-Achse im Punkt $S(0|16)$. Bestimmen Sie den Wert von a.

Aufgabe A1.2

Für jedes $a > 0$ ist die Funktion f_a gegeben durch $f_a(x) = a \cdot \sin(a \cdot \pi \cdot x)$. Die zugehörigen Graphen werden mit G_a bezeichnet.
Der Punkt $K_a\left(\frac{1}{2a}\middle|a\right)$ ist ein Hochpunkt von G_a.

a) Geben Sie die Periode von f_a an.
Der Punkt H_a bildet mit den beiden von H_a am wenigsten weit entfernten Tiefpunkten von G_a ein Dreieck. Zeigen Sie, dass der Flächeninhalt dieses Dreiecks unabhängig von a ist.

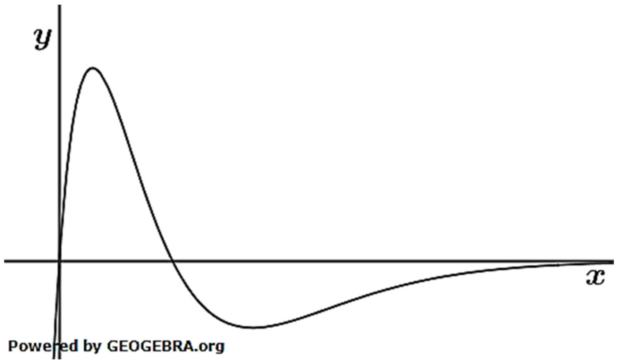
b) Ermitteln Sie den Wert von a, für den H_a vom Ursprung den Abstand 1 hat.

c) Bestimmen Sie eine Gleichung der Kurve K, auf der alle Punkte H_a liegen.
Auf K gibt es einen Punkt H_a , in dem die Tangente an K parallel zur Geraden mit der Gleichung $y = -2x$ ist. Bestimmen Sie den Wert von a.

Abitur allg. Gymnasium Leistungskurs Wahlteil Analysis 2022 BW

Aufgabe A2.1

Die Abbildung zeigt den Graphen der Funktion f mit $f(t) = (2t - t^2)e^{2-t}$, die für $0 \leq t \leq 10$ die momentane Änderungsrate des Wasservolumens in einem Becken beschreibt (t in Stunden nach Beobachtungsbeginn, $f(t)$ in Kubikmeter pro Stunde).



a) Geben Sie die momentane Änderungsrate des Wasservolumens eine Stunde nach Beobachtungsbeginn an.
Begründen Sie, dass das Wasservolumen in den ersten beiden Stunden nach Beobachtungsbeginn niemals abnimmt.
Die momentane Änderungsrate des Wasservolumens besitzt ein Minimum. Bestimmen Sie den Zeitpunkt, zu dem dieses Minimum angenommen wird. (Teilergebnis: $T_{min} = 2 + \sqrt{2}$)

Die Funktion F mit $F(t) = t^2 \cdot e^{2-t}$ ist eine Stammfunktion von f. Zwei Stunden nach Beobachtungsbeginn enthält das Becken $6\,m^3$ Wasser.

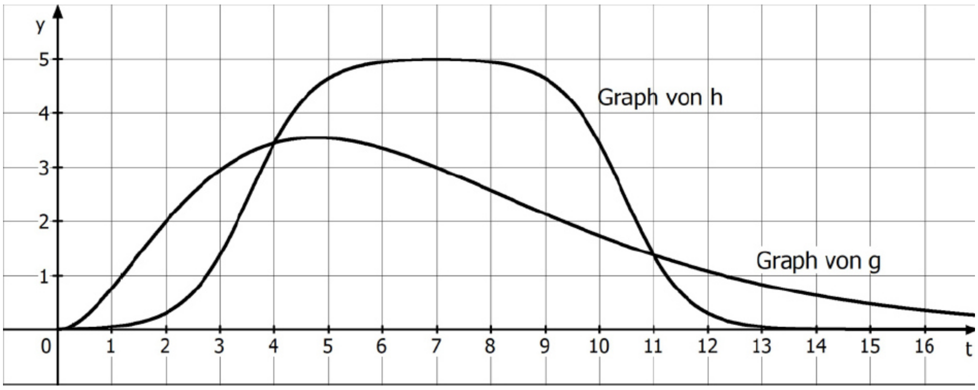
b) Ermitteln Sie das Wasservolumen, das sich zu Beobachtungsbeginn im Becken befand.
Es gibt einen 45-Minuten-Zeitraum, in welchem das Wasservolumen um genau einen Kubikmeter zunimmt. Geben Sie eine Gleichung an, deren Lösung den Beginn dieses Zeitraums darstellt.

