Abitur allg. Gymnasium Leistungskurs Wahlteil Analysis 2022 BW

Lösungslogik A1.1

a) *Nullstellen der Funktion:*
Wir setzen $f(x)$ auf Null und lösen nach $x$ auf.
*Koordinaten des Wendepunktes von $f$:*
Die ganzrationale Funktion 3. Grades ist punktsymmetrisch zu ihrem Wendepunkt. Der Wendepunkt liegt in der zweiten Nullstelle von a)
*Alternativ:*
Bildung der ersten und zweiten Ableitung von $f$, $f'(x)$ auf null setzem und nach $x$ auflösen ergibt die $x$-Koordfinate $x_W$ des Wendepunktes. Über $f(x_W)$ den $y$-Wert von $W$ bestimmen.
*Nachweis der Tangente $t_1$:*
Wir bilden die Punkt-Steigungsform einer Geraden in $W(x_W|f(x_W))$ mit
$t_1(x) = f'(x_W) \cdot (x - x_w) + f(x_W)$. Die Auflösung der rechten Seite der Gleichung ergibt dann die nachzuweisende Geradengleichung $y = -4x + 8$.

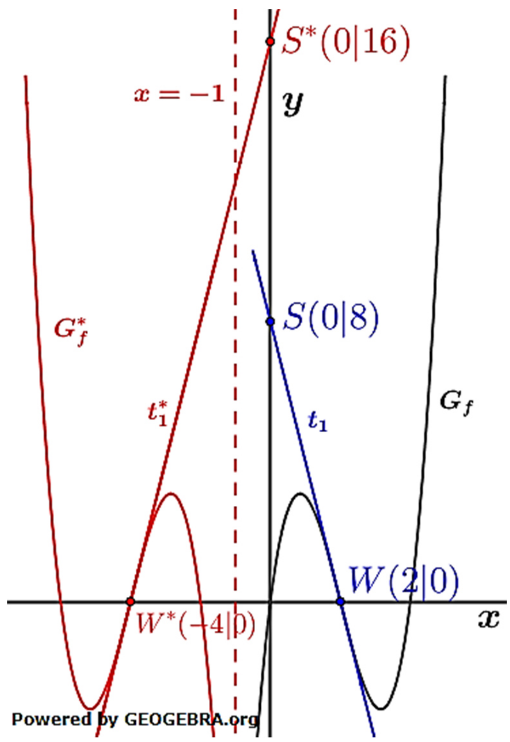
b) *Tangente $t_2$ in $O(0|0)$:*
Wir bilden die Punkt-Steigungsform einer Geraden in $O(0|0)$ mit
$t_2(x) = f'(0) \cdot (x - 0) + 0$.
*Schnittpunkt $Q$ von $t_1$ mit $t_2$:*
Wir berechnen den Schnittpunkt durch Gleichsetzung.
*Dreieckswinkel (Schnittwinkel) bei $Q$:*
Ermittlung über die Formel $\tan(\varphi) = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 \cdot m_2}$.

c) *Begründung der $x_0$-Stelle des Höchstwertes der Funktion $I_0(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ im Intervall $[0; 4]$.*
Begründung sieh Klausuraufschrieb.

Abitur allg. Gymnasium Leistungskurs Wahlteil Analysis 2022 BW

d) *Symmetrieeigenschaften von $G_f$:*
$h(x)$ ist punktsymmetrisch zum Ursprung. $f$ mit $f(x) = h(x - 2)$ ist die Verschiebung von $h$ um zwei Stellen nach rechts. Dadurch ist $G_f$ punktsymmetrisch zur Nullstelle $N_2 = (2|0)$.

e) *Bestimmung des Wertes von $a$ der Spiegelachse $x = a$:*
Die Spiegelachse ist eine Parallele zur $y$-Achse. Spiegelung des Wendepunktes $W(2|0)$ führt zu einer neuen Tangentensteigung $m_{t_1}^* = -m_{t_1}$. Die gespiegelte Tangente hat somit die Gleichung $t_1^* = 4x + 16$. Wir bestimmen deren Nullstelle, welche die $x$-Koordinate von $W^*$ darstellt. Der Wert von $a$ ist dann die Mitte zwischen $x_W$ und $x_W^*$.



