Abituraufgaben allg. bildendes Gymnasium Pflichtteil 2016 BW

Aufgabe A1

Bilden Sie die Ableitung der Funktion f mit $f(x) = (5x+1) \cdot sin(x^2)$.

Aufgabe A2

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \frac{48}{(2x-4)^3}$.

Bestimmen Sie diejenige Stammfunktion F von f mit $F(3) = 1$.

Aufgabe A3

Lösen Sie die Gleichung $3 - e^x = \frac{2}{e^x}$.

Aufgabe A4

Der Graph der Funktion f mit $f(x) = -\frac{1}{6}x^3 + x^2 - x$ besitzt einen Wendepunkt.

Zeigen Sie, dass $y = x - \frac{4}{3}$ eine Gleichung der Tangente in diesem Wendepunkt ist.

Aufgabe A5

Die Abbildung zeigt den Graphen einer Stammfunktion F einer Funktion f.

Entscheiden Sie, ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind.

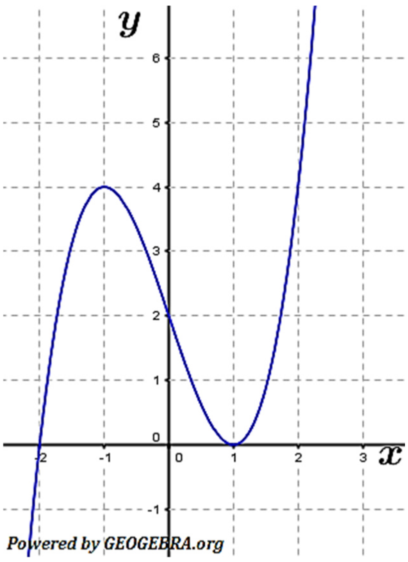
Bergründen Sie jeweils Ihre Entscheidung.

(1) $f(1)$=F(1)

(2) $\int_0^2 f(x)dx = 4$

(3) f' besitzt im Bereich $-1 \leq x \leq 1$ eine Nullstelle.

(4) $f\big(F(-2)\big) > 0$



Aufgabe A6

Gegeben ist die Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$.

a) Untersuchen Sie, ob es einen Punkt auf g gibt, dessen drei Koordinaten identisch sind.

b) Die Gerade h verläuft durch $Q(8|5|10)$ und schneidet g orthogonal. Bestimmen Sie eine Gleichung von h.

Aufgabe A7

Gegeben ist die Ebene E: $4x_1 + 4x_2 + 7x_3 = 28$.
Es gibt zwei zu E parallele Ebenen F und G, die vom Ursprung den Abstand 2 haben. Bestimmen Sie jeweils eine Gleichung von F und G.

Aufgabe A8

Bei einem Glücksrad werden die Zahlen 1, 2, 3 und 4 bei einmaligem Drehen mit folgenden Wahrscheinlichkeiten angezeigt:

Zahl	1	2	3	4
Wahrscheinlichkeit	$0{,}4$	$0{,}1$	$0{,}3$	$0{,}2$

a) Das Glücksrad wird einmal gedreht
Geben Sie zwei verschiedene Ereignisse an, deren Wahrscheinlichkeit jeweils $0{,}7$ beträgt.

b) An dem Glücksrad sollen nun die Wahrscheinlichkeiten für die Zahlen 1 und 2 so verändert werden, dass das Spiel fair ist.
Für einen Einsatz von $2{,}50\,€$ darf man einmal am Glücksrad drehen. Die angezeigte Zahl gibt den Auszahlungsbetrag in EURO an.
Bestimmen Sie die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten für die Zahlen 1 und 2.

Aufgabe A9

Von zwei Kugeln K_1 und K_2 sind die Mittelpunkte M_1 und M_2 sowie die Radien r_1 und r_2 bekannt. Die Kugeln berühren einander von außen im Punkt B.
Beschreiben Sie ein Verfahren, mit dem man B bestimmen kann.

Lösung A1

$f(x) = (5x+1) \cdot sin(x^2)$ Produktregel und Kettenregel erforderlich

---

$f'(u \cdot v) = u' \cdot v + v' \cdot u$
$u = 5x + 1$ $u' = 5$
$v = sin(x^2)$ $v' = 2x \cdot cos(x^2)$
$f'(x) = 5 \cdot sin(x^2) + 2x(5x+1)cos(x^2)$

Lösung A2

$f(x) = \frac{48}{(2x-4)^3}$ Potenzregel erforderlich

$\int 48 \cdot (2x-4)^{-3}\, dx = 48 \cdot \frac{(2x-4)^{-2}}{-2 \cdot 2} + C = -\frac{12}{(2x-4)^2} + C$
$F(x) = -\frac{12}{(2x-4)^2} + C$
$1 = -\frac{12}{(2 \cdot 3-4)^2} + C$
$1 = -3 + C \Longrightarrow \quad C = 4$
$F(x) = -\frac{12}{(2x-4)^2} + 4$