c) Über eine Schaltuhr kann ein Zeitpunkt t_0 gewählt werden, so dass die momentane Änderungsrate des Wasservolumens nur bis t_0 durch die Funktion t beschrieben wird und danach konstant auf dem Wert $f(t_0)$ bleibt.
Zeigen Sie, dass t_0 nicht so gewählt werden kann, dass das Becken sieben Stunden nach Beobachtungsbeginn leer ist.

Abitur allg. Gymnasium Leistungskurs Wahlteil Analysis 2022 BW

Für ein anderes Becken beschreiben die Funktion g die momentane Zuflussrate und die Funktion h die momentane Abflussrate des Wassers in Abhängigkeit von der Zeit t ($0 \leq t \leq 17$, t in Stunden nach Beobachtungsbeginn, $g(t)$ und $h(t)$ in Kubikmeter pro Stunde). Die Abbildung zeigt die Graphen der beiden Funktionen g und h.

d) Geben Sie den Zeitraum an, in dem das Wasservolumen in diesem Becken abnimmt.
Das abfließende Wasser wird in einem quaderförmigen Tank mit der Grundfläche $12\,m^2$ gesammelt. Dieser ist zu Beobachtungsbeginn leer. Untersuchen Sie, ob das Wasser im Tank höher als $5\,m$ steigt.
Entscheiden Sie, ob das Becken zu Beobachtungsbeginn leer war, und begründen Sie Ihre Entscheidung.



Aufgabe A2.2

Für jede reelle Zahl $a \neq 0$ ist eine Funktion k_a gegeben durch $k_a(x) = \frac{1}{x} - \frac{a}{x^2}$.
G_a ist der Graph von k_a.

a) Geben Sie Gleichungen der Asymptoten des Graphen G_a an. Weisen Sie nach, dass für die Ableitung k_a' von k_a gilt: $k_a'(x) = \frac{2a-x}{x^3}$.
Zeigen Sie, dass jeder Graph G_a genau einen Extrempunkt besitzt und untersuchen Sie, für welche Werte von a ein Hochpunkt vorliegt.

b) Jeder Graph G_a besitzt einen Punkt P_a mit der folgenden Eigenschaft: Die Tangente im Punkt P_a an G_a verläuft durch den Ursprung.
Bestimmen sie die x-Koordinate von P_a.

Abitur allg. Gymnasium Leistungskurs Wahlteil Analysis 2022 BW

Lösungslogik A1.1

a) *Nullstellen der Funktion:*
Wir setzen $f(x)$ auf Null und lösen nach x auf.
Koordinaten des Wendepunktes von f:
Die ganzrationale Funktion 3. Grades ist punktsymmetrisch zu ihrem Wendepunkt. Der Wendepunkt liegt in der zweiten Nullstelle von a)
Alternativ:
Bildung der ersten und zweiten Ableitung von f, $f'(x)$ auf null setzem und nach x auflösen ergibt die x-Koordfinate x_W des Wendepunktes. Über $f(x_W)$ den y-Wert von W bestimmen.
Nachweis der Tangente t_1:
Wir bilden die Punkt-Steigungsform einer Geraden in $W(x_W|f(x_W))$ mit
$t_1(x) = f'(x_W) \cdot (x - x_w) + f(x_W)$. Die Auflösung der rechten Seite der Gleichung ergibt dann die nachzuweisende Geradengleichung $y = -4x + 8$.

