Abituraufgaben Teil 1 BG *(ohne Hilfsmittel)* Mustersatz 2

A1 Analysis

1.1 Die Funktion f ist gegeben durch **3P**

$f(x) = \frac{1}{2}sin(2x) - 1$ mit $x \in \mathbb{R}$

Berechne die Gleichung der Tangente an das Schaubild von f im Schnittpunkt mit der y-Achse.

1.2 Erläutere eine Vorgehensweise zum näherungsweisen Lösen der Gleichung $x^3 = x + 1$. **3P**

1.3 Das Schaubild einer Polynomfunktion 3. Grades verläuft durch den Ursprung und hat in $P(-2|4)$ einen Wendepunkt. Die Wende -tangente schneidet die x-Achse in $Q(4|0)$. **4P**
Tina notiert folgende Bedingungen zur Bestimmung des Funktionsterms:

- $p(0) = 0$
- $p''(-2) = 0$
- $p(-2) = 4$
- $p(4) = 0$

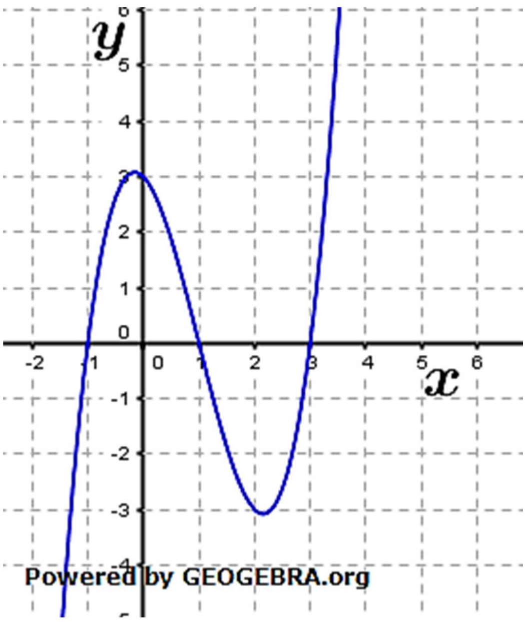
Begründe, dass Tina die Informationen im Aufgabentext nicht richtig übersetzt hat.

1.4 Die Abbildung zeigt das Schaubild einer Funktion g. **5P**
Ordne die folgenden Integralwerte der Größe nach zu. Begründe.

(A) $\int_0^3 g(x)\,dx$

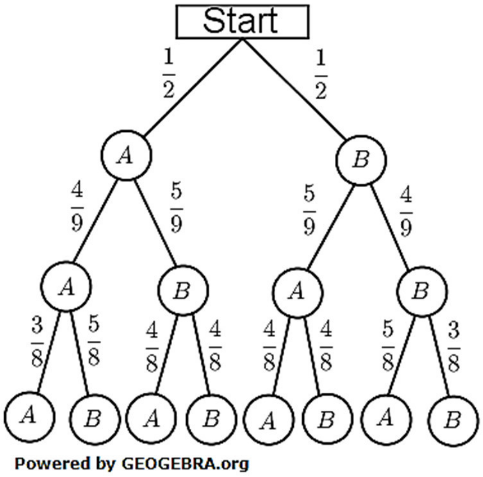
(B) $\int_{-1}^1 g(x)\,dx$

(C) $\int_{-1}^{3,5} g(x)\,dx$



A2 Stochastik

2.1 Beschreiben Sie ein mögliches Zufallsexperiment, das zum untenstehenden Baumdiagramm passt. **4P**
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses:
„Mindestens einmal tritt A ein."



2.2 Eine ideale Münze wird 100 mal geworfen. Begründen Sie, ob die nachfolgende Aussage wahr oder falsch ist: **3P**
Die Wahrscheinlichkeit für genau einmal Kopf ist kleiner, als die für genau 98 Mal Kopf.

A3 Vektorgeometrie

(Nur zu bearbeiten, wenn Wahlgebiet Vektorgeometrie im Unterricht behandelt).

3.1 Gegeben ist die Ebene durch **4P**

$$E:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix};\ \ u; v\ \in \mathbb{R}$$

Geben Sie jeweils eine Gleichung einer Geraden an,
(A) die in der Ebene E liegt,
(B) die keine gemeinsamen Punkte mit E hat.

