*Abituraufgaben BG Teil 2 bis 4 (mit Hilfsmittel) 2022*

## Teil2 - Analysis / Anwendungsorientierte Analysis

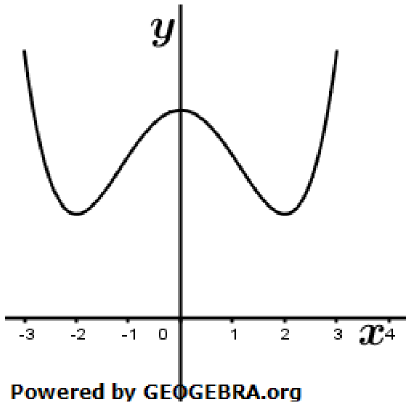
*Die Aufgabe A1 ist zu bearbeiten.*

### Aufgabe A1/2022

1 Gegeben sind die Punkte $T_1(-2|2)$, $T_2(2|2)$ und $H(0|4)$.

1.1 Bestimmen Sie einen Funktionsterm der Polynomfunktion vom Grad $4$, deren Schaubild $K$ die folgenden drei Eigenschaften hat:
- $K$ ist symmetrisch zur $y$-Achse
- $K$ schneidet die $y$-Achse im Punkt $H$
- $K$ hat einen Extrempunkt in $T_1$ (4P)

1.2 Gegeben ist die Funktion $f$ mit
$f(x) = \frac{1}{8}x^4 - x + 4;\ -3 \leq x \leq 3$
Das Schaubild von $f$ ist $K_f$ (siehe Abbildung).




1.2.1 Die Funktionsgleichung von $f$ lässt sich in der Form
$f(x) = a(x+b)^2(x+c)^2 + 2$ darstellen.
Geben Sie passende Werte für $a, b$ und $c$ an. (2P)

1.2.2 Eine nach unten geöffnete Parabel, die $H$ als Scheitelpunkt hat, schneidet $K_f$ in einem Punkt $S\big(x_0|f(x_0)\big)$ mit $x_0 > 0$. Begründen Sie, dass $x_0 < 2\sqrt{2}$ gilt. (3P)

1.2.3 Ermitteln Sie den größten Wert der ersten Ableitung von $f$ für $-3 \leq x \leq 3$. (4P)

1.3 Das Schaubild der Funktion $g$ mit $g(x) = \cos(u - x) + v;\ -3 \leq x \leq 3$ hat nur die drei Extrempunkte $T_1$, $H$ und $T_2$.

1.3.1 Bestimmen Sie die Werte von $u$ und $v$. (2P)

1.3.2 Skizzieren Sie das Schaubild der Stammfunktion $G$ von $g$ mit $G(-3) = 0$.
Begründen Sie, dass die folgenden beiden Aussagen wahr sind:
(1) Jede Stammfunktion von $g$ besitzt eine Umkehrfunktion.
(2) Der Definitionsbereich einer solchen Umkehrfunktion ist ein Intervall der Länge $\int_{-3}^{3} g(x)\,dx$. (5P)

*Abituraufgaben BG Teil 2 bis 4 (mit Hilfsmittel) 2022*

*Von drei Aufgaben A2 bis A4 ist eine Aufgabe auszuwählen und zu bearbeiten.*

## Aufgabe A2/2022

2 Forscher gehen davon aus, dass bei der Herstellung von Zement im Zeitraum von Beginn des Jahres $1950$ bis einschließlich $2010$ weltweit rund $3 \cdot 10^{10}$ Tonnen Kohlendioxid ($CO_2$) freigesetzt wurden, d.h. pro Jahr wurden durchschnittlich etwa $4{,}9 \cdot 10^8$ Tonnen $CO_2$ freigesetzt.

2.1 Ein Quadratkilometer ($km^2$) Regenwald absorbiert jährlich rund $400$ Tonnen $CO_2$ aus der Atmosphäre.
Ermitteln Sie, wie viele Quadratkilometer Regenwald nötig wären, um die durchschnittlich pro Jahr so freigesetzte Menge an $CO_2$ zu absorbieren.
Geben Sie an, um wie viel Prozent diese Regenwaldfläche von der Fläche Deutschlands (circa $357000\, km^2$) abweicht. (3P)

2.2 Andererseits absorbiert Zement, falls dieser zum Beispiel zu Beton verarbeitet wurde, im Laufe der Zeit wieder einen Teil des zuvor freigesetzten $CO_2$.
In der Tabelle sind die von den Forschern ermittelten Mengen an $CO_2$ aufgelistet, die weltweit in den betrachteten Jahren durch den verarbeiteten Zement absorbiert wurden.
Beispielsweise wurden im Jahr $1990$ weltweit $255$ Millionen Tonnen $CO_2$ durch den verarbeiteten Zement absorbiert.

| Jahr | 1950 | 1970 | 1990 | 2010 |
|---|---|---|---|---|
| $CO_2$ in Tonnen | $3{,}7 \cdot 10^7$ | $9{,}7 \cdot 10^7$ | $25{,}5 \cdot 10^7$ | $67{,}2 \cdot 10^7$ |

2.2.1 Die vom Zement absorbierte Menge an $CO_2$ ist im dargestellten Zeitraum exponentiell angewachsen. Erläutern Sie, wie dies aus den Daten hervorgeht. (2P)

2.2.2 Die Funktion $m$ mit $m(t) = 3{,}7 \cdot 10^7 \cdot e^{kt}$ und $t \geq 0$ modelliert die jährlich absorbierte Menge an $CO_2$ in Tonnen. Dabei wird $t$ in Jahren gemessen und $t = 0$ entspricht dem Beginn des Jahres $1950$.

