

Lösung A1

$$f(x) = (5x + 1) \cdot \sin(x^2) \quad \text{Produktregel und Kettenregel erforderlich}$$

$$f'(u \cdot v) = u' \cdot v + v' \cdot u$$

$$u = 5x + 1$$

$$u' = 5$$

$$v = \sin(x^2)$$

$$v' = 2x \cdot \cos(x^2)$$

$$f'(x) = 5 \cdot \sin(x^2) + 2x(5x + 1)\cos(x^2)$$

Lösung A2

$$f(x) = \frac{48}{(2x-4)^3} \quad \text{Potenzregel erforderlich}$$

$$\int 48 \cdot (2x - 4)^{-3} dx = 48 \cdot \frac{(2x-4)^{-2}}{-2 \cdot 2} + C = -\frac{12}{(2x-4)^2} + C$$

$$F(x) = -\frac{12}{(2x-4)^2} + C$$

$$1 = -\frac{12}{(2 \cdot 3 - 4)^2} + C$$

$$1 = -3 + C \Rightarrow C = 4$$

$$F(x) = -\frac{12}{(2x-4)^2} + 4$$

Lösung A3

$$3 - e^x = \frac{2}{e^x} \quad \text{Substitution erforderlich}$$

$$3 - e^x = \frac{2}{e^x} \quad | \cdot e^x$$

$$3e^x - e^{2x} = 2 \quad | -2; \cdot (-1)$$

$$e^{2x} - 3e^x + 2 = 0$$

$$\text{Substitution: } u = e^x$$

$$u^2 - 3u + 2 = 0$$

$$u_{1,2} = 1,5 \pm \sqrt{2,25 - 2} = 1,5 \pm 0,5 \quad | \quad p/q\text{-Formel}$$

$$u_1 = 2; u_2 = 1$$

$$\text{Resubstitution:}$$

$$e^{x_1} = 2$$

$$e^{x_2} = 1$$

$$x_1 = \ln(2)$$

$$x_2 = 0$$

$$\mathbb{L} = \{0; \ln(2)\}$$

Lösung A4

Lösungslogik

Wendepunktbestimmung über $f''(x) = 0$ und $f(x_0)$, Steigungsbestimmung über $f'(x_0)$.

Aufstellen der Tangentengleichung über Punkt-Steigungs-Formel und Vergleich mit $y = x - \frac{4}{3}$.

Klausuraufschrieb

$$f'(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x - 1; \quad f''(x) = -x + 2$$

$$-x + 2 = 0 \Rightarrow x = 2$$

$$f(2) = -\frac{1}{6} \cdot (8) + 4 - 2 = \frac{2}{3}$$

$$f'(2) = -2 + 4 - 1 = 1$$

$$y = 1(x - 2) + \frac{2}{3}$$

| Punkt-Steigungs-Formel

$$y = x - \frac{4}{3}$$

q.e.d.

Lösung A5

(1) $f(1) = F(1)$.

Die Aussage ist wahr. $F(1) = 0$ wegen Berührungspunkt mit x -Achse, der ein Tiefpunkt ist. Somit ist $f'(1) = 0$.

(2) $\int_0^2 f(x) dx = 4$

Die Aussage falsch. Das Integral besagt, dass $F(2) - F(0)$ gleich 4 sein soll. Mit $F(2) = 4$ und $F(0) = 2$ ergibt sich $F(2) - F(0) = 2$.

(3) f' besitzt im Bereich $-1 \leq x \leq 1$ eine Nullstelle.

Die Aussage ist wahr. F hat bei $x = 0$ einen Wendepunkt. Somit ist $f''(0) = 0$.

(4) $f(F(-2)) > 0$.

Die Aussage ist falsch. $F(-2) = 0$; $f(F(-2)) = f(0)$. Der Graph von F hat in $x_0 = 0$ negative Steigung, somit ist $f(0) < 0$.

Lösung A6

Lösungslogik

- a) Der Punkt P soll drei identische Koordinaten haben. Diese seien $P(a_1|a_2|a_3)$ mit $a_1 = a_2 = a_3$.
Eine Punktprobe mit $P(a|a|a)$ zeigt, ob es ein r gibt, welches diese Bedingung erfüllt.
- b) Sei S der Schnittpunkt von g und h . Wegen der Orthogonalität muss gelten:
 $\vec{rv}_g \circ \vec{rv}_h = 0$, wobei $\vec{rv}_h = \vec{QS}$ ist.

Klausuraufschrieb

a)
$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

(1) $a_1 = 3 + r$

(2) $a_2 = 4r$

(3) $a_3 = 1 + 3r$

(1) \cap (2)

$$4r = 3 + r \Rightarrow r = 1$$

$r \rightarrow$ (1); (2); (3)

$a_1 = 3 + 1 = 4$

$a_2 = 4 \cdot 1 = 4$

$a_3 = 1 + 3 = 4$

Der Punkt $P(4|4|4)$ liegt auf g .