3.2 Zeichnen Sie einen Würfel mit der Kantenlänge $3\,LE$ in ein Räumliches Koordinatensystem. Markieren Sie eine Kante und geben Sie eine Gleichung der Geraden an, auf der diese Kante liegt. **4P**

Abituraufgaben Teil 1 BG *(ohne Hilfsmittel)* Mustersatz 2

A3 Matrizen und Prozesse

(Nur zu bearbeiten, wenn Wahlgebiet Matrizen/Prozesse im Unterricht behandelt).

3.1 Anna, Biggi und Chris schicken sich öfter SMS-Nachrichten. In der letzten Woche schrieb Anna an Biggi 58 und an Chris 42 SMS. Biggi schrieb 62 an Anna und 38 an Chris. Chris schrieb an Anna und Biggi jeweils 50 SMS. **4P**
Stellen Sie die SMS-Kontakte graphisch dar.
Begründe, dass in der Hauptdiagonalen der Matrix, die die Häufigkeit der SMS-Kontakte wiedergibt, stets 0 steht.

3.2 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ und $\boldsymbol{X}$ sind $3x3$-Matrizen. Bei welcher der folgenden Terme kann $\boldsymbol{X}$ ausgeklammert werden? **4P**

(1) $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{X} + \boldsymbol{X}$
(2) $\boldsymbol{X} \cdot \boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{X}$

In manchen Fällen kann man die Gleichung $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{X} + 2\boldsymbol{X} = \boldsymbol{B}$ nicht nach $\boldsymbol{X}$ umstellen. Geben Sie dafür eine mögliche Matrix $\boldsymbol{A}$ an.

A1 Analysis Lösung

1.1 $f(x) = \frac{1}{2} sin(2x) - 1 \qquad f(0) = -1$

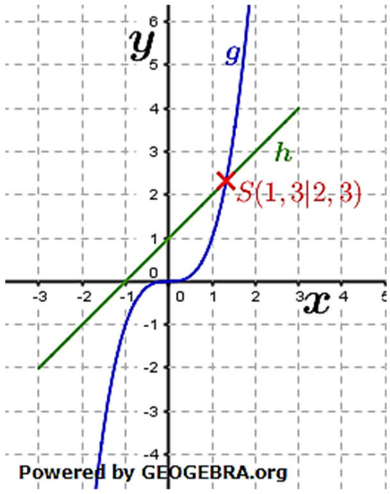
$f'(x) = cos(2x) \qquad f'(0) = 1$

$t(x) = f'(0) \cdot (x - 0) + f(0)$

$t(x) = x - 1$

Die Gleichung der Tangente in $S_y(0|-1)$ ist $t(x) = x - 1$.

1.2 Die Lösung kann z. B. graphisch als Nullstelle eines Graphen g mit $g(x) = x^3 - x - 1$ bestimmt werden. Mit der Eingabe dieser Funktion in den Funktionsspeicher des WTR kann dann über die Tabelle nach der/den Nullstellen gesucht werden.
Alternativ kann man die Schnittpunkte zweier Graphen der Funktionen g mit $g(x) = x^3$ und h mit $h(x) = x + 1$ bestimmen. Aus der seitlichen Grafik ist erkennbar, dass es nur einen Schnittpunkt gibt, d.h., die Gleichung hat nur eine Lösung.
Der x-Wert des Schnittpunktes ist die Lösung der Gleichung.



1.3 Die ersten drei Bedingungen entsprechen den Informationen im Text:

- $p(0) = 0$ — K verläuft durch den Ursprung
- $p''(-2) = 0$ — K hat bei $x = -2$ eine Wendestelle
- $p(-2) = 4$ — K verläuft durch den Punkt $P(-2|4)$

Die vierte Bedingung $p(4) = 0$ ist falsch. Im Text ist $Q(4|0)$ Punkt der Wendetangente und nicht Punkt der Polynomfunktion.

1.4 Der kleinste Integralwert ist $\int_0^3 g(x)\,dx$. Die positive Fläche im Intervall $[0;1]$ ist kleiner als die negative Fläche im Intervall $[1;3]$, damit gilt $\int_0^3 g(x)\,dx < 0$.

Der mittlere Integralwert ist $\int_{-1}^{3,5} g(x)\,dx$. Die Funktion ist punktsymmetrisch zum Punkt $P(1|0)$, d.h., das Integral $\int_{-1}^{3} g(x)\,dx = 0$, sodass der Wert des Integrals $\int_{-1}^{3,5} g(x)\,dx$ gleich dem Wert des Integrals $\int_{3}^{3,5} g(x)\,dx$ entspricht. $\int_{-1}^{3,5} g(x)\,dx > 0$.