2.2.2.1 Zeigen Sie, dass die Wachstumskonstante $k$ etwa den Wert $0{,}048$ hat. (2P)

2.2.2.2 Ermitteln Sie für den Zeitraum von Beginn des Jahres $1950$ bis einschließlich $2010$, wie viel Prozent der bei der Herstellung von Zement freigesetzten $CO_2$-Menge im selben Zeitraum wieder absorbiert wurden. (3P)

## Aufgabe A3/2022

3 Ein Marktforschungsinstitut ermittelt zu Beginn des Jahres $2021$ einen Marktanteil von $6\,\%$ der rein elektrisch angetriebenen Autos (E-Autos) unter allen neu zugelassenen Autos.
Die zukünftige Entwicklung dieses Marktanteils zum Zeitpunkt $t$ wird im Folgenden durch die Funktion $f$ mit $f(t) = 0{,}06 \cdot e^{0{,}04t};\ \ t \geq 0$ modelliert, wobei $t$ in Monaten ab Beginn des Jahres $2021$ gemessen wird.
Beispielsweise ist $f(1)$ der Marktanteil, den man zu Beginn des Monats Februar im Jahr $2021$ für die E-Auto Neuzulassungen erwartet.

3.1 Beurteilen Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.
(1) Zu Beginn des Monats Februar $2023$ wird etwa jedes sechste neu zugelassene Auto ein E-Auto sein.
(2) Der Marktanteil der E-Autos wird im Jahr $2025$ erstmalig $50\,\%$ übersteigen. (3P)

3.2 Begründen Sie, dass der Marktanteil der neu zugelassenen E-Autos um mehr als $60\,\%$ pro Jahr zunimmt. (2P)

3.3 Ermitteln Sie den durchschnittlichen Marktanteil der E-Autos unter allen neu zugelassenen Autos von Beginn des Jahres $2021$ bis einschließlich $2025$. (3P)

3.4 Im Folgenden wird mit der Funktion $g\colon\ t \to g(t)$ mit $t \geq 0$ die gesamte Anzahl der monatlich neu zugelassenen Autos zum Zeitpunkt $t$ modelliert, wobei $t$ die vergangene Zeit in Monaten ab Beginn des Jahres $2021$ ist.
Formulieren Sie eine Frage im Sachzusammenhang, die durch die Bestimmung des Wertes des Integrals
$\int_3^{39} f(t) \cdot g(t)\, dt$
beantwortet werden kann. (2P)

Aufgabe A4/2022

4. Die Mantelfläche einer ein Meter hohen Vase wird durch Rotation des Schaubilds der Funktion $f$ mit
$f(x) = 0{,}014x^3 - 0{,}2x^2 + 0{,}625x + 1{,}7;\;\; 0 \le x \le 10$
um die $x$ -Achse modelliert. Dabei entspricht eine Längeneinheit einem Dezimeter ($dm$) in der Realität. Die Dicke des Vasenbodens und die Wandstärke der Vase werden vernachlässigt.

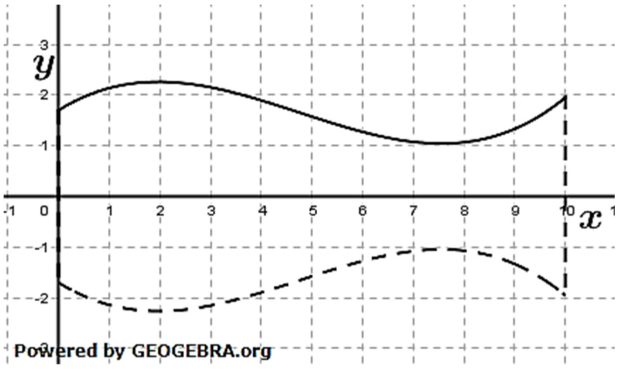



**Abb.1**: Modellierung der Vasenkontur mit $f$. Das Schaubild von $f$ ist als durchgezogene Kurve dargestellt.

**Abb. 2**: Vase

4.1 Bestimmen Sie den Wert des Flächeninhalts des Bodens der Vase. Berechnen Sie die Differenz aus dem Durchmesser der Vasenöffnung und dem Durchmesser des Vasenbodens. (2P)

4.2 Beurteilen Sie, ob die folgende Aussage wahr oder falsch ist:
*„Der größte Durchmesser der Vase ist größer als $4{,}4\ dm$."* (3P)

