Aufgabe A2/2021

2.1 Eine Fußballmannschaft gewinnt jedes ihrer Spiele mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{2}{3}$.

2.1.1 Das Ereignis A hat die folgende Wahrscheinlichkeit:
$P(A) = 10 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^9 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)$
Geben Sie eine Formulierung für das Ereignis A im Sachzusammenhang an. (2P)

2.1.2 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die Mannschaft von vier Spielen genau zwei Spiele gewinnt und diese aufeinander folgen. (2P)

2.1.3 Eine andere Mannschaft wird von ihren Misserfolgen demotiviert.
Die Mannschaftc gewinnt das erste Spiel mit einer Wahrscheinlichkeit von p. Gewinnt sie das erste Spiel nicht, so ist die Wahrscheinlichkeit dann das zweite Spiel zu gewinnen $\frac{1}{2} \cdot p$.
Die Wahrscheinlichkeit, dass die Mannschaft mindestens eines der beiden Siele gewinnt, beträgt $\frac{4}{9}$.
Begründen Sie, dass durch Lösung der Gleichung
$1 - (1-p) \cdot \left(1 - \frac{1}{2}p\right) = \frac{4}{9}$
die Wahrscheinlichkeit p ermittelt werden kann. (4 P)

2.2 In einer Urne befinden sich zunächst neun Kugeln.
Vier Kugeln haben die Farbe blau, zwei sind weiß und drei sind grün.

2.2.1 Zwei Kugeln werden nacheinander aus der Urne ohne Zurücklegen gezogen. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit der folgenden Ereignisse:
A: Die beiden gezogenen Kugeln sind weiß.
B: Unter den beiden gezogenen Kugeln befindet sich mindestens eine weiße Kugel.
C: Eine der beiden gezogenen Kugeln ist weiß und die andere blau.
(5 P)

2.2.2 Es wird nun eine unbekannte Anzahl x von grünen Kugeln der Urne hinzugefügt, sodass bei zweimaligem Ziehen ohne Zurücklegen die Wahrscheinlichkeit zwei grüne Kugeln zu ziehen genau $50\,\%$ ist.
Ermitteln Sie eine Gleichung mit der x berechnet werden kann.
(3 P)

Aufgabe A2-1/2022

2 Eine ideale Münze zeigt nach jedem Wurf entweder Kopf oder Zahl an.

2.1 Man wirft die Münze solange bis sie Zahl zeigt, jedoch höchstens dreimal.

2.1.1 Zeichnen Sie ein Baumdiagramm, das dieses Zufallsexperiment vollständig beschreibt. (2P)

2.1.2 Bestimmen Sie, wie oft man die Münze im Mittel wirft. (2P)

2.2 Entscheiden Sie, ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind. Begründen Sie:

(1) Wird die Münze fünfmal hintereinander geworfen, so ist die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis „genau einmal Zahl" größer als $\frac{1}{8}$.

(2) Es gibt eine Anzahl von Würfen für die Folgendes gilt:
Die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis „genau dreimal Zahl" ist gleich der Wahrscheinlichkeit für das Ereignis „genau zweimal Zahl". (4P)

Aufgabe A2-2/2022

2 Ein Stapel besteht aus sechs zufällig angeordneten Karten. Davon zeigen zwei Karten das Bild „Bube", zwei das Bild „Dame" und zwei das Bild „König". Die oberste Karte des Stapels wird von einem Spieler gezogen und deren Bild wird notiert. Vor dem nächsten Zug wird die Karte wieder in den Stapel zurückgelegt und dieser neu gemischt.
Der Spieler zieht dreimal nacheinander die oberste Karte des Stapels.

2.1 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit der folgenden Ereignisse:

E_1: Der Spieler hat drei verschiedene Bilder gezogen.

E_2: Der Spieler hat genau einmal einen Buben gezogen.

$E3_1$: Der Spieler hat mindestens einmal einen Buben oder mindestens zweimaleinen König gezogen. (5P)

2.2 Im Folgenden beträgt der Einsatz 5 Euro.
Der Spieler enthält nur dann eine Auszahlung, falls mindestens zweimal das gleiche Bild gezogen wird. Die Auszahlung beträgt 18 Euro, falls der Spieler dreimal das gleiche Bild zieht.
Ermitteln Sie die Auszahlung, die der Spieler im verbleibenden Fall erhalten muss, damit es sich um ein faires Spiel handelt. (3P)

