Abituraufgaben Matrizen und Prozesse (Teil 4) ab 2022-2023

Aufgabe A1/2022

1. Vier verschiedene Stromanbieter A, B, C und D konkurrieren in einer Stadt um die dortigen 25200 Haushalte. Die Anzahl der Haushalte bleibt konstant. Jeder Haushalt ist an genau einen dieser Anbieter vertraglich gebunden. Verträge sind jeweils ein Jahr lang gültig. Die aktuelle Entwicklung des Wechselverhaltens der Haushalte bei den Stromanbietern lässt sich von einem Jahr zum nächsten modellhaft durch die Gleichung
$\boldsymbol{M} \cdot \overrightarrow{v_n} = \overrightarrow{v_{n+1}}$
mit

$$\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}05 & 0 & 0{,}05 \\ 0{,}15 & 0{,}8 & 0{,}05 & 0 \\ 0 & 0{,}15 & 0{,}7 & 0{,}15 \\ 0{,}05 & 0 & 0{,}25 & 0{,}8 \end{pmatrix} \text{ und } \overrightarrow{v_n} = \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{pmatrix}$$

beschrieben. Hierbei wird die Anzahl der Haushalte, die einen Vertrag mit dem entsprechenden Stromanbieter haben, ebenfalls mit A, B, C und D bezeichnet.

1.1 Interpretieren Sie den Eintrag $0{,}25$ im Sachzusammenhang.
Für zwei mögliche Paare von Stromanbietern wechseln untereinander keinerlei Haushalte. Nennen Sie diese Paare.
Geben Sie den Stromanbieter an, dessen vertraglich gebundene Haushalte am wenigsten zufrieden sind. (4P)

1.2 Im Jahr 2021 waren 3000 Haushalte an Stromanbieter A, 5000 Haushalte an B und 7000 Haushalte an C vertraglich gebunden. Bestimmen Sie für jeden Stromanbieter die zu erwartende Anzahl von Haushalten, die im Jahr 2022 an den Anbieter gebunden sein werden. (3P)

1.3 Eine Verteilung $\vec{v}$ bleibt von einem auf das nächste Jahr unverändert und Stromanbieter C bindet doppelt so viele Haushalte vertraglich an sich wie Anbieter A. Berechnen Sie hierfür die Verteilung aller Haushalte. (4P)

1.4 Anbieter B und C haben jeweils gleich viele Haushalte vertraglich an sich gebunden. Anbieter A möchte die Entwicklung beeinflussen, um langfristig ebenso viele Haushalte wie Anbieter B, bzw. Anbieter C an sich zu binden. Eine Werbeaktion von Anbieter A zielt daher darauf ab, den Anteil der alljährlichen Wechsel der Haushalte von B und D zu A um den selben Prozentsatz zu erhöhen. Im selben Maße soll sich dann der Anteil der alljährlichen Wechsel von B und D zu C verringern. Ansonsten soll das Wechselverhalten aber unverändert bleiben.
Beurteilen Sie, ob dies möglich ist und ermitteln Sie gegebenenfalls, wie viel Prozent der Haushalte dabei von Anbieter B zu C wechseln würden. (4P)

Abituraufgaben Matrizen und Prozesse (Teil 4) ab 2022-2023

Aufgabe A2/2022

2 Ein Betrieb stellt aus den Rohstoffen R_1, R_2 und R_3 die Zwischenprodukte Z, Z_2 und Z_3 her. Aus diesen Zwischenprodukten werden die Endprodukte E_1, E_2 und E_3 hergestellt. Der Materialfluss in Der Materialfluss in Mengeneinheiten (ME) ist den folgenden Tabellen zu entnehmen.