4.3 Es gilt $\pi \cdot \int_0^5 \left(f(x)\right)^2 dx \approx 65{,}57$.
Das Design der Vase soll nun geändert werden. Bis zu einer Höhe von $5\ dm$ soll dabei das Modell $f$ beibehalten werden. Ab dieser Höhe wird eine Gerade verwendet, die sich knickfrei an das Schaubild von $f$ anschließt.
Bestimmen Sie die Höhe der derart veränderten Vase, falls deren Fassungsvermögen insgesamt $70$ Liter betragen soll. (5P)

*Abituraufgaben BG Teil 2 bis 4 (mit Hilfsmittel) 2022*

Teil3 - Stochastik

*Von zwei Aufgaben A1 und A2 ist eine Aufgabe auszuwählen und zu bearbeiten.*

Aufgabe A1/2021

1 Ein Institut untersucht im Auftrag eines Streamingdienstes das Medienverhalten von Bürgern einer Großstadt.

1.1 Eine statistische Erhebung unter $1000$ zufällig ausgewählten Teilnehmern hat das Folgende ergeben:
$450$ Teilnehmer sind jugendlich und nutzen einen Streamingdienst. Die Ergebnisse der Erhebung sind in der nicht vollständig ausgefüllten Tabelle dargestellt. Dabei bezeichnen $J$ und $S$ die folgenden Ereignisse:

| | $S$ | $\overline{S}$ | |
|---|---|---|---|
| $J$ | 450 | | |
| $\overline{J}$ | | 150 | |
| | 800 | | 1000 |

$J$: Teilnehmer ist jugendlich
$S$: Teilnehmer nutzt einen Streamingdienst

1.1.1 Geben Sie an, mit welcher Wahrscheinlichkeit ein Teilnehmer der Erhebung jugendlich ist und einen Streamingdienst nutzt.
Beurteilen Sie, ob die Ereignisse $J$ und $S$ stochastisch unabhängig sind. (3P)

1.1.2 Erläutern Sie die Bedeutung des Wertes $P_J(S)$ im Sachzusammenhang. (2P)

1.2 Dem Institut ist bekannt, dass $70\,\%$ der Nutzer von Streamingdiensten den Anbieter $A$, $40\,\%$ den Anbieter $B$ und $35\,\%$ beide Anbieter $A$ und $B$ verwenden.
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein Nutzer von Streamingdiensten keinen dieser beiden Anbieter verwendet. (3P)

1.3 An einer vom Institut organisierten Umfrage nimmt erfahrungsgemäß nur jede fünfte angesprochene Person teil.

1.3.1 Es werden $5000$ zufällig ausgewählte Personen angesprochen. Die binomialverteilte Zufallsgröße $X$ beschreibt die Anzahl der Personen, die an der Umfrage teilnehmen.
Berechnen Sie den Erwartungswert $\mu$ und die Standardabweichung $\sigma$ von $X$.
Bestimmen Sie die kleinste natürliche Zahl $k$, für die gilt:
$P(\mu - k \le X \le \mu + k) \ge 0{,}9$. (4P)

1.3.2 Ermitteln Sie die Anzahl der Personen, die mindestens angesprochen werden müssen, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens $95\,\%$ mindestens $1000$ Personen für die Umfrage zu gewinnen. (3P)

## Aufgabe A2/2022

2.1 In einer Urne befinden sich $100$ Kugeln. $20$ Kugeln sind rot, $30$ gelb und $50$ blau. Aus dieser wird immer ohne Zurücklegen gezogen.

2.1.1 Zunächst werden nacheinander drei Kugeln gezogen.

2.1.1.1 Berechnen Sie jeweils die Wahrscheinlichkeit der folgenden Ereignisse:

A: Die ersten beiden Kugeln sind blau und die dritte Kugel ist rot.

B: Mindestens zwei Kugeln sind rot.

C: Die dritte Kugel ist gelb. (5P)

2.1.1.2 Für die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses D gilt:

$P(D) = 3! \cdot \frac{20}{100} \cdot \frac{30}{99} \cdot \frac{50}{98}$

Formulieren Sie ein zugehöriges Ereignis D im Sachzusammenhang. (2P)

2.1.2 Es werden nun sechs Kugeln gezogen. Jemand behauptet:

*„Die Wahrscheinlichkeit, dass dabei genau vier rote Kugeln gezogen werden, kann durch* $\binom{6}{4} \cdot 0{,}2^4 \cdot 0{,}8^2$ *berechnet werden."*

Begründen Sie, warum diese Behauptung falsch ist, und geben Sie einen richtigen Lösungsansatz an. (3P)

2.2 In einer anderen Urne befinden sich ebenfalls nur rote, gelbe und blaue Kugeln. Von jeder Farbe sind jedoch jeweils gleich viele Kugeln in dieser Urne. Die Wahrscheinlichkeit, dass bei dreimaligem Ziehen ohne Zurücklegen nur Kugeln gleicher Farbe gezogen werden ist mindestens $10\,\%$.

