Abituraufgaben Matrizen und Prozesse (Teil 4) 2022-2023

Lösung A1/2022

1.1 *Interpretation des Wertes 0,25:*

$25\ \%$ der Haushalte, die bei Anbieter C einen Vertrag haben, wechseln innerhalb eines Jahres zu Anbieter D.
Für die Paare (A,C) und (B,D) wechseln untereinander keinerlei Haushalte, da die entsprechenden Einträge in der Matrix 0 sind.
Mit dem Anbieter C sind die Haushalte am wenigsten zufrieden, da nur $70\ \%$ der Haushalte bei Anbieter C von einem Jahr zum nächsten bleiben.
Bei den anderen Anbietern bleiben $80\ \%$ der Haushalte von einem Jahr zum nächsten.

1.2 *Anzahl der Haushalte bei Anbieter D:*

$25200 - 3000 - 5000 - 7000 = 10200$

$$\begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}05 & 0 & 0{,}05 \\ 0{,}15 & 0{,}8 & 0{,}05 & 0 \\ 0 & 0{,}15 & 0{,}7 & 0{,}15 \\ 0{,}05 & 0 & 0{,}25 & 0{,}8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3000 \\ 5000 \\ 7000 \\ 10200 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3160 \\ 4800 \\ 7180 \\ 10060 \end{pmatrix}$$

Anzahlen im Jahr 2022:

$A = 3160,\ B = 4800,\ C = 7180,\ D = 10060$

1.3 Da die gesuchte Verteilung gleich bleiben soll, muss gelten: $\boldsymbol{M} \cdot \vec{v} = \vec{v}$.

Es gilt $\vec{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ 2a \\ 25200 - 3a - b \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}05 & 0 & 0{,}05 \\ 0{,}15 & 0{,}8 & 0{,}05 & 0 \\ 0 & 0{,}15 & 0{,}7 & 0{,}15 \\ 0{,}05 & 0 & 0{,}25 & 0{,}8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ 2a \\ 25200 - 3a - b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ 2a \\ 25200 - 3a - b \end{pmatrix}$$

Daraus ergibt sich folgendes Gleichungssystem:

(I) $0{,}8a + 0{,}05b + 0{,}05(25200 - 3a - b) = a$

(II) $0{,}15a + 0{,}8b + 0{,}05 \cdot 2a = b$

(III) $0{,}15b + 0{,}7 \cdot 2a + 0{,}15 \cdot (25200 - 3a - b) = 2a$

(IV) $0{,}05a + 0{,}25 \cdot 2a + 0{,}8(25200 - 3a - b) = 25200 - 3a - b$

(II) $0{,}25a - 0{,}2b = 0 \quad \Rightarrow \quad b = 1{,}25a$

$b \to (I)$

(I) $0{,}8a + 0{,}05 \cdot 1{,}25a + 0{,}05(25200 - 3a - 1{,}25a) = a$

$0{,}65a + 1260 = a$

$a = 3600$

$a \to (II)$
(II) $b = 1{,}25 \cdot 3600 = 4500$
Die Probe mit (III) und (IV) führt zu wahren Aussagen.
Die gesuchte Verteilung ist $\vec{v} = \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3600 \\ 4500 \\ 7200 \\ 9900 \end{pmatrix}$.

1.4 Die gesuchte Verteilung hat folgende Bauart:
$\vec{v} = \begin{pmatrix} a \\ a \\ a \\ 25200 - 3a \end{pmatrix}$.
Nun soll gelten:
$$\begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}05 + p & 0 & 0{,}05 + p \\ 0{,}15 & 0{,}8 & 0{,}05 & 0 \\ 0 & 0{,}15 - p & 0{,}7 & 0{,}15 - p \\ 0{,}05 & 0 & 0{,}25 & 0{,}8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ a \\ a \\ 25200 - 3a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ a \\ a \\ 25200 - 3a \end{pmatrix}$$
Daraus ergibt sich folgendes Gleichungssystem:
(I) $0{,}8a + (0{,}05 + p) \cdot a + (0{,}05 + p)(25200 - 3a) = a$
(II) $0{,}15a + 0{,}8a + 0{,}05a = a$
(III) $(0{,}15 - p)a + 0{,}7a + (0{,}15 - p) \cdot (25200 - 3a) = a$
(IV) $0{,}05a + 0{,}25a + 0{,}8(25200 - 3a) = 25200 - 3a$
Aus (IV) Zeile folgt:
$0{,}3a + 20160 - 2{,}4a = 25200 - 3a$
$a = 5600$
Aus (I) folgt:
$0{,}8 \cdot 5600 + (0{,}05 + p) \cdot 5600 + (0{,}05 + p)(8400) = 5600$
$5180 + 14000p = 5600$
$p = 0{,}03$
Die Probe mit (II) und (III) führt zu wahren Aussagen.

Es ist möglich, den gleichen Anteil der alljährlich wechselnden Haushalte von D zu A um den selben Prozentsatz zu erhöhen und im selben Maß den Anteil dieser Anbieter bei deren Wechsel zu C zu senken, und das Wechselverhalten ansonsten unverändert zu lassen. Langfristig haben dabei die Haushalte A, B und C gleich viele Haushalte an sich gebunden. Nur noch 12 Prozent der Haushalte würden dann von B zu C wechseln.

