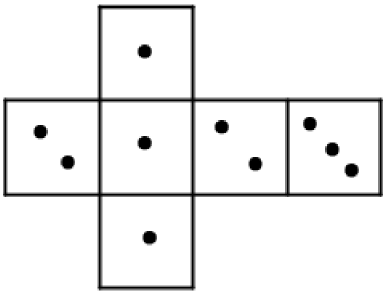
Abitur allg. bildendes Gymnasium Wahlteil Stochastik 2016 BW

Aufgabe C1

Bei einem Spiel wird ein idealer Würfel verwendet, dessen Netz in der Abbildung dargestellt ist.



a) Der Würfel wird zweimal geworfen.
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Augensumme der beiden Würfe 3 beträgt.
Nun wird der Würfel 12-mal geworfen.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass er mindestens 4-mal die Augenzahl 2 zeigt.
Die Beschriftung des Würfels soll so geändert werden, dass man bei 12-maligem Werfen des Würfels mit mindestens $99\,\%$ Wahrscheinlichkeit mindestens 4-mal die Augenzahl 3 erhält.
Auf wie vielen Seiten des Würfels muss dann die Augenzahl 3 mindestens stehen?

b) Ein Spieler hat die Vermutung, dass der ursprüngliche Würfel zu oft die Augenzahl 3 zeigt. Die Nullhypothese
H_0: „Die Wahrscheinlichkeit für die Augenzahl 3 beträgt höchstens $\frac{1}{6}$."
soll durch eine Stichprobe mit 100 Würfen auf einem Signifikanzniveau von $1\,\%$ getestet werden.
Formulieren Sie die zugehörige Entscheidungsregel in Worten.

Aufgabe C2

Eine Tanzgruppe besteht aus 8 Anfängerpaaren und 4 Fortgeschrittenenpaaren. Aus der Erfahrung vergangener Jahre weiß man, dass Anfängerpaare mit einer Wahrscheinlichkeit von $90\,\%$ bei den abendlichen Tanzstunden anwesend sind, Fortgeschrittenenpaare mit einer Wahrscheinlichkeit von $75\,\%$. Man geht davon aus, dass die Entscheidungen der Tanzpaare über die Teilnahme an der Tanzstunde voneinander unabhängig sind.

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass an einem Abend mindestens 6 Anfängerpaare und höchstens 3 Fortgeschrittenenpaare anwesend sind.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass an dem Abend mindestens 11 Paare anwesend sind?

Abitur allg. bildendes Gymnasium Wahlteil Stochastik 2016 BW

Lösung C1

Lösungslogik

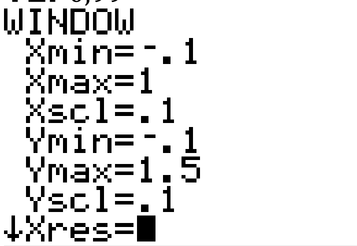
a) *Augensumme beider Würfe ist* 3*:*
Aufstellung der Einzelereignisse und Berechnung der Wahrscheinlichkeit.
Mindestens 4*-mal die Augenzahl* 2*:*
Aufstellung der Bernoulliformel mit den Ausgängen 2 und $\overline{2}$.
Anzahl der Seiten des Würfels mit der Augenzahl 3*.*
Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit p für die Augenzahl 3. Dies muss ein Vielfaches von $\frac{1}{6}$ aber $\leq \frac{6}{6}$ sein.
GTR-Einstellungen siehe Klausuraufschrieb.

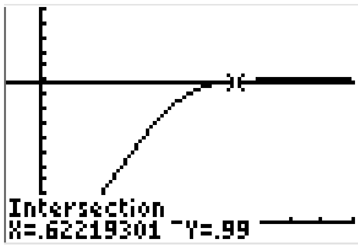
b) Hypothesentest, Formulierung der Entscheidungsregel siehe Klausuraufschrieb (keine Berechnung gefordert).

