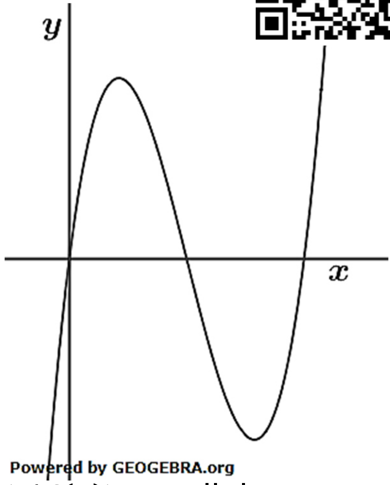
Abitur allg. Gymnasium Leistungskurs Wahlteil Analysis 2022 BW

Aufgabe A1.1

Die Abbildung zeigt den Graphen G_f der Funktion f mit $f(x) = x^3 - 6x^2 + 8x$.



a) Berechnen Sie die Nullstellen von f.
Berechnen Sie die Koordinaten des Wendepunktes W von G_f.
Die Gerade t_1 ist die Tangente an G_f in W.
Zeigen Sie, dass $y = -4x + 8$ eine Gleichung von t_1 ist.

b) Die Gerade t_2 ist die Tangente an G_f im Ursprung O. Die Geraden t_1 und t_2 schneiden sich im Punkt Q. Berechnen Sie für das Dreieck OWQ die Weite des Innenwinkels bei Q.
Für ein $u > 0$ ist die Tangente an G_f im Punkt $B(u|f(u))$ parallel zu t_2.
Bestimmen Sie den Wert von u.

c) Die Funktion I_0 mit $I_0(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ besitzt im Intervall $[0;4]$ ihren maximalen Wert an der Stelle x_0. Geben Sie x_0 an und begründen Sie Ihre Angabe.

d) Für die Funktion h mit $h(x) = x^3 - 4x$ gilt $f(x) = h(x-2)$. Erläutern Sie, welche Symmetrieeigenschaft daraus für G_f folgt.

e) Der Graph G_f^* entsteht durch Spiegelung des Graphen G_f an der Geraden mit der Gleichung $x = a$. Die Tangente an G_f^* im Wendepunkt von G_f^* schneidet die y-Achse im Punkt $S(0|16)$. Bestimmen Sie den Wert von a.

Aufgabe A1.2

Für jedes $a > 0$ ist die Funktion f_a gegeben durch $f_a(x) = a \cdot \sin(a \cdot \pi \cdot x)$. Die zugehörigen Graphen werden mit G_a bezeichnet.
Der Punkt $K_a\left(\frac{1}{2a}\middle|a\right)$ ist ein Hochpunkt von G_a.

a) Geben Sie die Periode von f_a an.
Der Punkt H_a bildet mit den beiden von H_a am wenigsten weit entfernten Tiefpunkten von G_a ein Dreieck. Zeigen Sie, dass der Flächeninhalt dieses Dreiecks unabhängig von a ist.

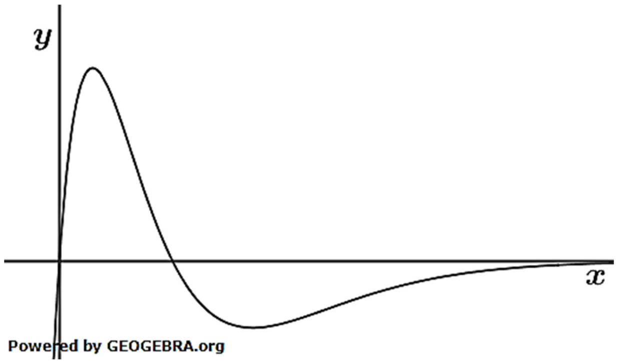
b) Ermitteln Sie den Wert von a, für den H_a vom Ursprung den Abstand 1 hat.

c) Bestimmen Sie eine Gleichung der Kurve K, auf der alle Punkte H_a liegen.
Auf K gibt es einen Punkt H_a , in dem die Tangente an K parallel zur Geraden mit der Gleichung $y = -2x$ ist. Bestimmen Sie den Wert von a.