Lösung A2/2021

2.1.1 Bernoulliexperiment mit $B_{10;\frac{2}{3}}(X = 9)$.

A: *Die Mannschaft gewinnt genau* 9 *von* 10 *Spielen.*

2.1.2 A: *Die Mannschaft gewinnt genau* 2 *von* 4 *Spielen, die unmittelbar aufeinander folgen.*

G: *Die Mannschaft gewinnt ein Spiel.*

$\overline{G}$: *Die Mannschaft verliert ein Spiel.*

Ergebnisraum für vier Spiele, von denen zwei gewonnen werden, die direkt aufeinander folgen:

$S = \left(\{GG\overline{G}\overline{G}\}; \{\overline{G}GG\overline{G}\}; \{\overline{G}\overline{G}GG\}\right)$

$P\left(GG\overline{G}\overline{G}\right) = \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{4}{81}$

Diese Wahrscheinlichkeit kommt dreimal vor, siehe Ergebnisraum.

$P(A) = 3 \cdot \frac{4}{81} = \frac{4}{27}$.

2.1.3 Das Gegenereignis für mindestens ein Spiel von zwei Spielen zu gewinnen ist kein Spiel von zwei Spielen zu gewinnen.

A: *Die Mannschaft gewinnt mindestens* 1 *von* 2 *Spielen.*

$\overline{G_1}$: *Die Mannschaft verliert erstes Spiel.*

$\overline{G_2}$: *Die Mannschaft verliert zweites Spiel.*

$P(A) = 1 - P\left(\overline{G_1 G_2}\right)$

$P\left(\overline{G_1}\right) = 1 - P$

$P\left(\overline{G_2}\right) = 1 - \frac{1}{2}p$

$P(A) = 1 - (1 - p) \cdot \left(1 - \frac{1}{2}p\right)$

$1 - (1 - p) \cdot \left(1 - \frac{1}{2}p\right) = \frac{4}{9}$ **q.e.d.**

2.2.1 $P(b) = \frac{4}{9}$; $p(w) = \frac{2}{9}$; $P(g) = \frac{3}{9}$; $P(\overline{w}) = \frac{7}{9}$ nur im ersten Zug.

$P(A) = P(ww) = \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{8} = \frac{2}{72} = \frac{1}{36}$

$P(B) = 1 - P(\overline{ww}) = 1 - \frac{7}{9} \cdot \frac{6}{8} = \frac{6}{72} = 1 - \frac{42}{72} = \frac{30}{72} = \frac{5}{12}$

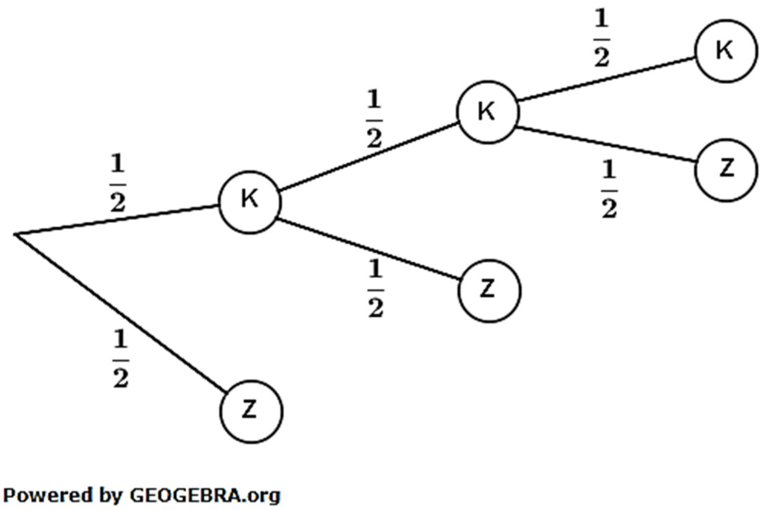
$P(C) = P(wb; bw) = 2 \cdot \frac{2}{9} \cdot \frac{4}{8} = \frac{16}{72} = \frac{2}{9}$

2.2.2 Es muss gelten $P(gg) = 0{,}5$

$P(gg) = \frac{3+x}{9+x} \cdot \frac{2+x}{8+x} = \frac{1}{2}$

Lösung A2-1/2022

2.1.1 Baumdiagramm



2.1.2 Durchschnittliche Anzahl Würfe.

Sei X die Anzahl der Würfe mit dem Ereignisraums $\Omega = \{Z; KZ; KKZ, KKK\}$ mit den Wahrscheinlichkeiten $\mathrm{P(Z)} = \frac{1}{2}$; $P(KZ) = \frac{1}{4}$; $P(KKZ) = \frac{1}{8}$ und $P(KKK) = \frac{1}{8}$

Damit ergibt sich der Erwartungswert

$\mathrm{E(X)} = 1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 3 \cdot \frac{1}{8} + 3 \cdot \frac{1}{8} = 1\frac{3}{4} = 1{,}75$

Die durchschnittliche Anzahl der Würfe beträgt $1{,}75$.