Klausuraufschrieb

a) *Augensumme beider Würfe ist* 3*:*
$P(Augensumme = 3) = P(1;2) + P(2;1)$
$P(1;2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6} = P(2;1)$
$P(Augensumme = 3) = \frac{1}{3}$
Mindestens 4*-mal die Augenzahl* 2*:*
$B_{12;\frac{1}{3}}(X \geq 4) = 1 - B_{12;\frac{1}{3}}(X \leq 3) \overset{GTR}{\approx} 0{,}607$
Anzahl der Seiten des Würfels mit der Augenzahl 3*.*
$B_{12;p}(X \geq 4) \geq 0{,}99$
$1 - B_{12;p}(X \leq 3) \geq 0{,}99 \Longrightarrow \; p \overset{GTR}{\approx} 0{,}6222 = \frac{3{,}7332}{6} \approx \frac{4}{6}$
Die 3 *muss auf mindestens* 4 *Seiten des Würfels stehen.*

GTR-Einstellungen
Y1: $1 - binocdf(12, X, 3)$
Y2: $0{,}99$





b) *Hypothesentest*
Die Nullhypothese ist H_0: $p_0 \leq \frac{1}{6}$. Die Gegenhypothese H_1: $p_1 > \frac{1}{6}$. Somit ist $p_1 > p_0$. Es ist ein rechtsseitiger Test mit einem Stichprobenumfang $n = 100$, $p = \frac{1}{6}$ und $\alpha = 0{,}01$ durchzuführen. Somit gilt:
$B_{100;\frac{1}{6}}(X \geq k) \leq 0{,}01$
$1 - B_{100;\frac{1}{6}}(X \leq k-1) \leq 0{,}01$
Der Annahmebereich ist $A = [0; 1; 2; \dots k-1]$, der Ablehnungsbereich $\overline{A} = [k; k+1; k+2; \dots 100]$
Die Nullhypothese wird verworfen, wenn mindestens k-mal die Augenzahl 3 gewürfelt wird. Die Irrtumswahrscheinlichkeit (Fehler der 1. Art) ist dann höchstens $1\,\%$ oder kleiner.

Abitur allg. bildendes Gymnasium Wahlteil Stochastik 2016 BW

Lösung C2

Lösungslogik

Es handelt sich ausschließlich um zusammengesetzte Bernoulli-Experimente, deren Wahrscheinlichkeiten mittels GTR bestimmt werden.

Klausuraufschrieb

A: „Anfängerpaare nehmen am Kurs teil“ mit $P(A) = 0{,}9$.
B: „Fortgeschrittenenpaare nehmen am Kurs teil“ mit $P(B) = 0{,}75$.

Sei X die Zufallsvariable für die Anzahl anwesender Anfängerpaare und Y die Zufallsvariable für die Anzahl anwesender Fortgeschrittenenpaare, dann gilt:

$B_{8;0,90}(X \geq 6) = 1 - B_{8;0,90}(X \leq 5) \overset{\text{GTR}}{\approx} 0{,}962$

$B_{4;0,75}(X \leq 3) \overset{\text{GTR}}{\approx} 0{,}684$

$P(X \geq 6\, und\, Y \leq 3) = 0{,}962 \cdot 0{,}684 = 0{,}658$

Die Wahrscheinlichkeit, dass an einem Abend mindestens 6 *Anfängerpaare und höchstens* 3 *Fortgeschrittenenpaare anwesend sind beträgt etwa* $66\,\%$.

Mindestens 11 Paare:

Mögliche Ereignisse:

C: „8 Anfänger- und 4 Fortgeschrittenenpaare“
D: „7 Anfänger- und 4 Fortgeschrittenenpaare“
E: „8 Anfänger- und 3 Fortgeschrittenenpaare“

Berechnung der Wahrscheinlichkeiten:

$P(X + Y > 11) = P(C) + P(D) + P(E)$

$P(C) = P(X = 8 + Y = 4) = B_{8;0,90}(X = 8) \cdot B_{4;0,75}(X = 4) \overset{\text{GTR}}{\approx} 0{,}1362$

$P(D) = P(X = 7 + Y = 4) = B_{8;0,90}(X = 7) \cdot B_{4;0,75}(X = 4) \overset{\text{GTR}}{\approx} 0{,}121$

$P(E) = P(X = 8 + Y = 3) = B_{8;0,90}(X = 8) \cdot B_{4;0,75}(X = 3) \overset{\text{GTR}}{\approx} 0{,}1816$

$P(X + Y > 11) = 0{,}1362 + 0{,}121 + 0{,}1816 = 0{,}4388$

Die Wahrscheinlichkeit, dass an dem Abend mindestens 11 *Paare anwesend sind, beträgt etwa* $44\,\%$.