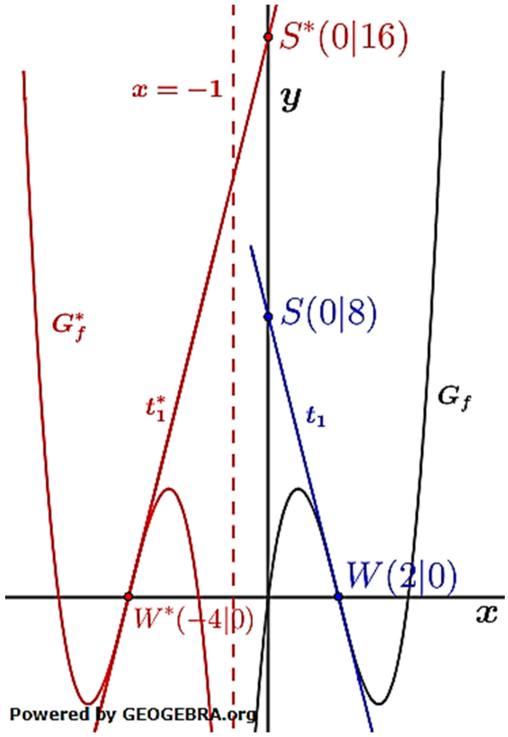
b) *Tangente t_2 in $O(0|0)$:*
Wir bilden die Punkt-Steigungsform einer Geraden in $O(0|0)$ mit
$t_2(x) = f'(0) \cdot (x - 0) + 0$.
Schnittpunkt Q von t_1 mit t_2:
Wir berechnen den Schnittpunkt durch Gleichsetzung.
Dreieckswinkel (Schnittwinkel) bei Q:
Ermittlung über die Formel $\tan(\varphi) = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 \cdot m_2}$.

c) *Begründung der x_0-Stelle des Höchstwertes der Funktion $I_0(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ im Intervall $[0;4]$.*
Begründung sieh Klausuraufschrieb.

Abitur allg. Gymnasium Leistungskurs Wahlteil Analysis 2022 BW

d) *Symmetrieeigenschaften von G_f:*
$h(x)$ ist punktsymmetrisch zum Ursprung. f mit $f(x) = h(x - 2)$ ist die Verschiebung von h um zwei Stellen nach rechts. Dadurch ist G_f punktsymmetrisch zur Nullstelle $N_2 = (2|0)$.

e) *Bestimmung des Wertes von a der Spiegelachse $x = a$:*
Die Spiegelachse ist eine Parallele zur y-Achse. Spiegelung des Wendepunktes $W(2|0)$ führt zu einer neuen Tangentensteigung $m_{t_1}^* = -m_{t_1}$. Die gespiegelte Tangente hat somit die Gleichung $t_1^* = 4x + 16$. Wir bestimmen deren Nullstelle, welche die x-Koordinate von W^* darstellt. Der Wert von a ist dann die Mitte zwischen x_W und x_W^*.



Abitur allg. Gymnasium Leistungskurs Wahlteil Analysis 2022 BW

Klausuraufschrieb A1.1

a) *Nullstellen der Funktion mit $f(x)=0$:*

$x^3-6x^2+8x=0$

$x(x^2-6x+8)=0$ | Satz vom Nullprodukt

$x_1=0$

$x^2-6x+8=0$ | pq-Formel

$x_{2,3}=3\pm\sqrt{9-8}=3\pm 1$

$x_2=4;\ \ x_3=2$ | $\sqrt{}$

$N_1=(0|0);\ \ N_2=(2|0)\!:\ N_3=(4|0)$

Koordinaten des Wendepunktes von f:

Die ganzrationale Funktion 3. Grades ist punktsymmetrisch zu ihrem Wendepunkt. Der Wendepunkt liegt in der zweiten Nullstelle von a).

$N_2=W=(2|0)$

Alternativ:

$f'(x)=3x^2-12x+8$

$f''(x)=6x-12$

$6x-12=0 \rightarrow\ x_W=2$

$f(x_W)=f(2)=2^3-6\cdot 2^2+8\cdot 2=0$

$W=(2|0)$

Nachweis der Tangente t_1:

$t_1(x)=f'(2)\cdot(x-2)+f(2)$ | Punktsteigungsformel in W.