Ermitteln Sie die Anzahl der Kugeln, die in dieser Urne mindestens enthalten sein müssen. (5P)

Abituraufgaben BG Teil 2 bis 4 (mit Hilfsmittel) 2022

## Teil4 – Vektorgeometrie

*Eine Aufgabe ist zu bearbeiten, wenn Wahlgebiet „Vektorgeometrie“ im Unterricht behandelt.*

## Aufgabe A1/2022

1 Betrachtet wird das Abtauchen eines U-Bootes (siehe Abbildung). Die Meeresoberfläche wird durch die $x_1x_2$-Ebene dargestellt. Das punktförmige Modell des U-Boots bewegt sich zu Beginn mit konstanter Geschwindigkeit vom Start im Ursprung $O(0|0|0)$ innerhalb einer Minute geradlinig zum Punkt $(60|60|-8)$. Danach behält das U-Boot die Richtung und zunächst auch die Geschwindigkeit bei.

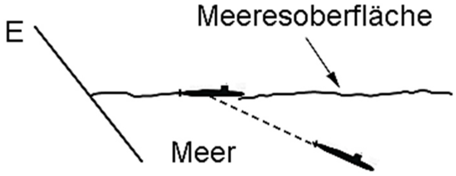



Abbildung: Abtauchen eined U-Bootes

Powered by GEOGEBRA.org

Eine Längeneinheit entspricht einem Meter ($m$) in der Realität. Die Ebene $E$ mit $E\colon\ x_1 + x_2 + 10x_3 + 200 = 0$ modelliert für $x_3 \leq 0$ die Grenze zwischen dem Meer und dem unter Wasser liegenden Land.

1.1 Geben Sie den Punkt $P$ an, an dem sich das U-Boot nach $2$ Minuten befindet.
Nennen Sie die zugehörige Tiefe und berechnen Sie den Abstand von $P$ zu $O$. (2P)

1.2 Berechnen Sie, wie viele Kilometer das U-Boot in einer Stunde zurücklegen würde. (2P)

1.3 Ermitteln Sie die Schnittgerade von $E$ mit der $x_1x_2$-Ebene.
Beschreiben Sie deren Bedeutung im Sachkontext. (3P)

1.4 Ab einer Tiefe von $120\,m$ beschreibt der Vektor $\vec{v_1} = \begin{pmatrix} 15 \\ 15 \\ -2 \end{pmatrix}$ die Geschwindigkeit des U-Boots (in Meter pro Minute) beim Abtauchen in den anschließenden $60$ Minuten. Danach ist das Abtauchen des U-Boots beendet.

1.4.1 Begründen Sie, dass die folgenden Aussagen wahr sind:
(1) *„Der Betrag der Geschwindigkeit reduziert sich ab $120\,m$ Tiefe um $75\,\%$.“*
(2) *„Die Geschwindigkeit ändert sich $15$ Minuten nach Beginn des Abtauchens.“* (2P)

1.4.2 Zeigen Sie, dass sich der Abstand des U-Boots zu $E$ mit zunehmender Tiefe vergrößert. (3P)

1.4.3 Ermitteln Sie den mittleren Abstand des U-Boots zu der durch $E$ modellierten Grenze während der letzten $60$ Minuten des Abtauchens. (3P)

Abituraufgaben BG Teil 2 bis 4 (mit Hilfsmittel) 2022

## Aufgabe A2/2022

2 Betrachtet wird das Modell einer Kirche. Der Kirchturm besteht aus einem Quader mit aufgesetzter Pyramide. Einer Bauzeichnung kann man Folgendes entnehmen:
Die Punkte $A(2|0|0)$, $B(2|2|0)$, $C(0|2|0)$ und $D(0|0|0)$ bilden die Grundfläche. Das Dach hat die vier Eckpunkte $E(2|0|6)$, $F(2|2|6)$, $G(0|2|6)$, $H(0|0|6)$ und die Turmspitze $S(1|1|8)$.
Eine Längeneinheit entspricht $10$ Meter ($m$).

2.1 Zeichnen Sie das Modell des Kirchturmes in ein geeignetes Koordinatensystem. (3P)

2.2 Das Dach des Kirchturmes soll vollständig gedeckt werden. Hierfür werden Ziegel verwendet, die pro Ziegel $0{,}12\ m^2$ abdecken. Die Ziegel werden auf Paletten mit jeweils $200$ Ziegeln geliefert. Bestimmen Sie die kleinstmögliche Anzahl von Paletten, die geliefert werden müssten. (3P)

2.3 Der Vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$ modelliert zu einem bestimmten Zeitpunkt die Richtung des einfallenden Sonnenlichtes.