Abitur allg. Gymnasium Leistungskurs Wahlteil Analysis 2022 BW

Klausuraufschrieb A1.1

a) *Nullstellen der Funktion mit $f(x) = 0$:*

$x^3 - 6x^2 + 8x = 0$

$x(x^2 - 6x + 8) = 0$ | Satz vom Nullprodukt

$x_1 = 0$

$x^2 - 6x + 8 = 0$ | $pq$-Formel

$x_{2,3} = 3 \pm \sqrt{9-8} = 3 \pm 1$

$x_2 = 4;\ x_3 = 2$ | $\sqrt{\ }$

$N_1 = (0|0);\ N_2 = (2|0)\text{: } N_3 = (4|0)$

*Koordinaten des Wendepunktes von $f$:*

Die ganzrationale Funktion 3. Grades ist punktsymmetrisch zu ihrem Wendepunkt. Der Wendepunkt liegt in der zweiten Nullstelle von a).

$N_2 = W = (2|0)$

*Alternativ:*

$f'(x) = 3x^2 - 12x + 8$

$f''(x) = 6x - 12$

$6x - 12 = 0 \rightarrow x_W = 2$

$f(x_W) = f(2) = 2^3 - 6 \cdot 2^2 + 8 \cdot 2 = 0$

$W = (2|0)$

*Nachweis der Tangente $t_1$:*

$t_1(x) = f'(2) \cdot (x-2) + f(2)$ | Punktsteigungsformel in $W$.

$t_1(x) = (3 \cdot 2^2 - 12 \cdot 2 + 8)(x-2) + 0$

$t_1(x) = -4(x-2) = -4x + 8$ q.e.d.

b) *Tangente $t_2$ in $O(0|0)$:*

$t_2(x) = f'(0) \cdot (x - 0) + 0$

$f'(0) = 8$

$t_2(x) = 8x$

*Schnittpunkt $Q$ von $t_1$ mit $t_2$:*

$t_1 \cap t_2$

$-4x + 8 = 8x$

$12x = 8$

$x = \frac{2}{3}$

$f\left(\frac{2}{3}\right) = \left(\frac{2}{3}\right)^3 - 6 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 + 8 \cdot \frac{2}{3} = \frac{80}{27}$

$Q\left(\frac{2}{3}\middle|\frac{80}{27}\right)$

*Dreieckswinkel (Schnittwinkel) bei $Q$:*

$tan(\varphi) = \frac{m_2-m_1}{1+m_1\cdot m_2} = \frac{8-(-4)}{1+8\cdot(-4)} = \frac{12}{31}$

$\varphi = \arctan\left(\frac{12}{31}\right) = 21{,}16\,°$

c) *Begründung der $x_0$-Stelle des Höchstwertes der Funktion $I_0(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ im Intervall $[0;4]$.*

Die angegebene Integralfunktion bildet eine Stammfunktion von $f$ mit einem Tiefpunkt in $O(0|0)$. $f$ hat in $x_0 = 2$ eine Nullstelle mit VZW von „+“ nach „-„. Diese führt in der Integralfunktion zu einem Hochpunkt.

d) *Symmetrieeigenschaften von $G_f$:*

$h(x)$ ist punktsymmetrisch zum Ursprung. $f$ mit $f(x) = h(x-2)$ ist die Verschiebung von $h$ um zwei Stellen nach rechts. Dadurch ist $G_f$ punktsymmetrisch zur Nullstelle $N_2 = (2|0)$.

e) *Bestimmung des Wertes von $a$ der Spiegelachse $x = a$:*

Sei $t_1^*$ die gespiegelte Tangentengleichung. Wegen Spiegelung an einer Parallelen zur $y$-Achse hat $t_1^*$ die Steigung $m_1^* = -m_1 = 4$.

Die Gleichung der gespiegelten Tangente lautet:

$t_1^* = 4x + 16$

Nullstelle von $t_1^*$:

$4x + 16 = 0$

$x = -4$

Dies ist die $x$-Koordinate des gespiegelten Wendepunktes.

$x_W^* = -4$.

$a = \frac{x_W + x_W^*}{2} = \frac{2-4}{2} = -1$

$G_f^*$ entsteht durch Spiegelung von $G_f$ an der Achse $x = -1$.