$t_1(x)=(3\cdot 2^2-12\cdot 2+8)(x-2)+0$

$t_1(x)=-4(x-2)=-4x+8$ q.e.d.

b) *Tangente t_2 in $O(0|0)$:*

$t_2(x)=f'(0)\cdot(x-0)+0$

$f'(0)=8$

$t_2(x)=8x$

Schnittpunkt Q von t_1 mit t_2:

$t_1\cap t_2$

$-4x+8=8x$

$12x=8$

$x=\frac{2}{3}$

$f\left(\frac{2}{3}\right)=\left(\frac{2}{3}\right)^3-6\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2+8\cdot\frac{2}{3}=\frac{80}{27}$

$Q\left(\frac{2}{3}\middle|\frac{80}{27}\right)$

Abitur allg. Gymnasium Leistungskurs Wahlteil Analysis 2022 BW

Dreieckswinkel (Schnittwinkel) bei Q:

$tan(\varphi) = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 \cdot m_2} = \frac{8-(-4)}{1+8\cdot(-4)} = \frac{12}{31}$

$\varphi = \arctan\left(\frac{12}{31}\right) = 21{,}16\,°$

c) *Begründung der x_0-Stelle des Höchstwertes der Funktion $I_0(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ im Intervall $[0;4]$.*

Die angegebene Integralfunktion bildet eine Stammfunktion von f mit einem Tiefpunkt in $O(0|0)$. f hat in $x_0 = 2$ eine Nullstelle mit VZW von „+" nach „-„. Diese führt in der Integralfunktion zu einem Hochpunkt.

d) *Symmetrieeigenschaften von G_f:*

$h(x)$ ist punktsymmetrisch zum Ursprung. f mit $f(x) = h(x - 2)$ ist die Verschiebung von h um zwei Stellen nach rechts. Dadurch ist G_f punktsymmetrisch zur Nullstelle $N_2 = (2|0)$.

e) *Bestimmung des Wertes von a der Spiegelachse $x = a$:*

Sei t_1^* die gespiegelte Tangentengleichung. Wegen Spiegelung an einer Parallelen zur y-Achse hat t_1^* die Steigung $m_1^* = -m_1 = 4$.

Die Gleichung der gespiegelten Tangente lautet:

$t_1^* = 4x + 16$

Nullstelle von t_1^*:

$4x + 16 = 0$

$x = -4$

Dies ist die x-Koordinate des gespiegelten Wendepunktes.

$x_W^* = -4$.

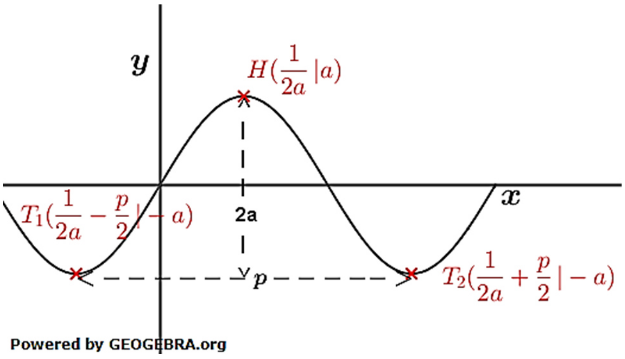
$a = \frac{x_W + x_W^*}{2} = \frac{2-4}{2} = -1$

G_f^* entsteht durch Spiegelung von G_f an der Achse $x = -1$.

Abitur allg. Gymnasium Leistungskurs Wahlteil Analysis 2022 BW

Lösungslogik A1.2

a) *Periode von f_a:*
Die Periode bei trigonometrischen Funktionen bestimmt sich über $p = \frac{2\pi}{b}$ mit aus der allgemeinen Funktionsgleichung von z.B. $f(x) = asin\big(b(x-c)\big) + d$.
Flächeninhalt eines Dreiecks:
Benachbarte Tiefpunkte eines Hochpunktes sind jeweils in x-Richtung um $\frac{p}{2}$ entfernt. Sie haben als y-Koordinate die Gegenzahl der y-Koordinate des Hochpunktes.



