Lösung A2/2021

2.1.1 Bernoulliexperiment mit $B_{10;\frac{2}{3}}(X=9)$.

A: Die Mannschaft gewinnt genau 9 von 10 Spielen.

2.1.2 *A: Die Mannschaft gewinnt genau 2 von 4 Spielen, die unmittelbar aufeinander folgen.*

G: Die Mannschaft gewinnt ein Spiel.

$\overline{G}$: Die Mannschaft verliert ein Spiel.

Ergebnisraum für vier Spiele, von denen zwei gewonnen werden, die direkt aufeinander folgen:

$S=\left(\{GG\overline{G}\overline{G}\};\{\overline{G}GG\overline{G}\};\{\overline{G}\overline{G}GG\}\right)$

$P\left(GG\overline{G}\overline{G}\right)=\left(\frac{2}{3}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{4}{81}$

Diese Wahrscheinlichkeit kommt dreimal vor, siehe Ergebnisraum.

$P(A)=3\cdot\frac{4}{81}=\frac{4}{27}$.

2.1.3 Das Gegenereignis für mindestens ein Spiel von zwei Spielen zu gewinnen ist kein Spiel von zwei Spielen zu gewinnen.

A: Die Mannschaft gewinnt mindestens 1 von 2 Spielen.

$\overline{G_1}$: Die Mannschaft verliert erstes Spiel.

$\overline{G_2}$: Die Mannschaft verliert zweites Spiel.

$P(A)=1-P\left(\overline{G_1G_2}\right)$

$P\left(\overline{G_1}\right)=1-P$

$P\left(\overline{G_2}\right)=1-\frac{1}{2}p$

$P(A)=1-(1-p)\cdot\left(1-\frac{1}{2}p\right)$

$1-(1-p)\cdot\left(1-\frac{1}{2}p\right)=\frac{4}{9}$ **q.e.d.**

2.2.1 $P(b)=\frac{4}{9};\ \ p(w)=\frac{2}{9};\ \ P(g)=\frac{3}{9};\ \ P(\overline{w})=\frac{7}{9}$ nur im ersten Zug.

$P(A)=P(ww)=\frac{2}{9}\cdot\frac{1}{8}=\frac{2}{72}=\frac{1}{36}$

$P(B)=1-P(\overline{ww})=1-\frac{7}{9}\cdot\frac{6}{8}=\frac{6}{72}=1-\frac{42}{72}=\frac{30}{72}=\frac{5}{12}$

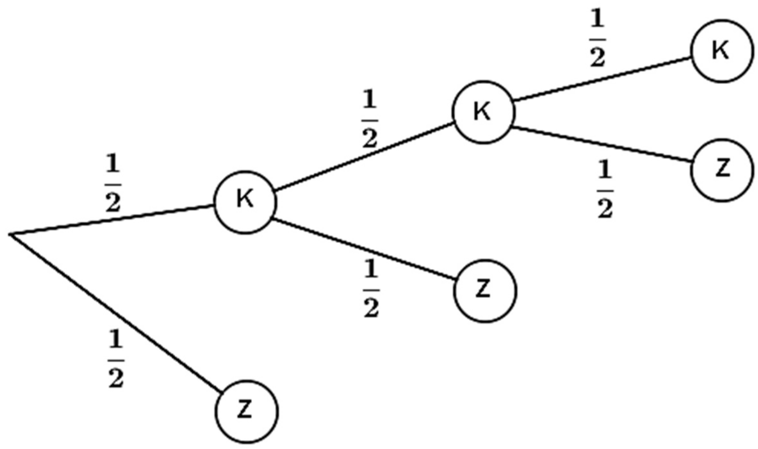
$P(C)=P(wb;bw)=2\cdot\frac{2}{9}\cdot\frac{4}{8}=\frac{16}{72}=\frac{2}{9}$

2.2.2 Es muss gelten $P(gg)=0{,}5$

$P(gg)=\frac{3+x}{9+x}\cdot\frac{2+x}{8+x}=\frac{1}{2}$

Lösung A2-1/2022

2.1.1 Baumdiagramm



2.1.2 Durchschnittliche Anzahl Würfe.

Sei X die Anzahl der Würfe mit dem Ereignisraums $\Omega = \{Z; KZ; KKZ, KKK\}$ mit den Wahrscheinlichkeiten $\mathrm{P(Z)} = \frac{1}{2}$; $P(KZ) = \frac{1}{4}$; $P(KKZ) = \frac{1}{8}$ und $P(KKK) = \frac{1}{8}$

Damit ergibt sich der Erwartungswert

$\mathrm{E(X)} = 1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 3 \cdot \frac{1}{8} + 3 \cdot \frac{1}{8} = 1\frac{3}{4} = 1{,}75$

Die durchschnittliche Anzahl der Würfe beträgt $1{,}75$.

