

Abituraufgaben Stochastik BG (Teil 3 mit Hilfsmittel) **Musteraufgaben**
Lösung A9

- 1.1 Gleichzeitige Werfen von drei Würfeln ist zu behandeln wie dreimaliges Werfen hintereinander.

$$\Omega_A = \{SSS; AAA; BBB\}$$

$$P(A) = 3 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9} = 0,1111 = 11,1 \%$$

$$P(B) = 1 - P(\bar{B})$$

$\bar{B}$: Kein Würfel zeigt den Buchstaben S.

$$P(\bar{B}) = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{8}{27} = 0,2963 = 29,6 \%$$

$$P(B) = 1 - \frac{8}{27} = \frac{19}{27}$$

Sei das Ereignis C: Mit den gewürfelten Buchstaben das Wort SAB bilden.

$$P(C) = 3! \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{6}{27} = \frac{2}{9} \quad \text{q.e.d.}$$

- 1.2 Da jedes einzelne Ergebnis die Wahrscheinlichkeit $\left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}$ besitzt, muss man ein Ereignis formulieren, welches 7 Ergebnisse beinhaltet. Hierzu gibt es sehr viele Lösungsmöglichkeiten.

Da das Ereignis aus Teilaufgabe 1.1 (die Buchstaben SAB in beliebiger Reihenfolge) schon 6 Ergebnisse beinhaltet, muss dieses nur um ein Ergebnis ergänzt werden.

Ereignis: „Man kann aus den gewürfelten Buchstaben das Wort SAB bilden oder man erhält dreimal S„.

- 1.3 $P(C) = \frac{2}{9}$; $P(\bar{C}) = \frac{7}{9}$ (siehe Teilaufgabe 1.1)

Gesucht ist der Stichprobenumfang n .

$$B_{n; \frac{2}{9}}(X \geq 1) > 0,9$$

$$1 - B_{n; \frac{2}{9}}(X = 0) > 0,9$$

$$B_{n; \frac{2}{9}}(X = 0) < 0,1$$

$$\binom{n}{0} \cdot \left(\frac{2}{9}\right)^0 \cdot \left(\frac{7}{9}\right)^n < 0,1$$

$$1 \cdot 1 \cdot \left(\frac{7}{9}\right)^n < 0,1$$

$$n \cdot \ln\left(\frac{7}{9}\right) < \ln(0,1)$$

$$n > \frac{\ln(0,1)}{\ln\left(\frac{7}{9}\right)} = 9,162$$

Man benötigt mindestens 10 Versuche.

- 1.4 Die Zufallsvariable X gibt die Anzahl der erhaltenen Preise an. Gesucht wird der Erwartungswert $E(x)$.

x_i	0	1	2	3
$P(X = x_i)$	$\left(\frac{7}{9}\right)^3 = \frac{343}{729}$	$3 \cdot \frac{2}{9} \cdot \left(\frac{7}{9}\right)^2 = \frac{98}{243}$	$3 \cdot \left(\frac{2}{9}\right)^2 \cdot \frac{7}{9} = \frac{28}{243}$	$\left(\frac{2}{9}\right)^3 = \frac{8}{729}$
$x_i \cdot P(X = x_i)$	0	$\frac{98}{243}$	$\frac{56}{243}$	$\frac{24}{729}$

$$E(x) = \sum_{i=1}^4 x_i \cdot P(X = x_i) = 0 + \frac{98}{243} + \frac{56}{243} + \frac{24}{729} = \frac{2}{3}$$

Erwartungswert bei max. 900 Spielen: $900 \cdot \frac{2}{3} = 600$.

Es ist also mit 600 Preisen im Durchschnitt zu rechnen.

Die Schule sollte somit etwa 700 Preise bereithalten, das sind etwa mehr als im Schnitt zu erwarten ist.

Abituraufgaben Stochastik BG (Teil 3 mit Hilfsmittel) **Musteraufgaben**
Lösung A10

2.1 Binomialverteilung mit $n = 50$ und $p = 0,25$ für weibliche Besucher.

$$P(A) = B_{50;0,25}(X = 17) = 0,0432 = 4,3 \% \quad (\text{WTR})$$

$$P(B) = B_{50;0,25}(11 \leq X \leq 18) = B_{50;0,25}(X \leq 18) - B_{50;0,25}(X \leq 10) = 0,7091 = 70,9 \%$$

$$P(C) = 0,75^{42} \cdot 0,25^8 = 8,6 \cdot 10^{-11} \approx 0$$

2.2 Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass sich unter 1000 Besuchern eines Fußballspiels mindestens 300 Frauen befinden.