Die beiden Tiefpunkte haben somit die Koordinaten $TP_1\left(\frac{1}{2a}-\frac{p}{2}\middle|-a\right)$ und $TP_2\left(\frac{1}{2a}+\frac{p}{2}\middle|-a\right)$.
Das aus den drei Punkten resultierende Dreieck hat als Basis die Strecke vom x-Wert des linken Tiefpunktes bis zum x-Wert des rechten Tiefpunktes. Die Höhe dieses Dreiecks ist die Strecke zwischen y-Wert des Hochpunktes und y-Wert des Tiefpunktes.

b) *Wert von a für Abstand gleich 1 zwischen H_a und Ursprung:*
Abstandsberechnung zwischen Punkten über den Satz des Pythagoras.

c) *Ortskurve aller Punkte H_a:*
Wir formen den x-Wert von H_a nach a um und setzen die Umstellung in den y-Wert von H_a ein und erhalten damit $K(x)$.
a für H_a auf K, für Tangente an K parallel zu $y = -2x$.
Wir ermitteln die erste Ableitung von K, setzen diese auf den Wert -2 und errechnen damit a.

Abitur allg. Gymnasium Leistungskurs Wahlteil Analysis 2022 BW
Klausuraufschrieb A1.2

a) *Periode von f_a:*
$p = \frac{2\pi}{b} = \frac{2\pi}{a \cdot \pi} = \frac{2}{a}$
Flächeninhalt eines Dreiecks:
Benachbarte Tiefpunkte eines Hochpunktes sind jeweils in x-Richtung um $\frac{p}{2}$ entfernt. Sie haben als y-Koordinate die Gegenzahl der y-Koordinate des Hochpunktes.
Die beiden Tiefpunkte haben somit die Koordinaten $TP_1\left(\frac{1}{2a} - \frac{p}{2}\middle|-a\right)$ und $TP_2\left(\frac{1}{2a} + \frac{p}{2}\middle|-a\right)$, $\overline{TP_1TP_1}$ ist Grundseite des Dreiecks.
$\overline{TP_1TP_1} = \frac{1}{2a} - \frac{p}{2} + \frac{1}{2a} + \frac{p}{2} = \frac{1}{a}$
Dreieckshöhe: $h = 2 \cdot y_{H_a} = 2a$
Dreiecksfläche:
$A = \frac{1}{2} \cdot \overline{TP_1TP_1} \cdot h = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{a} \cdot 2a = 1\,FE$
Alle Dreiecke Δ_a haben unabhängig von a eine Fläche von $1\,FE$.

b) *Wert von a für Abstand gleich 1 zwischen H_a und Ursprung:*
Für den Abstand zweier Punkte im kartesischen Koordinatensystem gilt nach dem Satz des Pythagoras:
$d(P_1; P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$
$d(O; H_a) = \sqrt{\left(\frac{1}{2a}\right)^2 + a^2} = 1 \qquad | \quad \uparrow^2$
$\left(\frac{1}{2a}\right)^2 + a^2 = 1$
$\frac{1}{4a^2} + a^2 = 1 \qquad | \quad \cdot a^2$
$\frac{1}{4} + a^4 - a^2 = 0$
$a^4 - a^2 + \frac{1}{4} = 0$
$a_{1,3}^2 = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$
$a_1 = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2}$
Der Punkt $H_{\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}}$ hat zum Ursprung den Abstand 1 LE.

Abitur allg. Gymnasium Leistungskurs Wahlteil Analysis 2022 BW

c) <u>*Ortskurve aller Punkte H_a:*</u>

$x_{H_a} = \frac{1}{2a}$ | $\cdot 2a;\ : x$

$2a = \frac{1}{x}$ | $:2$

$a = \frac{1}{2x}$

$a \to y_{H_a}$

$K(x) = \frac{1}{2x}$

<u>*a für H_a auf K , für Tangente an K parallel zu $y = -2x$.*</u>

$K'(x) = -\frac{1}{2x^2}$

$-\frac{1}{2x^2} = -2$

$\frac{1}{x^2} = 4$

$x^2 = \frac{1}{4}$

$x_{1,2} = \pm\frac{1}{2}$

$x_{H_a} = \frac{1}{2a}$

$\frac{1}{2} = \frac{1}{2a}$

$a = 1$

Der Wert $x_2 = -\frac{1}{2}$ entfällt, da damit H_a zu einem Tiefpunkt würde.