2.3.1 Berechnen Sie den Winkel, unter dem das Sonnenlicht auf den Boden (d.h. die $x_1x_2$-Ebene) trifft. (2P)

2.3.2 Auf der Turmspitze $S$ befindet sich ein senkrecht stehendes Kreuz der Höhe $h$. Der Kirchturm und das Kreuz werfen einen Schatten. Der Schattenpunkt des höchsten Punktes ist $P(3{,}1|5{,}2|0)$.
Bestimmen Sie die Höhe $h$. (3P)

2.4 Im Kirchturm soll eine Glocke eingebaut werden. Die Position der Glocke wird im Modell mit $Q$ bezeichnet. Der Abstand von $Q$ zu den Eckpunkten $E, F, G$ und $H$ des Daches soll jeweils dreimal so groß sein wie der Abstand von $Q$ zur Turmspitze $S$.
Ermitteln Sie die Koordinaten des Punktes $Q$. (4P)

*Abituraufgaben BG Teil 2 bis 4* (*mit Hilfsmittel*) *2022*

## Teil4 – Matrizen und Prozesse

*Eine Aufgabe ist zu bearbeiten, wenn Wahlgebiet „Matrizen und Prozesse" im Unterricht behandelt.*

### Aufgabe A1/2022 (nicht für TG)

1. Vier verschiedene Stromanbieter $A, B, C$ und $D$ konkurrieren in einer Stadt um die dortigen $25200$ Haushalte. Die Anzahl der Haushalte bleibt konstant. Jeder Haushalt ist an genau einen dieser Anbieter vertraglich gebunden. Verträge sind jeweils ein Jahr lang gültig. Die aktuelle Entwicklung des Wechselverhaltens der Haushalte bei den Stromanbietern lässt sich von einem Jahr zum nächsten modellhaft durch die Gleichung
$\boldsymbol{M} \cdot \overrightarrow{v_n} = \overrightarrow{v_{n+1}}$
mit

$$\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}05 & 0 & 0{,}05 \\ 0{,}15 & 0{,}8 & 0{,}05 & 0 \\ 0 & 0{,}15 & 0{,}7 & 0{,}15 \\ 0{,}05 & 0 & 0{,}25 & 0{,}8 \end{pmatrix} \text{ und } \overrightarrow{v_n} = \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{pmatrix}$$

beschrieben. Hierbei wird die Anzahl der Haushalte, die einen Vertrag mit dem entsprechenden Stromanbieter haben, ebenfalls mit $A, B, C$ und $D$ bezeichnet.

1.1 Interpretieren Sie den Eintrag $0{,}25$ im Sachzusammenhang.
Für zwei mögliche Paare von Stromanbietern wechseln untereinander keinerlei Haushalte. Nennen Sie diese Paare.
Geben Sie den Stromanbieter an, dessen vertraglich gebundene Haushalte am wenigsten zufrieden sind. (4P)

1.2 Im Jahr $2021$ waren $3000$ Haushalte an Stromanbieter $A$, $5000$ Haushalte an $B$ und $7000$ Haushalte an $C$ vertraglich gebunden. Bestimmen Sie für jeden Stromanbieter die zu erwartende Anzahl von Haushalten, die im Jahr $2022$ an den Anbieter gebunden sein werden. (3P)

1.3 Eine Verteilung $\vec{v}$ bleibt von einem auf das nächste Jahr unverändert und Stromanbieter $C$ bindet doppelt so viele Haushalte vertraglich an sich wie Anbieter $A$. Berechnen Sie hierfür die Verteilung aller Haushalte. (4P)

1.4 Anbieter $B$ und $C$ haben jeweils gleich viele Haushalte vertraglich an sich gebunden. Anbieter $A$ möchte die Entwicklung beeinflussen, um langfristig ebenso viele Haushalte wie Anbieter $B$, bzw. Anbieter $C$ an sich zu binden. Eine Werbeaktion von Anbieter $A$ zielt daher darauf ab, den Anteil der alljährlichen Wechsel der Haushalte von $B$ und $D$ zu $A$ um den selben Prozentsatz zu erhöhen. Im selben Maße soll sich dann der Anteil der alljährlichen Wechsel von $B$ und $D$ zu $C$ verringern. Ansonsten soll das Wechselverhalten aber unverändert bleiben.
Beurteilen Sie, ob dies möglich ist und ermitteln Sie gegebenenfalls, wie viel Prozent der Haushalte dabei von Anbieter $B$ zu $C$ wechseln würden. (4P)

## Aufgabe A2/2022 (nicht für TG)

2 Ein Betrieb stellt aus den Rohstoffen $R_1$, $R_2$ und $R_3$ die Zwischenprodukte $Z$, $Z_2$ und $Z_3$ her. Aus diesen Zwischenprodukten werden die Endprodukte $E_1$, $E_2$ und $E_3$ hergestellt. Der Materialfluss in Der Materialfluss in Mengeneinheiten (ME) ist den folgenden Tabellen zu entnehmen.