Lösung A3

$3 - e^x = \frac{2}{e^x}$ Substitution erforderlich

$3 - e^x = \frac{2}{e^x}$ | $\cdot e^x$
$3e^x - e^{2x} = 2$ | $-2; \ \cdot(-1)$
$e^{2x} - 3e^x + 2 = 0$
Substitution: $u = e^x$
$u^2 - 3u + 2 = 0$
$u_{1,2} = 1{,}5 \pm \sqrt{2{,}25 - 2} = 1{,}5 \pm 0{,}5$ | p/q-Formel
$u_1 = 2; \ u_2 = 1$
Resubstitution:
$e^{x_1} = 2$ $e^{x_2} = 1$
$x_1 = ln(2)$ $x_2 = 0$
$\mathbb{L} = \{0; ln(2)\}$

Lösung A4

Lösungslogik

Wendepunktbestimmung über $f''(x) = 0$ und $f(x_0)$, Steigungsbestimmung über $f'(x_0)$.
Aufstellen der Tangentengleichung über Punkt-Steigungs-Formel und Vergleich mit $y = x - \frac{4}{3}$.

Klausuraufschrieb

$f'(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x - 1; \quad f''(x) = -x + 2$

$-x + 2 = 0 \implies x = 2$

$f(2) = -\frac{1}{6} \cdot (8) + 4 - 2 = \frac{2}{3}$

$f'(2) = -2 + 4 - 1 = 1$

$y = 1(x - 2) + \frac{2}{3}$ | Punkt-Steigungs-Formel

$y = x - \frac{4}{3}$ **q.e.d.**

Lösung A5

(1) *f(1)=F(1).*
Die Aussage ist wahr. $F(1) = 0$ wegen Berührpunkt mit x-Achse, der ein Tiefpunkt ist. Somit ist $f'(1) = 0$.

(2) $\int_0^2 f(x)dx = 4$
Die Aussage falsch. Das Integral besagt, dass *F(2)-F(0)* gleich *4* sein soll. Mit *F(2)=4* und *F(0)=2* ergibt sich *F(2)-F(0)=2*.

(3) f' besitzt im Bereich $-1 \leq x \leq 1$ eine Nullstelle.
Die Aussage ist wahr. F hat bei $x = 0$ einen Wendepunkt. Somit ist $f''(0) = 0$.

(4) $f\big(F(-2)\big) > 0$.
Die Aussage ist falsch. $F(-2) = 0$; $f\big(F(-2)\big) = f(0)$. Der Graph von F hat in $x_0 = 0$ negative Steigung, somit ist $f(0) < 0$.

Lösung A6

Lösungslogik

a) Der Punkt P soll drei identische Koordinaten haben. Diese seien $P(a_1|a_2|a_3)$ mit $a_1 = a_2 = a_3$.
Eine Punktprobe mit $P(a|a|a)$ zeigt, ob es ein r gibt, welches diese Bedingung erfüllt.

b) Sei S der Schnittpunkt von g und h. Wegen der Orthogonalität muss gelten:
$\overrightarrow{rv_g} \circ \overrightarrow{rv_h} = 0$, wobei $\overrightarrow{rv_h} = \overrightarrow{QS}$ ist.

Klausuraufschrieb

a) $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$

(1) $a_1 = 3 + r$
(2) $a_2 = 4r$
(3) $a_3 = 1 + 3r$
(1) ∩(2)
$4r = 3 + r \Longrightarrow \quad r = 1$
$r \longrightarrow (1); (2); (3)$
$a_1 = 3 + 1 = 4$
$a_2 = 4 \cdot 1 = 4$
$a_3 = 1 + 3 = 4$
Der Punkt $P(4|4|4)$ liegt auf g.

b) S sei Schnittpunkt von g und h. Dann gilt:

$\overrightarrow{rv_g} \circ \overrightarrow{rv_h} = 0$ mit $\overrightarrow{rv_g} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{rv_h} = \overrightarrow{QS} = \overrightarrow{OS} - \overrightarrow{OQ}$

$\overrightarrow{OS} = \begin{pmatrix} 3 + r \\ 4r \\ 1 + 3r \end{pmatrix}$; $\quad \overrightarrow{QS} = \begin{pmatrix} 3 + r - 8 \\ 4r - 5 \\ 1 + 3r - 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r - 5 \\ 4r - 5 \\ 3r - 9 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} r - 5 \\ 4r - 5 \\ 3r - 9 \end{pmatrix} = r - 5 + 4 \cdot (4r - 5) + 3 \cdot (3r - 9)$$
$$= 26r - 52$$

$26r - 52 = 0 \qquad |$ wegen Orthogonalität
$r = 2$

$\overrightarrow{QS} = \begin{pmatrix} 2 - 5 \\ 8 - 5 \\ 6 - 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} = -3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Lösung A7

Lösungslogik

Parallele Ebenen haben dieselben Normalenvektoren.