<u>Lösungslogik A2.1</u>

a) <u>*Momentane Änderungsrate des Wasservolumens eine Stunde nach Beobachtungsbeginn an.*</u>

Wir berechnen $f(1)$.

<u>*Begründung, dass das Wasservolumen in den ersten beiden Stunden nach Beobachtungsbeginn niemals abnimmt.*</u>

Wir berechnen die Nullstellen von f. Liegt innerhalb der ersten beiden Stunden keine Nullstelle mit VZW von „+“ nach „-„, so nimmt das Wasservolumen in diesem Zeitintervall niemals ab.

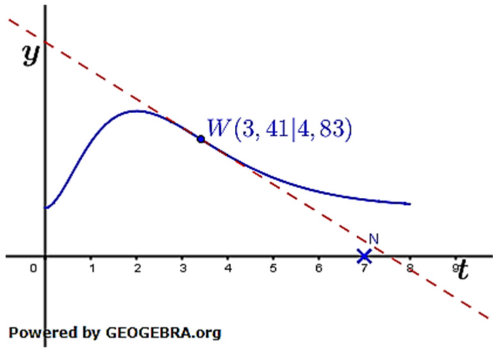
<u>*Zeitpunkt des Minimums der momentanen Änderungsrate:*</u>

Wir bilden die 1. Ableitung, setzen diese auf Null und lösen nach f auf.

Abitur allg. Gymnasium Leistungskurs Wahlteil Analysis 2022 BW

b) *Ermittlung des Wasservolumen im Becken zu Beobachtungsbeginn:*
Wir ermitteln die Zuflussmenge in den ersten beiden Stunden über die gegebene Stammfunktion und subtrahieren diesen Wert von 6.
Gleichung für einen 45-Minuten-Zeitraum der Zunahme des Wasservolumen um genau einen Kubikmeter.
45 Minuten entsprechen $0{,}75\ h$.
Der Beginn dieses Zeitraums lässt sich also ermitteln aus:
$F(t+0{,}75)-F(t)=1$.

c) *Nachweis eines Zeitpunkts t_0.*
Zunächst müssen wir wegen des Anfangsbestandes die Funktion F um diesen Anfangsbestand in y-Richtung nach oben verschieben,
$F^*(t)=F(t)+2$.
Sodann muss es eine Tangente an den Graphen von F^* geben, deren Steigung $f(t_0)$ entspricht und eine Nullstelle bei $t=7$ hat.
Es ist zu prüfen, ob dies möglich ist.



d) *Zeitraum, in dem das Wasservolumen in diesem Becken abnimmt:*
Dies ist der Zeitraum, in dem der Graph der Funktion h oberhalb dem Graphen der Funktion g verläuft.
Untersuchung, ob abfließendes Wasser in einen Tank höher als $5\ m$ steigt.
Funktionsgleichungen sind nicht gegeben, damit bleibt nur „Kästchenzählen".
Wir zählen die Kästchen unterhalb des Graphen der Funktion, bestimmen die Wertigkeit eines Kästchen zu $1\ m^3$ und dividieren das ausgezählte Ergebnis durch $12\ m^2$ Grundfläche.
Entscheidung, ob das Becken zu Beobachtungsbeginn leer war:
Da die Fläche unter dem Graphen von h wohl größer ist als die Fläche unter dem Graphen von g, ist mehr Wasser abgeflossen als zugeflossen.

Abitur allg. Gymnasium Leistungskurs Wahlteil Analysis 2022 BW

Klausuraufschrieb A2.1

a) *Momentane Änderungsrate des Wasservolumens eine Stunde nach Beobachtungsbeginn an.*

$f(1) = (2-1)e^{2-1} = e$

Begründung, dass das Wasservolumen in den ersten beiden Stunden nach Beobachtungsbeginn niemals abnimmt.

$f(t) = 0$

$(2t - t^2)e^{2-t} = 0$

$2t - t^2 = 0$

$t(2-t) = 0$

$t_1 = 0;\ \ t_2 = 2$

Wegen $f(1) = e > 0$ und keiner Nullstelle zwischen $t_1 = 0$ und $t_2 = 2$ kann das Wasservolumen in den ersten beiden Stunden niemals abnehmen.

