Abituraufgaben Stochastik BG *(Teil 3 mit Hilfsmittel)* 2022-2023

Lösung A1/2022

1.1.1 *Wahrscheinlichkeit eines jugendlichen Teilnehmers, der einen Streamingdienst nutzt:*

Wir vervollständigen zunächst die Vierfeldertafel.

	S	$\overline{S}$	$\sum$
J	450	50	500
$\overline{J}$	350	150	500
$\sum$	800	200	1000

$P(J \cap S) = \frac{450}{1000} = 0{,}45 = 45\,\%$

Beurteilung, ob die Ereignisse J und S stochastisch unabhängig sind.

Zwei Ereignisse J und S sind stochastisch unabhängig wenn gilt:

$P(J \cap S) = P(J) \cdot P(S)$

$P(J) = \frac{500}{1000} = \frac{1}{2}; \quad P(S) = \frac{800}{1000} = \frac{4}{5}$

$P(J) \cdot P(S) = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5} = \frac{4}{10} = 0{,}4 = 40\,\% \neq P(J \cap S)$

Die Ereignisse J und S sind stochastisch abhängig.

1.1.2 *Bedeutung des Wertes $P_J(S)$:*

Der Wert $P_J(S)$ gibt die Wahrscheinlichkeit an, dass ein Teilnehmer einen Streamingdienst benutzt unter der Bedingung, dass er jugendlich ist.

1.2 *Bestimmung der Wahrscheinlichkeit, dass ein Nutzer von Streamingdiensten weder Anbieter A noch B verwendet.*

Wir tragen die vorgegebenen Werte in eine Vierfeldertafel ein.

	A	$\overline{A}$	$\sum$
B	0,35	0,05	0,4
$\overline{B}$	0,35	0,25	0,6
$\sum$	0,7	0,30	1

$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0{,}25 = 25\,\%$

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

1.3.1 *Ermitteln von Werten:*

Binomialverteilung mit $n = 5000$; $p = 0{,}2$ für Teilnahme, X beschreibt die Anzahl der Personen, die an der Umfrage teilnehmen.

Erwartungswert und Standardabweichung:

$\mu = n \cdot p = 5000 \cdot 0{,}2 = 1000$

$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} = \sqrt{1000 \cdot 0{,}8} = 28{,}3$

Bestimmung eines Wertes von k, damit $P(\mu - k \leq X \leq \mu + k) \geq 0{,}9$.

Wir verwenden die einschlägig bekannten Sigma-Regeln.

Es gilt $P(\mu - 1{,}64\sigma \leq X \leq \mu + 1{,}64\sigma) \approx 0{,}9$.

$1{,}64\sigma = 1{,}64 \cdot 28{,}3 = 46{,}4$

$\mu - 1{,}64\sigma = 1000 - 46{,}4 = 953{,}6$ ➔ gewählt 954.

$\mu + 1{,}64\sigma = 1000 + 46{,}4 = 1046{,}4$ ➔ gewählt 1046.

$B_{5000;0,2}(954 \leq X \leq 1046) = 0{,}9493 - 0{,}0494 = 0{,}8999$

Weitere Kontrolle mit:

$B_{5000;0,2}(953 \leq X \leq 1047) = 0{,}9528 - 0{,}0459 = 0{,}9069$

Das kleinste k ist somit $1047 - 1000 = 47$.

1.3.2 *Mindestanzahl anzusprechender Personen um mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 95 % mindestens 1000 Personen zur Teilnahme zu bewegen.*

Gesucht ist der Stichprobenumfang n.

$B_{n;0,2}(X \geq 1000) \geq 0{,}95$

$B_{n;0,2}(X \leq 999) \leq 0{,}05$

n	$B_{n;0,2}(X \leq 999)$
5100	0,2370
5210	0,07
5220	0,0612
5230	0,0533
5235	0,0497
5234	0,0505

Es müssen mindestens 5235 Personen angesprochen werden.