Abitur allg. Gymnasium Leistungskurs Wahlteil Analysis 2022 BW

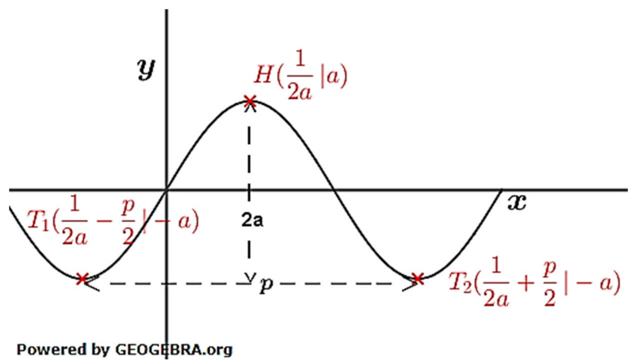
Lösungsslogik A1.2

a) *Periode von $f_a$:*

Die Periode bei trigonometrischen Funktionen bestimmt sich über $p = \frac{2\pi}{b}$ mit aus der allgemeinen Funktionsgleichung von z.B. $f(x) = asin\big(b(x-c)\big) + d$.

*Flächeninhalt eines Dreiecks:*

Benachbarte Tiefpunkte eines Hochpunktes sind jeweils in $x$-Richtung um $\frac{p}{2}$ entfernt. Sie haben als $y$-Koordinate die Gegenzahl der $y$-Koordinate des Hochpunktes.




Die beiden Tiefpunkte haben somit die Koordinaten $TP_1\left(\frac{1}{2a}-\frac{p}{2}\middle|-a\right)$ und $TP_2\left(\frac{1}{2a}+\frac{p}{2}\middle|-a\right)$.

Das aus den drei Punkten resultierende Dreieck hat als Basis die Strecke vom $x$-Wert des linken Tiefpunktes bis zum $x$-Wert des rechten Tiefpunktes. Die Höhe dieses Dreiecks ist die Strecke zwischen $y$-Wert des Hochpunktes und $y$-Wert des Tiefpunktes.

b) *Wert von $a$ für Abstand gleich 1 zwischen $H_a$ und Ursprung:*

Abstandsberechnung zwischen Punkten über den Satz des Pythagoras.

c) *Ortskurve aller Punkte $H_a$:*

Wir formen den $x$-Wert von $H_a$ nach $a$ um und setzen die Umstellung in den $y$-Wert von $H_a$ ein und erhalten damit $K(x)$.

*$a$ für $H_a$ auf $K$, für Tangente an $K$ parallel zu $y = -2x$.*

Wir ermitteln die erste Ableitung von $K$, setzen diese auf den Wert $-2$ und errechnen damit $a$.

Abitur allg. Gymnasium Leistungskurs Wahlteil Analysis 2022 BW
Klausuraufschrieb A1.2

a) *Periode von $f_a$:*
$p=\frac{2\pi}{b}=\frac{2\pi}{a\cdot\pi}=\frac{2}{a}$
*Flächeninhalt eines Dreiecks:*
Benachbarte Tiefpunkte eines Hochpunktes sind jeweils in $x$-Richtung um $\frac{p}{2}$ entfernt. Sie haben als $y$-Koordinate die Gegenzahl der $y$-Koordinate des Hochpunktes.
Die beiden Tiefpunkte haben somit die Koordinaten $TP_1\left(\frac{1}{2a}-\frac{p}{2}\middle|-a\right)$ und $TP_2\left(\frac{1}{2a}+\frac{p}{2}\middle|-a\right)$, $\overline{TP_1TP_1}$ ist Grundseite des Dreiecks.
$\overline{TP_1TP_1}=\frac{1}{2a}-\frac{p}{2}+\frac{1}{2a}+\frac{p}{2}=\frac{1}{a}$
Dreieckshöhe: $h=2\cdot y_{H_a}=2a$
Dreiecksfläche:
$A=\frac{1}{2}\cdot\overline{TP_1TP_1}\cdot h=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{a}\cdot 2a=1\,FE$
Alle Dreiecke $\Delta_a$ haben unabhängig von $a$ eine Fläche von $1\,FE$.

b) *Wert von $a$ für Abstand gleich 1 zwischen $H_a$ und Ursprung:*
Für den Abstand zweier Punkte im kartesischen Koordinatensystem gilt nach dem Satz des Pythagoras:
$d(P_1;P_2)=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$
$d(O;H_a)=\sqrt{\left(\frac{1}{2a}\right)^2+a^2}=1 \qquad | \quad \uparrow^2$
$\left(\frac{1}{2a}\right)^2+a^2=1$
$\frac{1}{4a^2}+a^2=1 \qquad | \quad \cdot a^2$
$\frac{1}{4}+a^4-a^2=0$
$a^4-a^2+\frac{1}{4}=0$
$a_{1,3}^2=\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}-\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}$
$a_1=\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}$
Der Punkt $H_{\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}}$ hat zum Ursprung den Abstand 1 LE.