Zeitpunkt des Minimums der momentanen Änderungsrate:

$f(t) = (2t - t^2)e^{2-t}$

Für erste Ableitung Produktregel erforderlich:

$u = 2t - t^2 \qquad u' = 2 - 2t$

$v = e^{2-t} \qquad v' = -e^{2-t}$

$f'(t) = (2-2t)\cdot e^{2-t} - e^{2-t}(2t - t^2)$

$f'(t) = e^{2-t}\cdot(2 - 4t + t^2)$

Für zweite Ableitung Produktregel erforderlich:

$u = t^2 - 4t + 2 \qquad u' = 2t - 4$

$v = e^{2-t} \qquad v' = -e^{2-t}$

$f''(t) = (2t-4)\cdot e^{2-t} - e^{2-t}(t^2 - 4t + 2)$

$f''(t) = e^{2-t}\cdot(6t - t^2 - 6)$

$f'(t) = 0$

$t^2 - 4t + 2 = 0$ | Satz vom Nullprodukt

$t_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4-2} = 2 \pm \sqrt{2}$

$f''^{(2+\sqrt{2})} = e^{-\sqrt{2}}\cdot\left(12 + 6\cdot\sqrt{2} - 6 - 4\cdot\sqrt{2} - 6\right) = 4\cdot\sqrt{2}e^{-\sqrt{2}} > 0$

An der Stelle $\mathrm{x}_0 = 2 + \sqrt{2}$ liegt ein Tiefpunkt.

Abitur allg. Gymnasium Leistungskurs Wahlteil Analysis 2022 BW

b) *Ermittlung des Wasservolumen im Becken zu Beobachtungsbeginn:*
Zuname in den ersten beiden Stunden:
$z = \int_0^2 f(t)\,dt = [F(t)]_0^2 = F(2) - F(0)$
$z = 4e^{2-2} - 0e^{2-0} = 4\,m^3$
Beckeninhalt nach 2 Stunden gegeben mit $4\,m^3$.
Somit Anfangsbestand von $2\,m^3$.

c) Nachweis eines Zeitpunkts t_0.
Wegen des Anfangsbestandes gilt nun $F^*(t) = F(t) + 2$.
Bestimmung der Wendetangente an $F^*(t)$:
$W^*\left(2+\sqrt{2}\middle|F^*(2+\sqrt{2})\right)$
$F^*(2+\sqrt{2}) = \left(2+\sqrt{2}\right)^2 \cdot e^{-\sqrt{2}} + 2 = 4{,}83$
$f(2+\sqrt{2}) = \left(2\cdot(2+\sqrt{2}) - (2+\sqrt{2})^2\right)e^{-\sqrt{2}} = -4$
$t^*(t) = f(2+\sqrt{2}) \cdot \left(x - (2+\sqrt{2})\right) + F^*(2+\sqrt{2})$.
$t^*(t) = -1{,}17(t - 3{,}41) + 4{,}83$
$t^*(t) = -1{,}17x + 8{,}82$
Nullstelle von $t^*(t)$:
$1{,}17t = 8{,}82$ ➔ $t = 7{,}538 > 7$
Selbst eine Tangente in der größten Abnahme von $F^*(t)$ hat eine Nullstelle $t > 7$, sodass es kein t_0 gibt, damit das Becken 7 Stunden nach Beobachtungsbeginn leer ist.

d) *Zeitraum, in dem das Wasservolumen in diesem Becken abnimmt:*
Dies ist der Zeitraum, in dem der Graph der Funktion h oberhalb des Graphen der Funktion g verläuft.
Aus der Grafik abgelesen:
Das Wasservolumen nimmt im Zeitraum von 4 bis 11 Stunden nach Beobachtungszeitraum ab.
Untersuchung, ob abfließendes Wasser in einen Tank höher als $5\,m$ steigt.
Funktionsgleichungen sind nicht gegeben, damit bleibt nur „Kästchenzählen".
Das Auszählen ergibt etwa 39 Kästchen. Dies entspricht $39\,m^3$abgeflossenes Wasser.
$\frac{39\,m^3}{12\,m^2} = 3{,}25\,m$ ➔ Das Wasser steigt nicht höher als $5\,m$.