2.3 Wegen der angegebenen Wahrscheinlichkeit 95,4 % muss das $2 - \sigma$ -Intervall verwendet werden.

$$\mu = n \cdot p = 20000 \cdot 0,25 = 5000; \quad z = 2$$

$$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)} = \sqrt{20000 \cdot 0,25 \cdot 0,75} = 61,24$$

2- σ -Intervall:

$$[5000 - 2 \cdot 61,24; 5000 + 2 \cdot 61,24] = [4877,5; 5122,0]$$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von 95,4 % liegt die Anzahl der benötigten Flyer zwischen 4878 und 5122 Stück.

Empfehlung des Geschäftsführers:

Wahrscheinlichkeit von 99,7 % entspricht dem 3- σ -Intervall: [4817; 5182].

Der Geschäftsführer möchte mehr Flyer drucken und damit seinen Umsatz steigern.

2.4 95 %-Vertrauensintervall:

$$h = \frac{36}{134} = 0,27; \quad n = 134; \quad z = 1,96$$

$$\left[0,27 - 1,96 \cdot \sqrt{\frac{0,27 \cdot (1 - 0,27)}{134}}; 0,27 + 1,96 \cdot \sqrt{\frac{0,27 \cdot (1 - 0,27)}{134}} \right] = [0,19; 0,35]$$

Mit 95,4 %-iger Sicherheit liegt der Anteil der weiblichen Zuschauer zwischen 19 % und 35 %.

Lösung A11

1.1 Binomialverteilung mit $n = 20$ und $p = 0,2$ für „2. Wahl“-Fliesen.

A: In einer Packung sind genau vier „2. Wahl“-Fliesen.

$$P(A) = B_{20;0,2}(X = 4) = 0,2182 = 21,8 \%$$

B: In einer Packung sind mindestens 90 % der Fliesen „1.-Wahl“-Fliesen.

$20 \cdot 0,9 = 18$ „1. Wahl“-Fliesen, also höchstens zwei „2. Wahl“-Fliesen.

$$P(B) = B_{20;0,2}(X \leq 2) = 0,2061 = 20,6 \%$$

C: Eine Packung enthält höchstens um 2 von der erwarteten Anzahl der „2.-Wahl“-Fliesen abweichende Anzahl „2. Wahl“-Fliesen.

$$\mu = n \cdot p = 20 \cdot 0,2 = 4$$

$$\mu - 2 = 2; \quad \mu + 2 = 6$$

$$P(C) = B_{20;0,2}(2 \leq X \leq 6) = B_{20;0,2}(X \leq 6) - B_{20;0,2}(X \leq 1) = 0,8441 = 84,4 \%$$

1.2 Zunächst bestimmen wir die Wahrscheinlichkeit, dass eine Reihe nur aus „1. Wahl“-Fliesen besteht:

$$P = 0,8^5 = 0,3277 \quad (5 \text{ Fliesen})$$

Mindestens eine Reihe nur aus „1. Wahl“-Fliesen über das Gegenereignis „Keine Reihe besteht nur aus „1. Wahl“-Fliesen“.

$$P = 1 - (1 - 0,3277)^4 = 1 - (0,6723)^4 = 0,7957 = 79,6 \% \quad (4 \text{ Reihen})$$

Abituraufgaben Stochastik BG (Teil 3 mit Hilfsmittel) *Musteraufgaben*

- 1.3 Es sei $W1$: Fliese „1. Wahl“; $W2$: Fliese „2. Wahl“, weiterhin a : aussortiert; $\bar{a}$: nicht aussortiert.

E : Eine zufällig ausgewählte Fliese wird als „1. Wahl“-Fliese nicht aussortiert.

$$\Omega_E = \{W1; \bar{a}, W2\bar{a};\}$$

$$P(E) = 0,8 \cdot 0,95 + 0,2 \cdot 0,1 = 0,78 = 78 \%$$

Die Wahrscheinlichkeit, mit der das Testgerät eine zufällig ausgewählte Fliese als „1. Wahl“ einstuft (also nicht aussortiert) beträgt 78 %.