| | $E_1$ | $E_2$ | $E_3$ |
|---|---|---|---|
| $Z_1$ | 2 | 1 | 2 |
| $Z_2$ | 3 | 0 | 1 |
| $Z_3$ | 1 | 4 | 2 |

| | $E_1$ | $E_2$ | $E_3$ |
|---|---|---|---|
| $R_1$ | 43 | 36 | 33 |
| $R_2$ | 30 | 15 | 19 |
| $R_3$ | 37 | 14 | 20 |

2.1 Für einen Auftrag sollen $400\ ME$ von $E_1$, $600\ ME$ von $E_2$ und $500\ ME$ von $E_3$ hergestellt werden.

2.1.1 Berechnen Sie, wie viele $ME$ der drei Rohstoffe dafür benötigt werden. (2P)

2.1.2 Für diesen Auftrag betragen die Fixkosten $2050$ €, die gesamten Rohstoffkosten $400$ € und die gesamten Fertigungskosten der Endprodukte betragen $1850$ €. Die Fertigungskosten pro $ME$ für $Z_2$ sind $2{,}5$ mal so hoch wie für $Z_1$. Für $Z_3$ sind diese Kosten $1{,}25$ mal so hoch wie für $Z_1$.
Die Verkaufspreise pro $ME$ der Endprodukte betragen $20$ € für $E_1$ und jeweils $35$ € für $E_2$ und $E_3$. Es wird ein Gewinn von $8000$ € erwirtschaftet.
Bestimmen Sie die Fertigungskosten pro $ME$ der drei Zwischenprodukte. (5P)

2.2 Für einen weiteren Auftrag werden $4600\ ME$ des Zwischenprodukts $Z_1$, $3800\ ME$ von $Z_2$ und $6250\ ME$ von $Z_3$ hergestellt. Die Zwischenprodukte sollen für den Auftrag vollständig zu Endprodukten weiterverarbeitet werden, wobei $950\ ME$ von $E_1$ produziert werden sollen.
Beurteilen Sie, ob dieser Auftrag ausführbar ist. (3P)

2.3 Das Endprodukt $E_3$ wird zukünftig nicht mehr produziert. Im Lager befinden sich noch $30000\ ME$ des Rohstoffs $R_2$, die vollständig aufgebraucht werden müssen. Es sollen zudem nicht mehr als $1000\ ME$ von $E_1$ produziert werden.
Ermitteln Sie, wie viele $ME$ der Rohstoffe $R_1$ und $R_3$ mindestens bzw. höchstens im Lager vorhanden sein müssen. (5P)

Teil2 - Analysis / Anwendungsorientierte Analysis

Lösung A1/2022

1.1 Bestimmung des Funktionsterms einer Polynomfunktion:
Allgemeine Form einer Polynomfunktion $4$. Grades symmetrisch zu $y$-Achse:

$f(x) = ax^4 + bx^2 + c$

Zur Auflösung von $a$, $b$ und $c$ benötigen wir drei Bedingungen:

(I) $f(0) = 4$

(II) $f(2) = 2$

(III) $f'(2) = 0$

$f'(x) = 4ax^3 + 2bx$

(I) $a \cdot 0 + b \cdot 0 + c = 4 \quad \rightarrow \quad c = 4$

(II) $16a + 4b + 4 = 2 \quad | \quad -4$

(III) $32a + 4b = 0$

(II) $16a + 4b = -2$

(III) $32a + 4b = 0$

(III)-(II)

$16a = 2$

$a = \frac{1}{8}$

$a \rightarrow (II)$

$2 + 4b = -2$

$4b = -4$

$b = -1$

$f(x) = \frac{1}{8}x^4 - x^2 + 4$

1.2.1 Die Faktorisierung von $f(x) = \frac{1}{8}x^4 - x^2 + 4$ in die Form

$f(x) = a(x+b)^2(x+c)^2 + 2$

Die Funktion $f(x) - 2$ hat bei $x_1 = -b$ und $x_2 = -a$ doppelte Nullstellen. Doppelte Nullstellen berühren die $x$-Achse, sind also Extremstellen. Die beiden Extremstellen von  liegen bei $x_1 = -2$ und $x_2 = 2$. Damit ist $b = 2$ und $c = -2$. Wegen $\frac{1}{8}x^4$ ist $a = \frac{1}{8}$.

$f(x) = \frac{1}{8}(x+2)^2(x-2)^2 + 2$

1.2.2 Begründung eines $x$-Wertes $x_0 < 2\sqrt{2}$

Eine nach unten geöffnete Parabel $p$ mit Scheitelpunkt $H$ hat die Funktionsgleichung. $p(x) = ax^2 + 4$ mit $a < 0$.

$p(x) \cap f(x)$

$ax^2 + 4 = \frac{1}{8}x^4 - x^2 + 4$

$\frac{1}{8}x^4 - x^2 - ax^2 = 0$

$x^2 \cdot \left(\frac{1}{8}x^2 - 1 - a\right) = 0$ | Satz vom Nullprodukt

$x_{1,2} = 0$

$\frac{1}{8}x^2 - 1 - a = 0$

$x^2 = 8 + 8a$

$x_{3,4} = \pm\sqrt{8 + 8a}$

Damit es überhaupt eine Lösung dieser Gleichung gibt, muss $-1 \leq a < 0$ sein. $a = -1$ scheidet aus, da sonst $x_{3,4} = 0$. Wegen $-1 < a < 0$ ist $x_3 < \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

1.2.3 Größter Wert der ersten Ableitung von $f$ für $-3 \leq x \leq 3$.

Größte bzw. kleinste Steigungen treten stets in den Wendepunkten des Graphen einer Funktion auf. Bei Beschränkungen des Definitionsbereichs sind stets auch Randbedingungen zu prüfen.