	E_1	E_2	E_3
Z_1	2	1	2
Z_2	3	0	1
Z_3	1	4	2

	E_1	E_2	E_3
R_1	43	36	33
R_2	30	15	19
R_3	37	14	20

2.1 Für einen Auftrag sollen $400\ ME$ von E_1, $600\ ME$ von E_2 und $500\ ME$ von E_3 hergestellt werden.

2.1.1 Berechnen Sie, wie viele ME der drei Rohstoffe dafür benötigt werden. (2P)

2.1.2 Für diesen Auftrag betragen die Fixkosten 2050 €, die gesamten Rohstoffkosten 400 € und die gesamten Fertigungskosten der Endprodukte betragen 1850 €. Die Fertigungskosten pro ME für Z_2 sind $2{,}5$ mal so hoch wie für Z_1. Für Z_3 sind diese Kosten $1{,}25$ mal so hoch wie für Z_1.
Die Verkaufspreise pro ME der Endprodukte betragen 20 € für E_1 und jeweils 35 € für E_2 und E_3. Es wird ein Gewinn von 8000 € erwirtschaftet.
Bestimmen Sie die Fertigungskosten pro ME der drei Zwischenprodukte. (5P)

2.2 Für einen weiteren Auftrag werden $4600\ ME$ des Zwischenprodukts Z_1, $3800\ ME$ von Z_2 und $6250\ ME$ von Z_3 hergestellt. Die Zwischenprodukte sollen für den Auftrag vollständig zu Endprodukten weiterverarbeitet werden, wobei $950\ ME$ von E_1 produziert werden sollen.
Beurteilen Sie, ob dieser Auftrag ausführbar ist. (3P)

2.3 Das Endprodukt E_3 wird zukünftig nicht mehr produziert. Im Lager befinden sich noch $30000\ ME$ des Rohstoffs R_2, die vollständig aufgebraucht werden müssen. Es sollen zudem nicht mehr als $1000\ ME$ von E_1 produziert werden.
Ermitteln Sie, wie viele ME der Rohstoffe R_1 und R_3 mindestens bzw. höchstens im Lager vorhanden sein müssen. (5P)

Abituraufgaben Matrizen und Prozesse (Teil 4) 2022-2023

Lösung A1/2022

1.1 *Interpretation des Wertes 0,25:*

$25\,\%$ der Haushalte, die bei Anbieter C einen Vertrag haben, wechseln innerhalb eines Jahres zu Anbieter D.
Für die Paare (A, C) und (B, D) wechseln untereinander keinerlei Haushalte, da die entsprechenden Einträge in der Matrix 0 sind.
Mit dem Anbieter C sind die Haushalte am wenigsten zufrieden, da nur $70\,\%$ der Haushalte bei Anbieter C von einem Jahr zum nächsten bleiben.
Bei den anderen Anbietern bleiben $80\,\%$ der Haushalte von einem Jahr zum nächsten.

1.2 *Anzahl der Haushalte bei Anbieter D:*

$25200 - 3000 - 5000 - 7000 = 10200$

$$\begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}05 & 0 & 0{,}05 \\ 0{,}15 & 0{,}8 & 0{,}05 & 0 \\ 0 & 0{,}15 & 0{,}7 & 0{,}15 \\ 0{,}05 & 0 & 0{,}25 & 0{,}8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3000 \\ 5000 \\ 7000 \\ 10200 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3160 \\ 4800 \\ 7180 \\ 10060 \end{pmatrix}$$

Anzahlen im Jahr 2022:

$A = 3160,\ B = 4800,\ C = 7180,\ D = 10060$

1.3 Da die gesuchte Verteilung gleich bleiben soll, muss gelten: $\boldsymbol{M} \cdot \vec{v} = \vec{v}$.

Es gilt $\vec{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ 2a \\ 25200 - 3a - b \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}05 & 0 & 0{,}05 \\ 0{,}15 & 0{,}8 & 0{,}05 & 0 \\ 0 & 0{,}15 & 0{,}7 & 0{,}15 \\ 0{,}05 & 0 & 0{,}25 & 0{,}8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ 2a \\ 25200 - 3a - b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ 2a \\ 25200 - 3a - b \end{pmatrix}$$

Daraus ergibt sich folgendes Gleichungssystem:

(I) $0{,}8a + 0{,}05b + 0{,}05(25200 - 3a - b) = a$

(II) $0{,}15a + 0{,}8b + 0{,}05 \cdot 2a = b$

(III) $0{,}15b + 0{,}7 \cdot 2a + 0{,}15 \cdot (25200 - 3a - b) = 2a$

(IV) $0{,}05a + 0{,}25 \cdot 2a + 0{,}8(25200 - 3a - b) = 25200 - 3a - b$

(II) $0{,}25a - 0{,}2b = 0 \quad \Rightarrow \quad b = 1{,}25a$

$b \rightarrow (I)$

(I) $0{,}8a + 0{,}05 \cdot 1{,}25a + 0{,}05(25200 - 3a - 1{,}25a) = a$

$0{,}65a + 1260 = a$

$a = 3600$

$a \rightarrow (II)$
(II) $\quad b = 1{,}25 \cdot 3600 = 4500$
Die Probe mit (III) und (IV) führt zu wahren Aussagen.

Die gesuchte Verteilung ist $\vec{v} = \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3600 \\ 4500 \\ 7200 \\ 9900 \end{pmatrix}$.

1.4 Die gesuchte Verteilung hat folgende Bauart:
$\vec{v} = \begin{pmatrix} a \\ a \\ a \\ 25200 - 3a \end{pmatrix}$.
Nun soll gelten:
$$\begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}05+p & 0 & 0{,}05+p \\ 0{,}15 & 0{,}8 & 0{,}05 & 0 \\ 0 & 0{,}15-p & 0{,}7 & 0{,}15-p \\ 0{,}05 & 0 & 0{,}25 & 0{,}8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ a \\ a \\ 25200 - 3a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ a \\ a \\ 25200 - 3a \end{pmatrix}$$
Daraus ergibt sich folgendes Gleichungssystem:
(I) $\quad 0{,}8a + (0{,}05 + p) \cdot a + (0{,}05 + p)(25200 - 3a) = a$
(II) $\quad 0{,}15a + 0{,}8a + 0{,}05a = a$
(III) $\quad (0{,}15 - p)a + 0{,}7a + (0{,}15 - p) \cdot (25200 - 3a) = a$
(IV) $\quad 0{,}05a + 0{,}25a + 0{,}8(25200 - 3a) = 25200 - 3a$
Aus (IV) Zeile folgt:
$0{,}3a + 20160 - 2{,}4a = 25200 - 3a$
$a = 5600$
Aus (I) folgt:
$0{,}8 \cdot 5600 + (0{,}05 + p) \cdot 5600 + (0{,}05 + p)(8400) = 5600$
$5180 + 14000p = 5600$
$p = 0{,}03$
Die Probe mit (II) und (III) führt zu wahren Aussagen.

Es ist möglich, den gleichen Anteil der alljährlich wechselnden Haushalte von D zu A um den selben Prozentsatz zu erhöhen und im selben Maß den Anteil dieser Anbieter bei deren Wechsel zu C zu senken, und das Wechselverhalten ansonsten unverändert zu lassen. Langfristig haben dabei die Haushalte A, B und C gleich viele Haushalte an sich gebunden. Nur noch 12 Prozent der Haushalte würden dann von B zu C wechseln.

Lösung A2/2022

2.1.1 *Rohstoffberechnung eines Auftrages:*

Rohstoff-Endprodukt-Matrix: $\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 43 & 36 & 33 \\ 30 & 15 & 19 \\ 37 & 14 & 20 \end{pmatrix}$

Berechnung der ME der Rohstoffe:

$\begin{pmatrix} 43 & 36 & 33 \\ 30 & 15 & 19 \\ 37 & 14 & 20 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 400 \\ 600 \\ 500 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 55300 \\ 30500 \\ 33200 \end{pmatrix}$

Für den Auftrag benötigt man $55300\,ME$ von R_1, $30500\,ME$ von R_2 und $33200\,ME$ von R_3.

2.1.2 *Fertigungskosten pro ME von Zwischenprodukten:*

Für die Gesamtkosten gilt die Formel

$K_{ges} = K_R + K_z + K_E + K_{Fix}$.