2.2 (1) Binomialverteilung mit $n = 5$ und $p = \frac{1}{2}$ für Zahl und $k = 1$.

$B_{n;0,5}(X = 1) = \binom{5}{1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 = 5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{5}{32} > \frac{1}{8}$

Die Aussage ist korrekt.

(2) Wegen der identischen Wahrscheinlichkeit $\mathrm{p} = \frac{1}{2}$ für Kopf und Zahl sind die Wahrscheinlichkeiten symmetrisch zum Mittelwert.

Zwischen 3 und 4 liegt die Zahl $2{,}5$. Somit gilt diese Aussage für 5 Würfe.

Aufgabe A2-2/2022

2.1 E_1: Der Spieler hat drei verschiedene Bilder gezogen.

$P(E_1) = P(BDK, BKD, DBK; DKB, KBD; KDB)6 \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{2}{6} = \frac{8}{36} = \frac{2}{9}$

E_2: Der Spieler hat genau einmal einen Buben gezogen.

$P(E_2) = P\left(B\overline{B}\overline{B}, \overline{B}B\overline{B}, \overline{B}\overline{B}B\right) = 3 \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{4}{6} = \frac{16}{36} = \frac{4}{9}$

E_3: Der Spieler hat mindestens einmal einen Buben oder mindestens zweimal einen König gezogen.

A: Mindestens einmal einen Buben gezogen

B: Mindestens zweimal einen König gezogen

$P(A) = 1 - P\left(\left\{\overline{B}\overline{B}\overline{B}\right\}\right) = 1 - \left(\frac{4}{6}\right)^3 = \frac{19}{27}$

$P(B) = P\left(KK\overline{K}, K\overline{K}K, \overline{K}KK; KKK\right) = 3 \cdot \left(\frac{2}{6}\right)^2 \cdot \frac{4}{6} + \left(\frac{2}{6}\right)^3 = \frac{7}{27}$

Nach dem Additionssatz gilt:

$P(E_3) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$P(A \cap B) = P(KKB; KBK; BKK) = 3 \cdot \left(\frac{2}{6}\right)^3 = \frac{1}{9}$

$P(E_3) = \frac{19}{27} + \frac{7}{27} - \frac{1}{9} = \frac{23}{27}$

2.2 Aufgabe zum Erwartungswert

A: Zweimal das gleiche Bild

B: Dreimal das gleiche Bild

C: Alle anderen Kombinationen

$P(A) = P\left(KK\overline{K}, K\overline{K}K, \overline{K}KK; BB\overline{B}, B\overline{B}B, \overline{B}BB; DD\overline{D}, D\overline{D}D, \overline{D}DD\right)$

$P(A) = 3 \cdot \left(3 \cdot \left(\frac{2}{6}\right)^2 \cdot \frac{4}{6}\right) = \frac{2}{3}$

$P(B) = P(KKK, BBB, DDD) = 3 \cdot \left(\frac{2}{6}\right)^3 = \frac{1}{9}$

$P(C) = 1 - P(A) - P(B) = 1 - \frac{2}{3} - \frac{1}{9} = \frac{2}{9}$

Auszahlungen:

$P(A) = x;\; P(B) = 18;\; P(C) = 0$

$E(X) = x \cdot \frac{2}{3} + 18 \cdot \frac{1}{9} + 0 \cdot \frac{2}{9}$

Wegen fairem Spiel muss $E(X) = 0$ sein, also

$x \cdot \frac{2}{3} + 18 \cdot \frac{1}{9} + 0 \cdot \frac{2}{9} = 5$

$\frac{2}{3}x = 3$

$x = 4{,}5$

Die Auszahlung für Zweimal das gleiche Bild muss $4{,}5$ € betragen, damit das Spiel fair ist.

Im Folgenden beträgt der Einsatz 5 Euro.

Der Spieler enthält nur dann eine Auszahlung, falls mindestens zweimal das gleiche Bild gezogen wird. Die Auszahlung beträgt 18 Euro, falls der Spieler dreimal das gleiche Bild zieht.
Ermitteln Sie die Auszahlung, die der Spieler im verbleibenden Fall erhalten muss, damit es sich um ein faires Spiel handelt. (3P)