Abitur allg. Gymnasium Leistungskurs Wahlteil Analysis 2022 BW

Aufgabe A2.1

Die Abbildung zeigt den Graphen der Funktion f mit $f(t) = (2t - t^2)e^{2-t}$, die für $0 \leq t \leq 10$ die momentane Änderungsrate des Wasservolumens in einem Becken beschreibt (t in Stunden nach Beobachtungsbeginn, $f(t)$ in Kubikmeter pro Stunde).



a) Geben Sie die momentane Änderungsrate des Wasservolumens eine Stunde nach Beobachtungsbeginn an.
Begründen Sie, dass das Wasservolumen in den ersten beiden Stunden nach Beobachtungsbeginn niemals abnimmt.
Die momentane Änderungsrate des Wasservolumens besitzt ein Minimum. Bestimmen Sie den Zeitpunkt, zu dem dieses Minimum angenommen wird. (Teilergebnis: $T_{min} = 2 + \sqrt{2}$)

Die Funktion F mit $F(t) = t^2 \cdot e^{2-t}$ ist eine Stammfunktion von f. Zwei Stunden nach Beobachtungsbeginn enthält das Becken $6\,m^3$ Wasser.

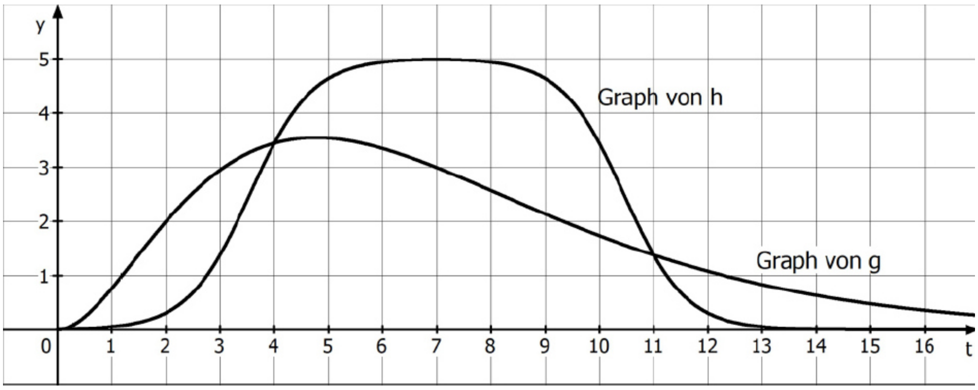
b) Ermitteln Sie das Wasservolumen, das sich zu Beobachtungsbeginn im Becken befand.
Es gibt einen 45-Minuten-Zeitraum, in welchem das Wasservolumen um genau einen Kubikmeter zunimmt. Geben Sie eine Gleichung an, deren Lösung den Beginn dieses Zeitraums darstellt.

c) Über eine Schaltuhr kann ein Zeitpunkt t_0 gewählt werden, so dass die momentane Änderungsrate des Wasservolumens nur bis t_0 durch die Funktion t beschrieben wird und danach konstant auf dem Wert $f(t_0)$ bleibt.
Zeigen Sie, dass t_0 nicht so gewählt werden kann, dass das Becken sieben Stunden nach Beobachtungsbeginn leer ist.

Abitur allg. Gymnasium Leistungskurs Wahlteil Analysis 2022 BW

Für ein anderes Becken beschreiben die Funktion g die momentane Zuflussrate und die Funktion h die momentane Abflussrate des Wassers in Abhängigkeit von der Zeit t $(0 \leq t \leq 17$, t in Stunden nach Beobachtungsbeginn, $g(t)$ und $h(t)$ in Kubikmeter pro Stunde). Die Abbildung zeigt die Graphen der beiden Funktionen g und h.

d) Geben Sie den Zeitraum an, in dem das Wasservolumen in diesem Becken abnimmt.
Das abfließende Wasser wird in einem quaderförmigen Tank mit der Grundfläche $12\,m^2$ gesammelt. Dieser ist zu Beobachtungsbeginn leer. Untersuchen Sie, ob das Wasser im Tank höher als $5\,m$ steigt.
Entscheiden Sie, ob das Becken zu Beobachtungsbeginn leer war, und begründen Sie Ihre Entscheidung.



Aufgabe A2.2

Für jede reelle Zahl $a \neq 0$ ist eine Funktion k_a gegeben durch $k_a(x) = \frac{1}{x} - \frac{a}{x^2}$.
G_a ist der Graph von k_a.

a) Geben Sie Gleichungen der Asymptoten des Graphen G_a an. Weisen Sie nach, dass für die Ableitung k_a' von k_a gilt: $k_a'(x) = \frac{2a-x}{x^3}$.
Zeigen Sie, dass jeder Graph G_a genau einen Extrempunkt besitzt und untersuchen Sie, für welche Werte von a ein Hochpunkt vorliegt.

b) Jeder Graph G_a besitzt einen Punkt P_a mit der folgenden Eigenschaft:
Die Tangente im Punkt P_a an G_a verläuft durch den Ursprung.
Bestimmen sie die x-Koordinate von P_a.