Es gilt $K_{Ges} = 400 + K_Z + 1850 + 2050 =$

Der Erlös beträgt $E = 20\,€ \cdot 400 + 35\,€ \cdot 600 + 35\,€ \cdot 500$

$E = 46500\,€$

Da der Gewinn $8000\,€$ beträgt, ergibt sich

$K_{ges} = E - G = 46500\,€ - 8000\,€ = 38500\,€$

Daraus folgt $4300 + K_Z = 38500\,€$

$K_Z = 34200\,€$

Zwischenprodukt-Endprodukt-Matrix: $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

Berechnung des Zwischenproduktvektors:

$\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{B} \cdot p = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 400 \\ 600 \\ 500 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2400 \\ 1700 \\ 3800 \end{pmatrix}$

Der Kostenvektor für die Zwischenprodukte lautet

$\overrightarrow{k_Z} = (z \quad 2{,}5z \quad 1{,}25z)$

Bedingung:

$K_z = \overrightarrow{k_Z} \cdot \boldsymbol{Z} = (z \quad 2{,}5z \quad 1{,}25z) \cdot \begin{pmatrix} 2400 \\ 1700 \\ 3800 \end{pmatrix} = 2400z + 4250z + 4750z$

$K_z = 11400z$

Es gilt $34200\,€ = 11400z \quad \Rightarrow \quad z = 3$

Fertigungskosten für $Z_1 = 3{,}00\,€$, $Z_2 = 7{,}50\,€$; $Z_3 = 3{,}75\,€$.

2. 2 *Prüfung der Ausführbarkeit eines Auftrages:*

Es gilt $\boldsymbol{B} \cdot p = \boldsymbol{Z}$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 950 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4600 \\ 3800 \\ 6250 \end{pmatrix}$$

(I) $950 + p_2 + 2p_3 = 4600$

(II) $2850 + p_3 = 3800$

(III) $950 + 4p_2 + 2p_3 = 6250$

(II) $p_3 = 950$

$p_3 \to (I)$

(I) $950 + p_2 + 1900 = 4600$

$p_2 = 800$

$p_2; p_3 \to (III)$

(III) $950 + 4 \cdot 800 + 2 \cdot 950 = 6250$

Falsche Aussage, der Auftrag ist nicht durchführbar.

2. 3 *Bedarfsermittlung von Rohstoffen:*

Es gilt $\boldsymbol{C} \cdot \vec{p} = \vec{r}$

Da E_3 nicht mehr produziert wird, ist der dritte Eintrag des Produktionsvektors gleich 0.

$$\begin{pmatrix} 43 & 36 & 33 \\ 30 & 15 & 19 \\ 37 & 14 & 20 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 \\ 30000 \\ r_3 \end{pmatrix}$$

Daraus ergibt sich folgendes Gleichungssystem:

(I) $43p_1 + 36p_2 = r_1$

(II) $30p_1 + 15p_2 = 30000$

(III) $37p_1 + 14p_2 = r_3$

Das Gleichungssystem besitzt 3 Gleichungen und 4 Unbekannte. Daher existieren unendlich viele Lösungen.

Wir wählen eine Variable frei, z. B. $p_1 = t$: $t \in \mathbb{R}$.

(I) $43t + 36p_2 = r_1$

(II) $30t + 15p_2 = 30000$

(III) $37t + 14p_2 = r_3$

Aus (II) folgt: $p_2 = 2000 - 2t$

$p_2 \to (I); (III)$

(I) $43t + 36 \cdot (2000 - 2t) = r_1$

$r_1 = 72000 - 29t$

(III) $37t + 14 \cdot (2000 - 2t) = r_3$

$r_3 = 28000 + 9t$

Wegen $p_1 \geq 0$ folgt $t \geq 0$.
Wegen $p_2 \geq 0$ folgt $2000 - 2t \geq 0$ ➔ $t \leq 1000$.
Für $t = 0$ folgt $r_1 = 72000$
Für $t = 1000$ folgt $r_1 = 43000$
Daraus folgt $43000 \leq r_1 \leq 72000$
Für $t = 0$ folgt $r_3 = 28000$
Für $t = 1000$ folgt $r_3 = 37000$
Daraus folgt $28000 \leq r_3 \leq 37000$
Von R_1 werden mindestens $43000\,ME$ und höchstens $72000\,ME$ benötigt.
Von R_3 werden mindestens $28000\,ME$ und höchstens $37000\,ME$ benötigt.