2.2 (1) Binomialverteilung mit $n = 5$ und $p = \frac{1}{2}$ für Zahl und $k = 1$.

$B_{n;0,5}(X = 1) = \binom{5}{1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 = 5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{5}{32} > \frac{1}{8}$

Die Aussage ist korrekt.

(2) Wegen der identischen Wahrscheinlichkeit $\mathrm{p} = \frac{1}{2}$ für Kopf und Zahl sind die Wahrscheinlichkeiten symmetrisch zum Mittelwert.

Zwischen 3 und 4 liegt die Zahl $2{,}5$. Somit gilt diese Aussage für 5 Würfe.

Aufgabe A2-2/2022

2.1 E_1: Der Spieler hat drei verschiedene Bilder gezogen.

$P(E_1) = P(BDK, BKD, DBK; DKB, KBD; KDB)6 \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{2}{6} = \frac{8}{36} = \frac{2}{9}$

E_2: Der Spieler hat genau einmal einen Buben gezogen.

$P(E_2) = P\left(B\overline{B}\overline{B}, \overline{B}B\overline{B}, \overline{B}\overline{B}B\right) = 3 \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{4}{6} = \frac{16}{36} = \frac{4}{9}$

E_3: Der Spieler hat mindestens einmal einen Buben oder mindestens zweimal einen König gezogen.

A: Mindestens einmal einen Buben gezogen

B: Mindestens zweimal einen König gezogen

$P(A) = 1 - P\left(\left\{\overline{BBB}\right\}\right) = 1 - \left(\frac{4}{6}\right)^3 = \frac{19}{27}$

$P(B) = P\left(KK\overline{K}, K\overline{K}K, \overline{K}KK; KKK\right) = 3 \cdot \left(\frac{2}{6}\right)^2 \cdot \frac{4}{6} + \left(\frac{2}{6}\right)^3 = \frac{7}{27}$

Nach dem Additionssatz gilt:

$P(E_3) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$P(A \cap B) = P(KKB; KBK; BKK) = 3 \cdot \left(\frac{2}{6}\right)^3 = \frac{1}{9}$

$P(E_3) = \frac{19}{27} + \frac{7}{27} - \frac{1}{9} = \frac{23}{27}$

2.2 Aufgabe zum Erwartungswert

A: Zweimal das gleiche Bild

B: Dreimal das gleiche Bild

C: Alle anderen Kombinationen

$P(A) = P\left(KK\overline{K}, K\overline{K}K, \overline{K}KK; BB\overline{B}, B\overline{B}B, \overline{B}BB; DD\overline{D}, D\overline{D}D, \overline{D}DD\right)$

$P(A) = 3 \cdot \left(3 \cdot \left(\frac{2}{6}\right)^2 \cdot \frac{4}{6}\right) = \frac{2}{3}$

$P(B) = P(KKK, BBB, DDD) = 3 \cdot \left(\frac{2}{6}\right)^3 = \frac{1}{9}$

$P(C) = 1 - P(A) - P(B) = 1 - \frac{2}{3} - \frac{1}{9} = \frac{2}{9}$

Auszahlungen:

$P(A) = x;\ \ P(B) = 18;\ \ P(C) = 0$

$E(X) = x \cdot \frac{2}{3} + 18 \cdot \frac{1}{9} + 0 \cdot \frac{2}{9}$

Wegen fairem Spiel muss $E(X) = 0$ sein, also

$x \cdot \frac{2}{3} + 18 \cdot \frac{1}{9} + 0 \cdot \frac{2}{9} = 5$

$\frac{2}{3}x = 3$

$x = 4{,}5$

Die Auszahlung für Zweimal das gleiche Bild muss $4{,}5$ € betragen, damit das Spiel fair ist.

Im Folgenden beträgt der Einsatz 5 Euro.

Der Spieler enthält nur dann eine Auszahlung, falls mindestens zweimal das gleiche Bild gezogen wird. Die Auszahlung beträgt 18 Euro, falls der Spieler dreimal das gleiche Bild zieht.
Ermitteln Sie die Auszahlung, die der Spieler im verbleibenden Fall erhalten muss, damit es sich um ein faires Spiel handelt. (3P)