Abituraufgaben allg. bildendes Gymnasium Pflichtteil 2009 BW

Aufgabe A1

Bilden Sie die Ableitung der Funktion f mit $f(x) = x^2 \cdot \sin(3x+1)$.

Aufgabe A2

Berechnen Sie das Integral $\int_4^9 \left(\frac{2}{\sqrt{x}} - 1\right) dx$.

Aufgabe A3

Lösen Sie die Gleichung $(2x^2 - 8) \cdot (e^{2x} - 6) = 0$.

Aufgabe A4

Das Schaubild der Funktion f mit $f(x) = -x^3 + 3x^2 - x - 3$ besitzt einen Wendepunkt. Bestimmen Sie eine Gleichung der Tangente an diesen Wendepunkt.

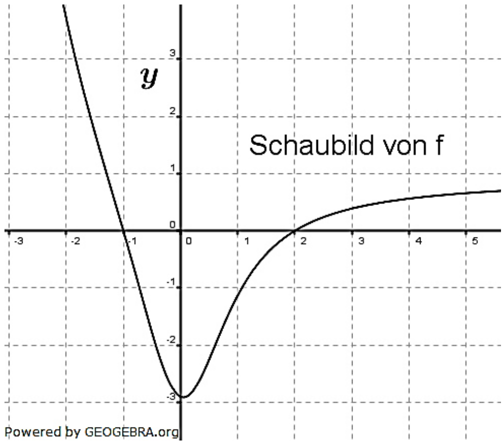
Aufgabe A5

Die Abbildung zeigt das Schaubild einer Funktion f.
F ist eine Stammfunktion von f.

a) Welche Aussagen über F ergeben sich daraus um Bereich $-2 < x < 7$ hinsichtlich
- Extremstellen
- Wendestellen
- Nullstellen?

Begründen Sie Ihre Antworten.

b) Begründen Sie, dass $F(6) - F(2) > 1$ gilt.



Aufgabe A6

Untersuchen Sie, ob die Vektoren $\begin{pmatrix}-2\\-3\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\3\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}$ linear unabhängig sind.

Aufgabe A7

Gegeben sind die Ebene $E: x_1 + x_2 = 4$ und die Gerade

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\3\\3\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}.$$

a) Veranschaulichen Sie die Ebene E in einem Koordinatensystem.

b) Untersuchen Sie die gegenseitige Lage von g und E.

c) Bestimmen Sie den Abstand des Ursprungs von der Ebene E.

Aufgabe A8

Gegeben sind eine Gerade g und ein Punkt A im Raum. A liegt nicht auf g.
A wird an der Geraden g gespiegelt.
Beschreiben Sie ein Verfahren, um den Bildpunkt A' zu bestimmen.

Lösung A1

$f(x) = x^2 \cdot sin(3x+1)$ Produktregel erforderlich

$f'(u \cdot v) = u'v + v'u$
$u = x^2 \qquad u' = 2x$
$v = sin(3x+1) \qquad v' = 3cos(3x+1)$
$f'(x) = 2x \cdot sin(3x+1) + x^2 \cdot 3 \cdot cos(3x+1)$
$f'(x) = 2x\, sin(3x+1) + 3x^2\, cos(3x+1)$

Lösung A2

$\int_4^9 \left(\frac{2}{\sqrt{x}} - 1\right) dx$ Summenregel mit Potenzregel erforderlich

---

$$\int_4^9 \left(\frac{2}{\sqrt{x}} - 1\right) dx = \int_4^9 \left(2 \cdot x^{-\frac{1}{2}} - 1\right) dx = \left[\frac{2 \cdot x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} - x\right]_4^9 = \left[4 \cdot \sqrt{x} - x\right]_4^9$$
$$= 4 \cdot 3 - 9 - (4 \cdot 2 - 4) = -1$$

Lösung A3

$(2x^2 - 8) \cdot (e^{2x} - 6) = 0$ Satz vom Nullprodukt

$2x^2 - 8 = 0$ | Satz vom Nullprodukt
$2x^2 = 8;\ x^2 = 4 \quad \Longrightarrow \quad x_1 = 2;\ x_2 = -2$
$e^{2x} - 6 = 0$ | Satz vom Nullprodukt
$e^{2x} = 6$ | ln
$2xln(e) = ln(6) \quad \Longrightarrow \quad x_3 = \frac{ln(6)}{2}$
$\mathbb{L} = \left\{-2; \frac{1}{2} ln(6); 2\right\}$

Lösung A4

Lösungslogik:
Berechnung des Wendepunktes über $f''(x) = 0$ und $f(f''(x) = 0)$.
Bestimmung der Steigung im Wendepunkt über $f'(f''(x) = 0)$.
Tangentengleichung $t(x)$ über die Punktsteigungsformel.