$f'(x) = \frac{1}{2}x^3 - 2x$

$f''(x) = \frac{3}{2}x^2 - 2$

$\frac{3}{2}x^2 - 2 = 0$

$\frac{3}{2}x^2 = 2$

$x^2 = \frac{4}{3}$

$x_{1,2} = \pm\frac{2}{3}\sqrt{3}$

$f'\left(-\frac{2}{3}\sqrt{3}\right) = \frac{1}{2}\left(-\frac{2}{3}\sqrt{3}\right)^3 - 2\left(-\frac{2}{3}\sqrt{3}\right) = 1{,}54$

Prüfung der Randbedingung bei $x = 3$

$f'(3) = \frac{27}{2} - 6 = 7{,}5$

Die stärkste Steigung befindet sich in $x = 3$.

*Abituraufgaben BG Teil 2 bis 4 (mit Hilfsmittel) 2022*

1.3.1 $g$ mit $g(x) = \cos(u \cdot x) + v;\ -3 \le x \le 3$ hat nur die drei Extrempunkte $T_1$, $H$ und $T_2$.

Bestimmung der Werte von $u$ und $v$:

$u = \frac{2\pi}{p}$ mit $p = 4$ (Entfernung der beiden Tiefpunkte)

$u = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$

$v = \frac{y_{HP} + y_{TP}}{2} = \frac{4+2}{2} = 3$

$g(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot x\right) + 3.$

1.3.2 Schaubild der Stammfunktion $G$ von $g$ mit $G(-3) = 0$.

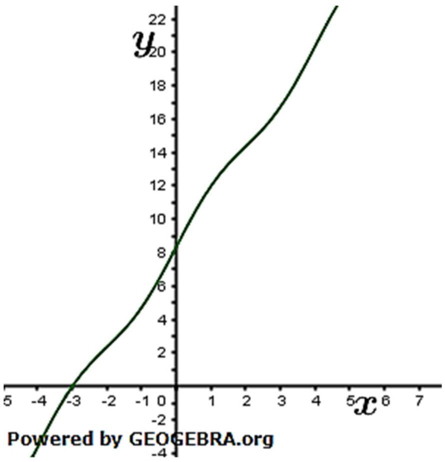
Wir bilden zunächst die Stammfunktion:

$G(x) = \frac{2}{\pi} \cdot sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) + 3x + C$

$G(-3) = 0 = \frac{2}{\pi} \cdot \sin\left(-\frac{3}{2}\pi\right) - 9 + C$

$C = 9 - \frac{2}{\pi} \approx 8{,}36$

$G(x) = \frac{2}{\pi} \cdot sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) + 3x + 8{,}36$




Begründung von Aussagen:

(1) Jede Stammfunktion von $g$ besitzt eine Umkehrfunktion.

Funktionen besitzen Umkehrfunktionen, solange sie entweder monoton wachsend oder monoton fallend sind. $G$ ist im gesamten Definitionsbereich monoton wachsend. $\cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot x\right)$ kann nur Werte zwischen $-1$ und $1$ annehmen, sodass stets $g(x) > 0$ ist.

(2) Der Definitionsbereich ist ein Intervall der Länge $\int_{-3}^{3} g(x)\,dx$.

Bei einer Umkehrfunktion wird der Wertebereich der Ausgangsfunktion zum Definitionsbereich. Der Wertebereich der Ausgangsfunktion bewegt sich jedoch zwischen $G(-3)$ und $G(3)$.

$\int_{-3}^{3} g(x)\,dx = [G(x)]_{-3}^{3} = G(3) - G(-3)$. Somit stimmt der Term mit der Länge des Intervalls überein.

Lösung A2/2022

2.1 *Regenwaldfläche zur Absorption von etwa* $4{,}9 \cdot 10^8$ *Tonnen* $CO_2$*:*

Ein Quadratkilometer ($km^2$) Regenwald absorbiert jährlich rund $400$ Tonnen $CO_2$.

$$A_{ges} = \frac{4{,}9 \cdot 10^8}{400} = 1225 \cdot 10^3\ km^2$$

*Abweichung in Prozent zur Gesamtfläche der BRD:*

$$\frac{A_{ges}}{A_{BRD}} \cdot 100 = \frac{1225 \cdot 10^3}{357 \cdot 10^3} \cdot 100 = 343{,}1\ \%$$

Die Regenwaldfläche weicht um etwa $343\ \% - 100\ \% = 243\ \%$ ab.

2.2.1 *Nachweis exponentielles Wachstum:*

Ein Bestand wächst exponentiell, wenn er in gleichen Zeitschritten immer mit demselben Faktor zunimmt.

$$\frac{CO_{2_{70}}}{CO_{2_{50}}} = \frac{9{,}7}{3{,}7} = 2{,}622; \quad \frac{CO_{2_{90}}}{CO_{2_{70}}} = \frac{25{,}5}{9{,}7} = 2{,}629; \quad \frac{CO_{2_{10}}}{CO_{2_{90}}} = \frac{67{,}2}{25{,}5} = 2{,}635$$

Da in gleichen Zeitschritten (20 Jahre) die Menge an $CO_2$ um den Faktor $2{,}6$ ansteigt, handelt es sich um exponentielles Wachstum.