<u>Entscheidung, ob das Becken zu Beobachtungsbeginn leer war:</u>
Da die Fläche unter dem Graphen von h größer ist als die Fläche unter dem Graphen von g, ist mehr Wasser abgeflossen als zugeflossen.
Das Becken war am Anfang nicht leer.

<u>Lösungslogik A2.2</u>

a) *<u>Asymptoten der Funktion G_a:</u>*
In Definitionslücken existieren senkrechte Asymptoten der Form $x = a$, im Verhalten im Unendlichen existieren waagrechte Asymptoten der Form $y = a$.
<u>Nachweis der ersten Ableitung von k_a:</u>
Wir bestimmen die erste Ableitung der Funktion und fassen die entstehenden beiden Brüche zu eiben Bruch zusammen.
<u>Nachweis eines Extremwertes von k_a:</u>
Wir setzen die erste Ableitung auf Null und lösen nach x auf. Da es nur eine einzige Lösung gibt, existiert auch nur eine Extremstelle.
Wir bilden die zweite Ableitung und entscheiden für welche Werte von a die zweiter Ableitung negativ ist.

b) *Nachweis einer Ursprungstangente.*
Die Tangente muss die Gleichung
$$t(x) = k'_a(x_0) \cdot (x - x_0) + k_a(x_0)$$
aufweisen. Mit einer Punktprobe über den Ursprung erhalten wir $-k'_a(x_0) \cdot x_0 + k_a(x_0) = 0$.

Klausuraufschrieb A2.2

$k_a(x) = \frac{1}{x} - \frac{a}{x^2}$

a) *Asymptoten der Funktion G_a:*

$\lim\limits_{x \to |\infty|} \frac{1}{x} = 0; \quad \lim\limits_{x \to |\infty|} \frac{a}{x^2} = 0;$

G_a hat eine waagrechte Asymptote $y = 0$.

$\mathbb{D} = x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

G_a hat eine senkrechte Asymptote $x = 0$.

Nachweis der ersten Ableitung von k_a:

$k_a{}'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{2a}{x^3}$

$k_a{}'(x) = \frac{2a-x}{x^3}$ q.e.d.

Nachweis eines Extremwertes von k_a:

$k_a{}'(x) = 0$

$\frac{2a-x}{x^3} = 0 \quad ➔ \quad 2a - x = 0$

$x = 2a$.

$k_a(2a) = \frac{1}{2a} - \frac{a}{4a^2} = \frac{1}{2a} - \frac{1}{4a} = \frac{1}{4a}$

Der Graph der Funktion hat in $P\left(2a\middle|\frac{1}{4a}\right)$ einen Extrempunkt.

$k_a{}''(x) = +\frac{2}{x^3} - \frac{6a}{x^4} = \frac{2x-6a}{x^4}$

$k_a{}''(2a) = \frac{4a-6a}{16a^4} = \frac{-a}{8a^4} = -\frac{1}{8a^3}$

$k_a{}''(2a) < 0$ für $a > 0$

Für $a > 0$ handelt es sich um einen Hochpunkt.

b) *Nachweis einer Ursprungstangente.*

Sei $P_a(x_0|k_a(x_0))$ der Punkt auf G_a, dann gilt für eine Ursprungstangente:

$t(x) = k_a{}'(x_0) \cdot (x - x_0) + k_a(x_0)$

Punktprobe mit dem Ursprung:

$0 = k_a{}'(x_0) \cdot (0 - x_0) + k_a(x_0)$

$-k_a'(x_0) \cdot x_0 + k_a(x_0) = 0$

$-\left(-\frac{1}{x_0} + \frac{2a}{x_0^2}\right) + \frac{1}{x_0} - \frac{a}{x_0^2} = 0 \qquad | \quad \cdot x_0^2$

$x_0 - 2a + x_0 - a = 0$

$2x_0 - 3a = 0$

$2x_0 = 3a$

$x_0 = \frac{3}{2}a$

Für $x_0 = \frac{3}{2}a$ verläuft die Tangente an $P_a(x_0|k_a(x_0))$ durch den Ursprung.