Klausuraufschrieb:
$f'(x) = -3x^2 + 6x - 1$
$f''(x) = -6x + 6$
$-6x + 6 = 0 \implies x = 1$
$f(1) = -1 + 3 - 1 - 3 = -2 \implies WP(1|-2)$
$f'(1) = -3 + 6 - 1 = 2$
$t(x) = 2(x-1) - 2 = 2x - 4$

Lösung A5

a) Extremstellen einer Stammfunktion führen zu Nullstellen mit Vorzeichenwechsel bei der Ableitung. Der Graph von F hat zwei Extremstellen bei $x = -1$ und $x = 2$. Wegen Vorzeichenwechsel von $+$ nach $-$ bei $x = -1$ ist dort ein Hochpunkt. Wegen Vorzeichenwechsel von $-$ nach $+$ bei $x = 2$ ist dort ein Tiefpunkt.
Wendestellen einer Stammfunktion führen zu Extremstellen bei der Ableitung. Der Graph von F hat eine Wendestelle bei $x = 0$. Im Wendepunkt herrscht negative Steigung.
Über Nullstellen kann keine Aussage getroffen werden, da mit F auch jede Funktion G mit $G(x) = F(x) + C$ eine Stammfunktion sein kann.

b) $F(6) - F(2) = \int_2^6 f(x)dx$ ist der Inhalt der Fläche zwischen dem Graphen von f und der x–Achse im Bereich $2 \leq x \leq 6$. Dieser ist aus der Zeichnung ersichtlich größer als 1. Somit gilt $F(6) - F(2) > 1$.

Lösung A6

Lösungslogik

Drei Vektoren sind dann linear unabhängig, wenn der Betrag des Spatproduktes der drei Vektoren größer ist als Null. Der Betrag des Spatproduktes aus drei Vektoren ist gleich dem Volumen des durch die Vektoren aufgespannten Parallelepipeds. Ist dieses Volumen gleich Null, so sind die Vektoren abhängig. Entsteht ein Volumen, so sind die Vektoren unabhängig.

Klausuraufschrieb

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}; \ \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}; \ \vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\left|\left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \circ \vec{c}\right| = \left|\left(\begin{pmatrix} \mathbf{-2} \\ \mathbf{-3} \\ \mathbf{4} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \mathbf{4} \\ \mathbf{3} \\ \mathbf{2} \end{pmatrix}\right) \circ \begin{pmatrix} \mathbf{2} \\ \mathbf{-2} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix}\right|$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -18 \\ 20 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\left|\begin{pmatrix} -18 \\ 20 \\ 6 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right| = |-36 - 40 + 6| = 70$$

Die drei Vektoren sind voneinander unabhängig.

Lösung A7

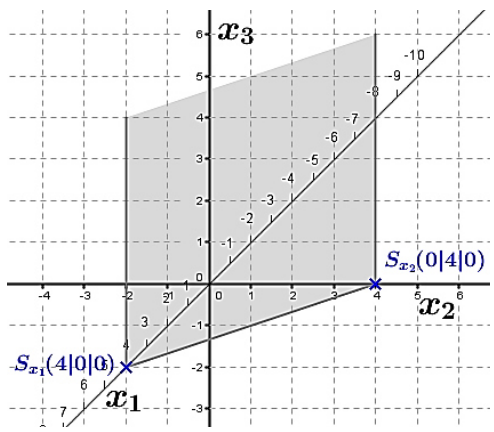
Lösungslogik

a) Wir ermitteln die Spurpunkte der Ebene und zeichnen darüber die Ebene in das Koordinatensystem ein.

b) $E \parallel g$ wenn $\overrightarrow{rv_g} \perp \cdot \overrightarrow{n_E}$ (Orthogonalitätsbedingung). Danach Prüfung, ob die Gerade eventuell in E verläuft über $E \cap g$.

c) Abstand Punkt Ebene über die HNF mit dem Ursprung als Punkt.

Klausuraufschrieb



a) $S_{x_1}(4|0|0)$; $S_{x_2}(0|4|0)$; S_{x_3} nicht vorhanden, da x_3–Koordinate fehlt.

b) $\overrightarrow{n_E} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{rv_g} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{n_E} \circ \overrightarrow{rv_g} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 - 1 = 0$

$E \cap g$:

$x_1 = 1 + r$; $x_2 = 3 - r$

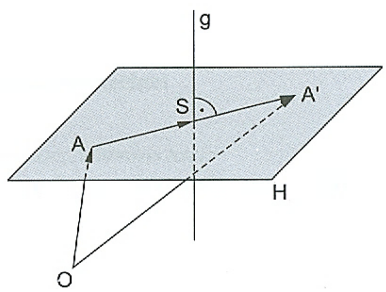
$1 + r + 3 - r = 4 \quad \Rightarrow \quad 4 = 4$

Das Gleichungssystem hat unendlich viele Lösungen, somit liegt g in E.

c) $d = \left|\frac{x_1 + x_2 - 4}{\sqrt{1^2 + 1^2}}\right|$ mit $O(0|0|0)$:

$d = \left|\frac{0 + 0 - 4}{\sqrt{1^2 + 1^2}}\right| = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2 \cdot \sqrt{2}$

Lösung A8



Man bestimmt die Gleichung einer Hilfsebene, die durch A geht und orthogonal zur Geraden g ist. Der Normalenvektor der Ebene ist gleich dem Richtungsvektor der Geraden.

Man schneidet die Gerade g mit der Ebene E und errechnet daraus die Koordinaten des Schnittpunktes S.

Für den Bildpunkt A' gilt dann

$\overrightarrow{OA'} = \overrightarrow{OA} + 2 \cdot \overrightarrow{AS}$ bzw.

$\overrightarrow{OA'} = \overrightarrow{OS} + \overrightarrow{AS}$