Klausuraufschrieb

$F\colon\ 4x_1 + 4x_2 + 7x_3 = d$

$h = \frac{|4x_1+4x_2+7x_3-d|}{\sqrt{16+16+49}} = 2$ | Hessesche Normalenform

$\frac{|-d|}{\sqrt{81}} = 2$ | HNF für Ursprung

$|-d| = 18 \Rightarrow\ -d = 18;\ -d = -18$

Die beiden parallelen Ebenen $F\colon\ 4x_1 + 4x_2 + 7x_3 = 18$ *und* $G\colon\ 4x_1 + 4x_2 + 7x_3 = -18$ *haben vom Ursprung den Abstand* 2.

Lösung A8

a) A: „Es erscheint die 1."
B: „Es erscheint die 2."
C: „Es erscheint die 3."
D: „Es erscheint die 4."

$P(A \cup C) = P(A) + P(C) = 0{,}4 + 0{,}3 = 0{,}7$

$P(\overline{C}) = P(A) + P(B) + P(D) = 0{,}4 + 0{,}1 + 0{,}2 = 0{,}7$

b) Erwartungswert: $E(X) = 2{,}50\ €$

Betrachtung aus der Sicht des Spielers:

x_i	$1{,}00\ €$	$2{,}00\ €$	$3{,}00\ €$	$4{,}00\ €$
$P(X = x_i)$	p_1	p_2	$0{,}3$	$0{,}2$
$x_i \cdot P(X = x_i)$	$p_1\ €$	$2 \cdot p_2\ €$	$0{,}3 \cdot 3€$	$0{,}2 \cdot 4\ €$
$\sum_1^i x_i \cdot P(X = x_i)$	$p_1\ +$	$2 \cdot p_2\ +$	$0{,}9\ +$	$0{,}8$

$E(X) = p_1 + 2p_2 + 0{,}9 + 0{,}8 = 2{,}5$

Weiterhin muss gelten:

$p_1 + p_2 + 0{,}3 + 0{,}2 = 1 \Rightarrow\ p_1 = 1 - p_2 - 0{,}3 - 0{,}2 = 0{,}5 - p_2$

$p_1 \longrightarrow E(X)$

$0{,}5 - p_2 + 2p_2 + 0{,}9 + 0{,}8 = 2{,}5$

$2{,}2 + p_2 = 2{,}5 \Rightarrow\ p_2 = 0{,}3$

$p_1 = 0{,}5 - p_2 = 0{,}2$

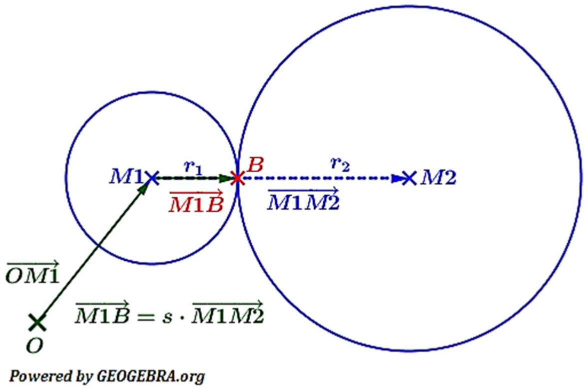
Mit einer Wahrscheinlichkeit von $0{,}2$ für die Zahl 1 und $0{,}3$ für die Zahl 2 ist das Spiel fair.

Lösung A9

Lösungslogik

Die Angabe über die Kugeln ist lediglich der Hinweis, dass es sich um eine Aufgabe der analytischen Geometrie im Raum handelt. Für die weitere Lösung ist dann das Thema „Kugeln" irrelevant, da ein geeigneter Schnitt durch die Situation im $R2$ dargestellt werden kann (siehe Grafik).

Klausuraufschrieb



Der Vektor $\overrightarrow{M1M2}$ verbindet die beiden Mittelpunkte. Auf dieser Strecke befindet sich der Berührpunkt B.
Die Länge der Verbindungsstrecke ist $\left|\overrightarrow{M1M2}\right| = r_1 + r_2$.
Der Vektor $\overrightarrow{M1B}$ verbindet den Mittelpunkt $M1$ mit dem Berührpunkt B. Seine Länge entspricht einer Teilstrecke des Vektors $\overrightarrow{M1M2}$, also $\overrightarrow{M1B} = s \cdot \overrightarrow{M1M2}$
Der Einheitsvektor von $\overrightarrow{M1M2}$ ist $\frac{1}{\left|\overrightarrow{M1M2}\right|} \cdot \overrightarrow{M1M2}$.
Die Koordinaten des Berührpunktes lassen sich damit über die Linearkombination
$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OM1} + \overrightarrow{M1B} = \overrightarrow{OM1} + s \cdot \overrightarrow{M1M2} = \overrightarrow{OM1} + \frac{r_1}{\left|\overrightarrow{M1M2}\right|} \cdot \overrightarrow{M1M2} = \overrightarrow{OM1} + \frac{r_1}{r_1+r_2} \cdot \overrightarrow{M1M2}$
ermitteln.