c) *Ortskurve aller Punkte $H_a$:*

$x_{H_a} = \frac{1}{2a}$ | $\cdot 2a;\ : x$

$2a = \frac{1}{x}$ | $: 2$

$a = \frac{1}{2x}$

$a \to y_{H_a}$

$K(x) = \frac{1}{2x}$

*$a$ für $H_a$ auf $K$ , für Tangente an $K$ parallel zu $y = -2x$.*

$K'(x) = -\frac{1}{2x^2}$

$-\frac{1}{2x^2} = -2$

$\frac{1}{x^2} = 4$

$x^2 = \frac{1}{4}$

$x_{1,2} = \pm\frac{1}{2}$

$x_{H_a} = \frac{1}{2a}$

$\frac{1}{2} = \frac{1}{2a}$

$a = 1$

Der Wert $x_2 = -\frac{1}{2}$ entfällt, da damit $H_a$ zu einem Tiefpunkt würde.

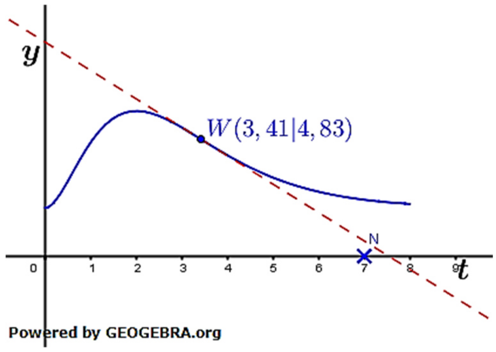
Lösungslogik A2.1

a) *Momentane Änderungsrate des Wasservolumens eine Stunde nach Beobachtungsbeginn an.*
Wir berechnen $f(1)$.
*Begründung, dass das Wasservolumen in den ersten beiden Stunden nach Beobachtungsbeginn niemals abnimmt.*
Wir berechnen die Nullstellen von $f$. Liegt innerhalb der ersten beiden Stunden keine Nullstelle mit VZW von „+“ nach „-„, so nimmt das Wasservolumen in diesem Zeitintervall niemals ab.
*Zeitpunkt des Minimums der momentanen Änderungsrate:*
Wir bilden die 1. Ableitung, setzen diese auf Null und lösen nach $f$ auf.

Abitur allg. Gymnasium Leistungskurs Wahlteil Analysis 2022 BW

b) *Ermittlung des Wasservolumen im Becken zu Beobachtungsbeginn:*
Wir ermitteln die Zuflussmenge in den ersten beiden Stunden über die gegebene Stammfunktion und subtrahieren diesen Wert von 6.
*Gleichung für einen 45-Minuten-Zeitraum der Zunahme des Wasservolumen um genau einen Kubikmeter.*
$45$ Minuten entsprechen $0{,}75\,h$.
Der Beginn dieses Zeitraums lässt sich also ermitteln aus:
$F(t+0{,}75)-F(t)=1$.

c) *Nachweis eines Zeitpunkts $t_0$.*
Zunächst müssen wir wegen des Anfangsbestandes die Funktion $F$ um diesen Anfangsbestand in y-Richtung nach oben verschieben, $F^*(t)=F(t)+2$.
Sodann muss es eine Tangente an den Graphen von $F^*$ geben, deren Steigung $f(t_0)$ entspricht und eine Nullstelle bei $t=7$ hat.
Es ist zu prüfen, ob dies möglich ist.




d) *Zeitraum, in dem das Wasservolumen in diesem Becken abnimmt:*
Dies ist der Zeitraum, in dem der Graph der Funktion h oberhalb dem Graphen der Funktion g verläuft.
*Untersuchung, ob abfließendes Wasser in einen Tank höher als $5\,m$ steigt.*
Funktionsgleichungen sind nicht gegeben, damit bleibt nur „Kästchenzählen".
Wir zählen die Kästchen unterhalb des Graphen der Funktion, bestimmen die Wertigkeit eines Kästchen zu $1\,m^3$ und dividieren das ausgezählte Ergebnis durch $12\,m^2$ Grundfläche.
*Entscheidung, ob das Becken zu Beobachtungsbeginn leer war:*
Da die Fläche unter dem Graphen von h wohl größer ist als die Fläche unter dem Graphen von g, ist mehr Wasser abgeflossen als zugeflossen.