Nun liegt Fragestellung zur bedingten Wahrscheinlichkeit vor, da bekannt ist, dass die Fliese nicht aussortiert wurde, $P(E) = 0,78$

F : Fliese ist „2. Wahl“, $P(F) = 0,2$

$$P_E(F) = \frac{P(F \cap E)}{P(E)} = \frac{0,2 \cdot 0,1}{0,78} = 0,0256$$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von 2,56 % ist eine Fliese, die bei der Prüfung nicht aussortiert wurde, in Wirklichkeit „2. Wahl“.

Lösung A12

- 2.1 Binomialverteilung mit $n = 4$ und $p = 0,2$ für RWE-Fans mit Alkohol.

$$P(A) = B_{4;0,2}(X \geq 1) = 1 - B_{4;0,2}(X = 0) = 0,5944 = 59,4 \% \text{ (WTR)}$$

$$P(B) = B_{4;0,2}(X = 2) = 0,1536 = 15,4 \% \text{ (WTR)}$$

$$P(C) = B_{4;0,2}(X \geq 3) = 1 - B_{4;0,2}(X \leq 2) = 0,0272 = 2,7 \% \text{ (WTR)}$$

- 2.2 Anteil der neutralen Zuschauer:

Da 15 % aller Zuschauer Alkohol bei sich haben, muss gelten:

$$0,48 \cdot 0,2 + 0,3 \cdot 0,1 + 0,22 \cdot x = 0,15$$

$$x = 0,109$$

Ca. 10,9 % der neutralen Zuschauer haben also Alkohol bei sich.

Nun liegt Fragestellung zur bedingten Wahrscheinlichkeit vor, da bekannt ist, dass die ausgewählte Person Alkohol bei sich hat.

B : Person hat Alkohol bei sich (Vorwissen); $P(B) = 0,15$

A : Person ist TuS-Fan (gesuchtes Ereignis)

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0,3 \cdot 0,1}{0,15} = 0,2$$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von 20 % ist die Person ein TuS-Fan.

- 2.3 90 %-Vertrauensintervall:

$$h = \frac{66}{200} = 0,33; n = 200; \gamma = 0,9 \text{ ergibt } z = 1,64$$

$$\left[0,33 - 1,64 \cdot \sqrt{\frac{0,33 \cdot (1-0,33)}{200}}; 0,33 + 1,64 \cdot \sqrt{\frac{0,33 \cdot (1-0,33)}{200}} \right] = [0,2755; 0,3845]$$

Anzahl der Zuschauer mit Alkohol:

$$0,2755 \cdot 12000 = 3306; 0,3845 \cdot 12000 = 4614$$

Mit 90 %-iger Sicherheit haben mindestens 3306 und höchstens 4614 Zuschauer Alkohol dabei.

Abituraufgaben Stochastik BG (Teil 3 mit Hilfsmittel) Musteraufgaben
Lösung A13

- 1.1 Es sei Mondlampe = m , keine Mondlampe = $\bar{m}$ dann gilt:
 $p_{m_A} = 0,04$; $p_{m_B} = 0,07$; $p_{m_V} = 0,1$; $p_A = 0,5$; $p_B = 0,3$; $p_C = 0,2$
 E: Gekaufte Lampe ist Mondlampe
 F: Gekaufte Lampe ist keine Mondlampe und nicht von Hersteller C.
 $\Omega_E = \{p_A p_{m_A}; p_B p_{m_B}; p_C p_{m_C}\}$
 $P(E) = 0,04 \cdot 0,5 + 0,07 \cdot 0,3 + 0,1 \cdot 0,2 = 0,061 = 6,1 \%$
 $\Omega_F = \{p_A p_{\bar{m}_A}; p_B p_{\bar{m}_B}\}$
 $P(F) = 0,96 \cdot 0,5 + 0,93 \cdot 0,3 = 0,759 = 75,9 \%$
- 1.2 Fragestellung der bedingten Wahrscheinlichkeit, da bekannt ist, dass die Lampe eine Mondlampe ist.
 A: Lampe stammt von Hersteller (gesuchte Wahrscheinlichkeit).
 B: Lampe ist Mondlampe (Vorwissen); $P(B) = 0,061$
 $P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0,5 \cdot 0,04}{0,61} = 0,3279$
 Mit einer Wahrscheinlichkeit von 32,8 % ist die Mondlampe von Hersteller A.
- 1.3 Die Zufallsvariable X gibt die Anzahl der Mondlampen an.
 Binomialverteilung (alle Lampen sind von Hersteller A) mit $n = 50$; $p = 0,04$.
 $B_{50;0,04}(X \leq 3) = 0,8609 = 86,1 \%$ (WTR)
 $B_{50;0,04}(X = 2) = 0,2736 = 27,4 \%$ (WTR)
 $B_{50;0,04}(1 \leq X \leq 4) = B_{50;0,04}(X \leq 4) - B_{50;0,04}(X = 0) = 0,951 - 0,132 = 0,821$ (WTR)
- 1.4 Die Zufallsvariable Y gibt die Anzahl der Mondlampen an.
 Binomialverteilung (alle Lampen sind von Hersteller B) mit $n = 50$; $p = 0,07$
 und $X > \mu$ mit $\mu = n \cdot p = 50 \cdot 0,07 = 3,5$.
 $B_{50;0,07}(Y \geq 4) = 1 - B_{50;0,07}(Y \leq 3) = 1 - 0,5327 = 0,4673$ (WTR)