Lösung A2/2022

2.1.1.1 *Berechnen bestimmter Wahrscheinlichkeit:*

$P(rot) = \frac{20}{100}$; $P(gelb) = \frac{30}{100}$; $P(blau) = \frac{50}{100}$

Jeweils nur im ersten Zug (Ziehen OHNE Zurücklegen)

A: Die ersten beiden Kugeln sind blau und die dritte Kugel ist rot.

$P(A) = P(blau; blau; rot) = \frac{50}{100} \cdot \frac{49}{99} \cdot \frac{20}{98} = \frac{5}{99}$

B: Mindestens zwei Kugeln sind rot.

$P(B) = P(rot; rot; rot) + 3 \cdot P(rot; rot; \overline{rot})$

$P(B) = \frac{20}{100} \cdot \frac{19}{99} \cdot \frac{18}{98} + 3 \cdot \frac{20}{100} \cdot \frac{19}{99} \cdot \frac{80}{98} = \frac{817}{8085}$

C: Die dritte Kugel ist gelb.

$P(C) = P(gelb; gelb; gelb) + P\left(\overline{gelb}; gelb; gelb\right) +$
$P\left(gelb; \overline{gelb}; gelb\right) + P\left(\overline{gelb}; \overline{gelb}; gelb\right)$

$P(C) = \frac{30 \cdot 29 \cdot 28 + 2 \cdot 30 \cdot 29 \cdot 40 + 70 \cdot 69 \cdot 30}{100 \cdot 99 \cdot 98} = \frac{3}{10}$

2.1.1.2 *Formulierung eines Ereignisses D im Sachzusammenhang:*

Der Term $3! \cdot \frac{20}{100} \cdot \frac{30}{99} \cdot \frac{50}{98}$ berechnet die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses D beim dreimaligen Ziehen ohne Zurücklegen drei unterschiedliche Farben zu ziehen.

2.1.2 *Widerlegung einer Behauptung:*

Der Term $\binom{6}{4} \cdot 0{,}2^4 \cdot 0{,}8^2$ berechnet die beschriebene Wahrscheinlichkeit im Falle von „mit Zurücklegen“.
Aufgabenstellung lautet jedoch „ohne Zurücklegen.

Berichtigung des Terms:

Richtig wäre $\binom{6}{4} \cdot \frac{20}{100} \cdot \frac{19}{99} \cdot \frac{18}{98} \cdot \frac{17}{97} \cdot \frac{80}{96} \cdot \frac{79}{95}$

2.2 *Ermittlung einer Anzahl Kugeln in einer Urne:*

$P(rot) = \frac{n}{3n}$; $P(gelb) = \frac{n}{3n}$; $P(blau) = \frac{n}{3n}$

Jeweils nur im ersten Zug.

A: Beim dreimaligen Ziehen werden nur Kugeln gleicher Farbe gezogen.

$P(A) = P(rot; rot; rot) + P(gelb; gelb; gelb) + P(blau; blau; blau)$

$P(rot; rot; rot) = P(gelb; gelb; gelb) = P(blau; blau; blau)$

$P(A) = 3 \cdot P(rot; rot; rot) = 3 \cdot \frac{n}{3n} \cdot \frac{n-1}{3n-1} \cdot \frac{n-2}{3n-2}$

$P(A) = \frac{(n-1)(n-2)}{(3n-1)(3n-2)} = \frac{n^2-3n+2}{9n^2-9n+2}$

$\frac{n^2-3n+2}{9n^2-9n+2} \geq 0{,}1 \quad | \quad \cdot (9n^2 - 9n + 2)$

$n^2 - 3n + 2 \geq 0{,}9n^2 - 0{,}9n + 0{,}2$

$0{,}1n^2 - 2{,}1n + 1{,}8 \geq 0 \quad | \quad : 0{,}1$

$n^2 - 21n + 18 \geq 0$

$n_{1,2} = 10{,}5 \pm \sqrt{110{,}25 - 18} = 10{,}5 \pm 9{,}6$

$n_1 = 20{,}1$; $n_2 = 0{,}9$

n_2 ist keine Lösung der Aufgabe.

Es liegen 63 Kugeln in der Urne, nämlich jeweils 21 rote, blaue und gelbe.

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de