Abitur allg. Gymnasium Leistungskurs Wahlteil Analysis 2022 BW

Klausuraufschrieb A2.1

a) *Momentane Änderungsrate des Wasservolumens eine Stunde nach Beobachtungsbeginn an.*

$f(1) = (2-1)e^{2-1} = e$

*Begründung, dass das Wasservolumen in den ersten beiden Stunden nach Beobachtungsbeginn niemals abnimmt.*

$f(t) = 0$

$(2t - t^2)e^{2-t} = 0$

$2t - t^2 = 0$

$t(2-t) = 0$

$t_1 = 0;\ \ t_2 = 2$

Wegen $f(1) = e > 0$ und keiner Nullstelle zwischen $t_1 = 0$ und $t_2 = 2$ kann das Wasservolumen in den ersten beiden Stunden niemals abnehmen.

*Zeitpunkt des Minimums der momentanen Änderungsrate:*

$f(t) = (2t - t^2)e^{2-t}$

Für erste Ableitung Produktregel erforderlich:

$u = 2t - t^2 \qquad u' = 2 - 2t$

$v = e^{2-t} \qquad v' = -e^{2-t}$

$f'(t) = (2-2t) \cdot e^{2-t} - e^{2-t}(2t - t^2)$

$f'(t) = e^{2-t} \cdot (2 - 4t + t^2)$

Für zweite Ableitung Produktregel erforderlich:

$u = t^2 - 4t + 2 \qquad u' = 2t - 4$

$v = e^{2-t} \qquad v' = -e^{2-t}$

$f''(t) = (2t-4) \cdot e^{2-t} - e^{2-t}(t^2 - 4t + 2)$

$f''(t) = e^{2-t} \cdot (6t - t^2 - 6)$

$f'(t) = 0$

$t^2 - 4t + 2 = 0 \qquad | \quad$ Satz vom Nullprodukt

$t_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4-2} = 2 \pm \sqrt{2}$

$f''^{(2+\sqrt{2})} = e^{-\sqrt{2}} \cdot \left(12 + 6 \cdot \sqrt{2} - 6 - 4 \cdot \sqrt{2} - 6\right) = 4 \cdot \sqrt{2}e^{-\sqrt{2}} > 0$

An der Stelle $\mathrm{x}_0 = 2 + \sqrt{2}$ liegt ein Tiefpunkt.

Abitur allg. Gymnasium Leistungskurs Wahlteil Analysis 2022 BW

b) *Ermittlung des Wasservolumen im Becken zu Beobachtungsbeginn:*
*Zuname in den ersten beiden Stunden:*
$z = \int_0^2 f(t)\,dt = [F(t)]_0^2 = F(2) - F(0)$
$z = 4e^{2-2} - 0e^{2-0} = 4\,m^3$
Beckeninhalt nach 2 Stunden gegeben mit $4\,m^3$.
Somit Anfangsbestand von $2\,m^3$.

c) Nachweis eines Zeitpunkts $t_0$.
Wegen des Anfangsbestandes gilt nun $F^*(t) = F(t) + 2$.
Bestimmung der Wendetangente an $F^*(t)$:
$W^*\left(2+\sqrt{2}\middle|F^*(2+\sqrt{2})\right)$
$F^*(2+\sqrt{2}) = \left(2+\sqrt{2}\right)^2 \cdot e^{-\sqrt{2}} + 2 = 4{,}83$
$f(2+\sqrt{2}) = \left(2\cdot(2+\sqrt{2}) - (2+\sqrt{2})^2\right)e^{-\sqrt{2}} = -4$
$t^*(t) = f(2+\sqrt{2})\cdot\left(x - (2+\sqrt{2})\right) + F^*(2+\sqrt{2})$.
$t^*(t) = -1{,}17(t - 3{,}41) + 4{,}83$
$t^*(t) = -1{,}17x + 8{,}82$
Nullstelle von $t^*(t)$:
$1{,}17t = 8{,}82$ ➔ $t = 7{,}538 > 7$
Selbst eine Tangente in der größten Abnahme von $F^*(t)$ hat eine Nullstelle $t > 7$, sodass es kein $t_0$ gibt, damit das Becken 7 Stunden nach Beobachtungsbeginn leer ist.

d) *Zeitraum, in dem das Wasservolumen in diesem Becken abnimmt:*
Dies ist der Zeitraum, in dem der Graph der Funktion $h$ oberhalb des Graphen der Funktion $g$ verläuft.
Aus der Grafik abgelesen:
Das Wasservolumen nimmt im Zeitraum von $4$ bis $11$ Stunden nach Beobachtungszeitraum ab.
*Untersuchung, ob abfließendes Wasser in einen Tank höher als $5\,m$ steigt.*
Funktionsgleichungen sind nicht gegeben, damit bleibt nur „Kästchenzählen".
Das Auszählen ergibt etwa $39$ Kästchen. Dies entspricht $39\,m^3$abgeflossenes Wasser.
$\frac{39\,m^3}{12\,m^2} = 3{,}25\,m$ ➔ Das Wasser steigt nicht höher als $5\,m$.