Lösung A14

- 2.1 $p_r = 0,50$; $p_b = 0,3$; $p_{gr} = 0,15$; $p_{ge} = 0,04$; $p_{gold} = 0,01$;
 A: Keine Ente mit roter Markierung
 $\Omega_A = \{p_{\bar{r}} p_{\bar{r}} p_{\bar{r}}\}$
 $P(A) = \frac{50}{100} \cdot \frac{49}{99} \cdot \frac{48}{98} = \frac{4}{33}$
 B: Drei gleichfarbige Enten.
 $\Omega_B = \{rrr; bbb; grgrgr; gegege\}$
 $P(B) = \frac{50}{100} \cdot \frac{49}{99} \cdot \frac{48}{98} + \frac{30}{100} \cdot \frac{29}{99} \cdot \frac{28}{98} + \frac{15}{100} \cdot \frac{14}{99} \cdot \frac{13}{98} + \frac{4}{100} \cdot \frac{3}{99} \cdot \frac{2}{98} = 0,149$
 $\Omega_C = \{rbgr; rgrb; grrb; grbr; brgr; bgrr\}$
 $P(C) = 3! \cdot \frac{50}{100} \cdot \frac{30}{99} \cdot \frac{15}{98} = 6 \cdot \frac{50}{100} \cdot \frac{30}{99} \cdot \frac{15}{98} = 0,139$
- 2.2 $P(\text{Gold 1. Zug}) = \frac{50}{100}$
 $P(\text{Gold 2. Zug}) = \frac{50}{100} \cdot \frac{1}{99} = \frac{1}{100}$
 $P(\text{Gold 3. Zug}) = \frac{50}{100} \cdot \frac{98}{99} \cdot \frac{1}{98} = \frac{1}{100}$

Abituraufgaben Stochastik BG (Teil 3 mit Hilfsmittel) **Musteraufgaben**

- 2.3 Gefragt ist der Erwartungswert für die Punktzahl für den ersten Zug.
 Die Zufallsvariable X gibt die Anzahl erreichbarer Punkte an.

x_i	10	20	50	100	500
$P(X = x_i)$	$\frac{50}{100}$	$\frac{30}{100}$	$\frac{15}{100}$	$\frac{4}{100}$	$\frac{1}{100}$
$x_i \cdot P(X = x_i)$	5	6	7,5	4	5

$$E(x) = \sum_{i=1}^5 x_i \cdot P(X = x_i) = 5 + 6 + 7,5 + 4 + 5 = 27,5$$

Ein Spieler kann im Durchschnitt beim ersten Angeln mit 27,5 Punkten rechnen.

- 2.4 Die Zufallsvariable X gibt die Anzahl der goldenen Enten an.
 n =gesucht, $p = 0,01$ für goldene Ente und $P(X \geq 1) > 0,8$.

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \left(\frac{99}{100} \cdot \frac{98}{99} \cdot \frac{97}{98}\right)^n$$

$$1 - \left(\frac{97}{100}\right)^n > 0,8$$

$$\left(\frac{97}{100}\right)^n < 0,2 \quad | \quad \ln$$

$$n \cdot \ln\left(\frac{97}{100}\right) = \ln(0,2)$$

$$n > \frac{\ln(0,2)}{\ln\left(\frac{97}{100}\right)} = 52,8$$

Marina hat mindestens 53 Spiele beobachtet.