Lösung A2/2022

2.1.1 *Rohstoffberechnung eines Auftrages:*

Rohstoff-Endprodukt-Matrix: $\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 43 & 36 & 33 \\ 30 & 15 & 19 \\ 37 & 14 & 20 \end{pmatrix}$

Berechnung der ME der Rohstoffe:

$\begin{pmatrix} 43 & 36 & 33 \\ 30 & 15 & 19 \\ 37 & 14 & 20 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 400 \\ 600 \\ 500 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 55300 \\ 30500 \\ 33200 \end{pmatrix}$

Für den Auftrag benötigt man $55300\,ME$ von R_1, $30500\,ME$ von R_2 und $33200\,ME$ von R_3.

2.1.2 *Fertigungskosten pro ME von Zwischenprodukten:*

Für die Gesamtkosten gilt die Formel

$K_{ges} = K_R + K_z + K_E + K_{Fix}$.

Es gilt $K_{Ges} = 400 + K_Z + 1850 + 2050 =$

Der Erlös beträgt $E = 20\,€ \cdot 400 + 35\,€ \cdot 600 + 35\,€ \cdot 500$

$E = 46500\,€$

Da der Gewinn $8000\,€$ beträgt, ergibt sich

$K_{ges} = E - G = 46500\,€ - 8000\,€ = 38500\,€$

Daraus folgt $4300 + K_Z = 38500\,€$

$K_Z = 34200\,€$

Zwischenprodukt-Endprodukt-Matrix: $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

Berechnung des Zwischenproduktvektors:

$\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{B} \cdot p = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 400 \\ 600 \\ 500 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2400 \\ 1700 \\ 3800 \end{pmatrix}$

Der Kostenvektor für die Zwischenprodukte lautet

$\overrightarrow{k_Z} = (z \quad 2{,}5z \quad 1{,}25z)$

Bedingung:

$K_z = \overrightarrow{k_Z} \cdot \boldsymbol{Z} = (z \quad 2{,}5z \quad 1{,}25z) \cdot \begin{pmatrix} 2400 \\ 1700 \\ 3800 \end{pmatrix} = 2400z + 4250z + 4750z$

$K_z = 11400z$

Es gilt $34200\,€ = 11400z \quad \Rightarrow \quad z = 3$

Fertigungskosten für $Z_1 = 3{,}00\,€$, $Z_2 = 7{,}50\,€$; $Z_3 = 3{,}75\,€$.

2. 2 *Prüfung der Ausführbarkeit eines Auftrages:*

Es gilt $\boldsymbol{B} \cdot p = \boldsymbol{Z}$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 950 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4600 \\ 3800 \\ 6250 \end{pmatrix}$$

(I) $\quad 950 + p_2 + 2p_3 = 4600$

(II) $\quad 2850 + p_3 = 3800$

(III) $\quad 950 + 4p_2 + 2p_3 = 6250$

(II) $\quad p_3 = 950$

$p_3 \rightarrow (I)$

(I) $\quad 950 + p_2 + 1900 = 4600$

$p_2 = 800$

$p_2; p_3 \rightarrow (III)$

(III) $\quad 950 + 4 \cdot 800 + 2 \cdot 950 = 6250$

Falsche Aussage, der Auftrag ist nicht durchführbar.

2. 3 *Bedarfsermittlung von Rohstoffen:*

Es gilt $\boldsymbol{C} \cdot \vec{p} = \vec{r}$

Da E_3 nicht mehr produziert wird, ist der dritte Eintrag des Produktionsvektors gleich 0.

$$\begin{pmatrix} 43 & 36 & 33 \\ 30 & 15 & 19 \\ 37 & 14 & 20 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 \\ 30000 \\ r_3 \end{pmatrix}$$

Daraus ergibt sich folgendes Gleichungssystem:

(I) $\quad 43p_1 + 36p_2 = r_1$

(II) $\quad 30p_1 + 15p_2 = 30000$

(III) $\quad 37p_1 + 14p_2 = r_3$

Das Gleichungssystem besitzt 3 Gleichungen und 4 Unbekannte. Daher existieren unendlich viele Lösungen. Wir wählen eine Variable frei, z. B. $p_1 = t$: $t \in \mathbb{R}$.

(I) $\quad 43t + 36p_2 = r_1$

(II) $\quad 30t + 15p_2 = 30000$

(III) $\quad 37t + 14p_2 = r_3$

Aus (II) folgt: $p_2 = 2000 - 2t$

$p_2 \rightarrow (I); (III)$

(I) $\quad 43t + 36 \cdot (2000 - 2t) = r_1$

$r_1 = 72000 - 29t$

(III) $\quad 37t + 14 \cdot (2000 - 2t) = r_3$

$r_3 = 28000 + 9t$

Wegen $p_1 \geq 0$ folgt $t \geq 0$.
Wegen $p_2 \geq 0$ folgt $2000 - 2t \geq 0$ ➔ $t \leq 1000$.
Für $t = 0$ folgt $r_1 = 72000$
Für $t = 1000$ folgt $r_1 = 43000$
Daraus folgt $43000 \leq r_1 \leq 72000$
Für $t = 0$ folgt $r_3 = 28000$
Für $t = 1000$ folgt $r_3 = 37000$
Daraus folgt $28000 \leq r_3 \leq 37000$
Von R_1 werden mindestens $43000\,ME$ und höchstens $72000\,ME$ benötigt.
Von R_3 werden mindestens $28000\,ME$ und höchstens $37000\,ME$ benötigt.