*Entscheidung, ob das Becken zu Beobachtungsbeginn leer war:*
Da die Fläche unter dem Graphen von h größer ist als die Fläche unter dem Graphen von g, ist mehr Wasser abgeflossen als zugeflossen.
Das Becken war am Anfang nicht leer.

Lösungslogik A2.2

a) *Asymptoten der Funktion $G_a$:*
In Definitionslücken existieren senkrechte Asymptoten der Form $x = a$, im Verhalten im Unendlichen existieren waagrechte Asymptoten der Form $y = a$.
*Nachweis der ersten Ableitung von $k_a$:*
Wir bestimmen die erste Ableitung der Funktion und fassen die entstehenden beiden Brüche zu eiben Bruch zusammen.
*Nachweis eines Extremwertes von $k_a$:*
Wir setzen die erste Ableitung auf Null und lösen nach $x$ auf. Da es nur eine einzige Lösung gibt, existiert auch nur eine Extremstelle.
Wir bilden die zweite Ableitung und entscheiden für welche Werte von $a$ die zweiter Ableitung negativ ist.

b) *Nachweis einer Ursprungstangente.*
Die Tangente muss die Gleichung
$$t(x) = k_a'(x_0) \cdot (x - x_0) + k_a(x_0)$$
aufweisen. Mit einer Punktprobe über den Ursprung erhalten wir $-k_a'(x_0) \cdot x_0 + k_a(x_0) = 0$.

Klausuraufschrieb A2.2

$k_a(x) = \frac{1}{x} - \frac{a}{x^2}$

a) *Asymptoten der Funktion $G_a$:*

$\lim\limits_{x\to|\infty|} \frac{1}{x} = 0;\quad \lim\limits_{x\to|\infty|} \frac{a}{x^2} = 0;$

$G_a$ hat eine waagrechte Asymptote $y = 0$.

$\mathbb{D} = x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$G_a$ hat eine senkrechte Asymptote $x = 0$.

*Nachweis der ersten Ableitung von $k_a$:*

$k_a{}'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{2a}{x^3}$

$k_a{}'(x) = \frac{2a-x}{x^3}$ q.e.d.

*Nachweis eines Extremwertes von $k_a$:*

$k_a{}'(x) = 0$

$\frac{2a-x}{x^3} = 0 \quad \Rightarrow \quad 2a - x = 0$

$x = 2a$.

$k_a(2a) = \frac{1}{2a} - \frac{a}{4a^2} = \frac{1}{2a} - \frac{1}{4a} = \frac{1}{4a}$

Der Graph der Funktion hat in $P\left(2a\middle|\frac{1}{4a}\right)$ einen Extrempunkt.

$k_a{}''(x) = +\frac{2}{x^3} - \frac{6a}{x^4} = \frac{2x-6a}{x^4}$

$k_a{}''(2a) = \frac{4a-6a}{16a^4} = \frac{-a}{8a^4} = -\frac{1}{8a^3}$

$k_a{}''(2a) < 0$ für $a > 0$

Für $a > 0$ handelt es sich um einen Hochpunkt.

b) *Nachweis einer Ursprungstangente.*

Sei $P_a(x_0|k_a(x_0))$ der Punkt auf $G_a$, dann gilt für eine Ursprungstangente:

$t(x) = k_a{}'(x_0) \cdot (x - x_0) + k_a(x_0)$

Punktprobe mit dem Ursprung:

$0 = k_a{}'(x_0) \cdot (0 - x_0) + k_a(x_0)$

$-k_a'(x_0) \cdot x_0 + k_a(x_0) = 0$

$-\left(-\frac{1}{x_0} + \frac{2a}{x_0^2}\right) + \frac{1}{x_0} - \frac{a}{x_0^2} = 0 \qquad | \quad \cdot x_0^2$

$x_0 - 2a + x_0 - a = 0$

$2x_0 - 3a = 0$

$2x_0 = 3a$

$x_0 = \frac{3}{2}a$

Für $x_0 = \frac{3}{2}a$ verläuft die Tangente an $P_a(x_0|k_a(x_0))$ durch den Ursprung.