Den größten Wert besitzt $\int_{-1}^{1} g(x)\,dx$, da der Graph der Funktion im Intervall $[-1;1]$ausschließlich oberhalb der x-Achse verläuft. Somit ist $\int_{-1}^{1} g(x)\,dx > \int_{-1}^{3,5} g(x)\,dx$. Insgesamt gilt:
(A)<(C)<(B)

A2 Stochastik Lösung

2.1 In einer Urne befinden sich 5 blaue und 5 rote Kugeln, es wird dreimal ohne Zurücklegen gezogen.

E: „Mindestens einmal tritt A ein".
Das Gegenereignis $\overline{E}$ ist dann „B tritt dreimal ein."
Dann ist $P(E) = 1 - P(\overline{E}) = 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{8} = 1 - \frac{12}{144} = \frac{132}{144} = \frac{11}{12}$

.

2.2 Die Aussage ist wahr. Es sei:
A: „es fällt genau einmal Kopf".
B: „es fällt genau 98 Mal Kopf".
$P(A) = B_{100;0,5}(X = 1) = \binom{100}{1} \cdot 0{,}5^1 \cdot 0{,}5^{99}$
$P(B) = B_{100;0,5}(X = 98) = \binom{100}{98} \cdot 0{,}5^{98} \cdot 0{,}5^2$
Zwar ist jeweils $0{,}5^{100}$, jedoch ist $\binom{100}{98} = \frac{100 \cdot 99}{2}$ größer als $\binom{100}{1} = \frac{100}{1}$.

A3 Vektorgeometrie Lösung

3.1 (A) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}; \; r \in \mathbb{R}$ verläuft in E.

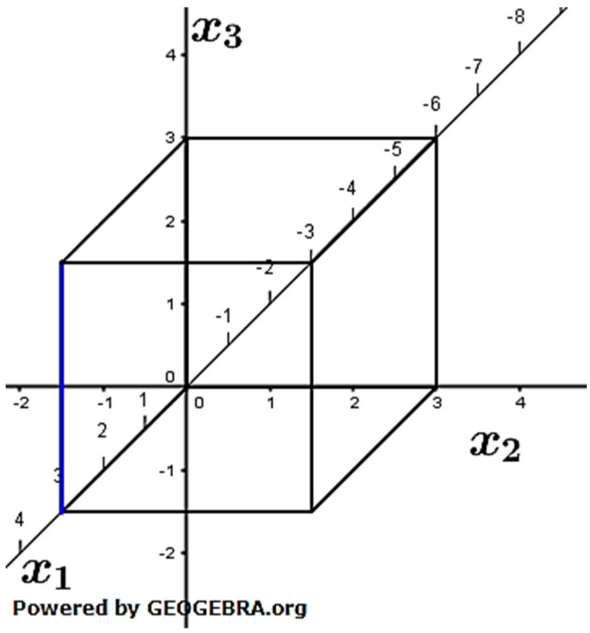
(B) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}; \; s \in \mathbb{R}$ verläuft parallel zu E.

3.2 Siehe Grafik rechts.

Beispiel (andere Lösungen möglich):

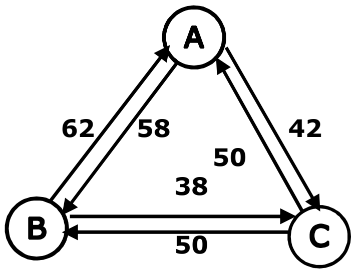
Die blaue Kante liegt auf der Geraden mit der Gleichung

$\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \; t \in \mathbb{R}$



A3 Matrizen und Prozesse Lösung

3.1



In der Hauptdiagonalen der Matrix stehen die Häufigkeiten, mit der jede Person SMS an sich selbst schreibt. Das ist nicht möglich, daher steht hier stets 0.

3.2 Bei (1) kann $\boldsymbol{X}$ ausgeklammert werden: $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{X} + \boldsymbol{X} = (\boldsymbol{A} + \boldsymbol{E}) \cdot \boldsymbol{X}$

Bei (2) kann man $\boldsymbol{X}$ nicht ausklammern, da $\boldsymbol{X}$ von links mit $\boldsymbol{A}$ und von rechts mit $\boldsymbol{B}$ multipliziert wird.

Wenn $\boldsymbol{A} + 2\boldsymbol{E}$ nicht invertierbar ist, kann man die Gleichung $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{X} + 2\boldsymbol{X} = \boldsymbol{B}$ nicht nach $\boldsymbol{X}$ umstellen.

Eine mögliche Matrix dafür ist $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$