- b) S sei Schnittpunkt von g und h . Dann gilt:

$\vec{rv}_g \circ \vec{rv}_h = 0$ mit $\vec{rv}_g = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\vec{rv}_h = \vec{QS} = \vec{OS} - \vec{OQ}$

$$\vec{OS} = \begin{pmatrix} 3+r \\ 4r \\ 1+3r \end{pmatrix}; \quad \vec{QS} = \begin{pmatrix} 3+r-8 \\ 4r-5 \\ 1+3r-10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r-5 \\ 4r-5 \\ 3r-9 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} r-5 \\ 4r-5 \\ 3r-9 \end{pmatrix} = r-5 + 4 \cdot (4r-5) + 3 \cdot (3r-9) \\ = 26r - 52$$

$26r - 52 = 0$

$r = 2$

| wegen Orthogonalität

$$\vec{QS} = \begin{pmatrix} 2-5 \\ 8-5 \\ 6-9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} = -3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Lösung A7

Lösungslogik

Parallele Ebenen haben dieselben Normalenvektoren.

Klausuraufschrieb

$$F: 4x_1 + 4x_2 + 7x_3 = d$$

$$h = \frac{|4x_1 + 4x_2 + 7x_3 - d|}{\sqrt{16+16+49}} = 2$$

$$\frac{|-d|}{\sqrt{81}} = 2$$

$$|-d| = 18 \Rightarrow -d = 18; -d = -18$$

Die beiden parallelen Ebenen $F: 4x_1 + 4x_2 + 7x_3 = 18$ und $G: 4x_1 + 4x_2 + 7x_3 = -18$ haben vom Ursprung den Abstand 2.

| Hessesche Normalenform

| HNF für Ursprung

Lösung A8

a) A: „Es erscheint die 1.“

B: „Es erscheint die 2.“

C: „Es erscheint die 3.“

D: „Es erscheint die 4.“

$$P(A \cup C) = P(A) + P(C) = 0,4 + 0,3 = 0,7$$

$$P(\bar{C}) = P(A) + P(B) + P(D) = 0,4 + 0,1 + 0,2 = 0,7$$

b) Erwartungswert: $E(X) = 2,50 \text{ €}$

Betrachtung aus der Sicht des Spielers:

x_i	1,00 €	2,00 €	3,00 €	4,00 €
$P(X = x_i)$	p_1	p_2	0,3	0,2
$x_i \cdot P(X = x_i)$	$p_1 \text{ €}$	$2 \cdot p_2 \text{ €}$	$0,3 \cdot 3 \text{ €}$	$0,2 \cdot 4 \text{ €}$
$\sum_1^i x_i \cdot P(X = x_i)$	$p_1 +$	$2 \cdot p_2 +$	$0,9 +$	$0,8$

$$E(X) = p_1 + 2p_2 + 0,9 + 0,8 = 2,5$$

Weiterhin muss gelten:

$$p_1 + p_2 + 0,3 + 0,2 = 1 \Rightarrow p_1 = 1 - p_2 - 0,3 - 0,2 = 0,5 - p_2$$

$$p_1 \rightarrow E(X)$$

$$0,5 - p_2 + 2p_2 + 0,9 + 0,8 = 2,5$$

$$2,2 + p_2 = 2,5 \Rightarrow p_2 = 0,3$$

$$p_1 = 0,5 - p_2 = 0,2$$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,2 für die Zahl 1 und 0,3 für die Zahl 2 ist das Spiel fair.

Lösung A9

Lösungslogik

Die Angabe über die Kugeln ist lediglich der Hinweis, dass es sich um eine Aufgabe der analytischen Geometrie im Raum handelt. Für die weitere Lösung ist dann das Thema „Kugeln“ irrelevant, da ein geeigneter Schnitt durch die Situation im R^2 dargestellt werden kann (siehe Grafik).

Klausuraufschrieb

Der Vektor $\overrightarrow{M1M2}$ verbindet die beiden Mittelpunkte. Auf dieser Strecke befindet sich der Berührungspunkt B .

Die Länge der Verbindungsstrecke ist $|\overrightarrow{M1M2}| = r_1 + r_2$.

Der Vektor $\overrightarrow{M1B}$ verbindet den Mittelpunkt $M1$ mit dem Berührungspunkt B . Seine Länge entspricht einer Teilstrecke des Vektors $\overrightarrow{M1M2}$, also $\overrightarrow{M1B} = s \cdot \overrightarrow{M1M2}$

Der Einheitsvektor von $\overrightarrow{M1M2}$ ist $\frac{1}{|\overrightarrow{M1M2}|} \cdot \overrightarrow{M1M2}$.

Die Koordinaten des Berührungspunktes lassen sich damit über die Linearkombination

$$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OM1} + \overrightarrow{M1B} = \overrightarrow{OM1} + s \cdot \overrightarrow{M1M2} = \overrightarrow{OM1} + \frac{r_1}{|\overrightarrow{M1M2}|} \cdot \overrightarrow{M1M2} = \overrightarrow{OM1} + \frac{r_1}{r_1+r_2} \cdot \overrightarrow{M1M2}$$

ermitteln.