2.2.2.1 *Nachweis der Wachstumskonstante* $k$*:*

$$m(t) = 3{,}7 \cdot 10^7 \cdot e^{kt} \quad | \quad \text{Punktprobe mit 1970}$$
$$9{,}7 \cdot 10^7 = 3{,}7 \cdot 10^7 \cdot e^{20k}$$
$$e^{20k} = 2{,}6216 \quad | \quad ln$$
$$20k = \ln(2{,}6216)$$
$$k = \frac{1}{20}\ln(2{,}6216) = 0{,}048$$

2.2.2.2 *Prozentuales Verhältnis absorbiertes zu freigesetztes* $CO_2$*:*

Insgesamt freigesetztes $CO_2$: $3 \cdot 10^{10}$ Tonnen

Insgesamt absorbiertes $CO_2$: $\int_0^{61} m(t)\ dt$ Tonnen

$$m_{2010} = 3{,}7 \cdot 10^7 \int_0^{61} e^{0{,}048t}\ dt = 3{,}7 \cdot 10^7 \cdot \left[\frac{e^{0{,}048t}}{0{,}048}\right]_0^{61}$$
$$= \frac{3{,}7 \cdot 10^7}{0{,}048} \cdot (e^{0{,}048 \cdot 61} - 1) = 1{,}364 \cdot 10^{10}$$

$$\frac{m_{absorbiert}}{m_{freigesetzt}} = \frac{1{,}364 \cdot 10^{10}}{3 \cdot 10^{10}} = 0{,}455 \approx 45{,}5\ \%$$

Der gesuchte prozentuale Anteil beträgt ca. $45{,}5\ \%$.

Lösung A3/2022

3.1 *Beurteilung zweier Aussagen:*

(1) Zu Beginn des Monats Februar 2023 wird etwa jedes sechste neu zugelassene Auto ein E-Auto sein.
Der Beginn des Monats Februar ist gemäß Aufgabenstellung $f(1)$.

$f(1) = 0{,}06 \cdot e^{0{,}04} = 0{,}062 \approx \frac{6}{100} = 6\ \%$

Die Aussage ist korrekt.

(2) Der Marktanteil der E-Autos wird im Jahr 2025 erstmalig 50 % übersteigen.
Wir berechnen $f(t) = 0{,}5$:

$0{,}06 \cdot e^{0{,}04t} = 0{,}5 \quad | \quad :0{,}06$

$e^{0{,}04t} = \frac{0{,}5}{0{,}06} = \frac{25}{3} \quad | \quad ln$

$0{,}04t = \ln\left(\frac{25}{3}\right) \quad | \quad :0{,}04$

$t = \frac{\ln\left(\frac{25}{3}\right)}{0{,}04} = 53$

Von 2021 bis Ende 2024 sind es 48 Monate bis Ende 2025 60 Monate. Die Aussage ist korrekt.

3.2 *Begründung der Zunahme des Marktanteils von jährlich etwa 60 %.*

$\frac{f(t+12)}{f(t)} \cdot 100 = \frac{0{,}06 \cdot e^{0{,}04(t+12)}}{0{,}06 \cdot e^{0{,}04t}} = \frac{0{,}06 \cdot e^{0{,}04t}}{0{,}06 \cdot e^{0{,}04t}} \cdot e^{0{,}48} = e^{0{,}48} = 1{,}62$

Der Faktor 1,62 entspricht einem jährlichen Zuwachs von ca. 62 %. Daher beträgt die jährliche prozentuale Zunahme mehr als 60 %.

3.3 *Durchschnittlicher Marktanteil der E-Autos von Anfang 2021 bis Ende 2025:*

$\overline{m} = \frac{1}{60}\int_0^{60} 0{,}06 \cdot e^{0{,}04t}\, dt = \frac{0{,}06}{60}\left[\frac{e^{0{,}04t}}{0{,}04}\right]_0^{60} = \frac{1}{40}\left(e^{2{,}4} - 1\right) = 0{,}2505$

Der durchschnittliche Marktanteil der E-Autos beträgt etwa 25 %.

3.4 *Frage im Sachzusammenhang, die durch die Bestimmung des Wertes des Integrals $\int_3^{39} f(t)\cdot g(t)\,dt$ beantwortet wird:*

Der Zeitraum $t=3$ bis $t=39$ entspricht den Zeitpunkten Beginn April $2021$ bis Beginn März $2024$.
Das Produkt $f(t)\cdot g(t)$ entspricht der Anzahl der neu zugelassenen E-Autos zum Zeitpunkt $t$.
Durch das Integral wird die Summe aller neu zugelassenen E-Autos berechnet im Zeitraum Beginn April $2021$ bis Beginn März $2024$.

Lösung A4/2022

4.1 *Flächeninhakt Vasenboden:*

Dies ist ein Kreis mit Radius $r=f(0)=2{,}7$
$A_{Kreis}=\pi\cdot r^2=\pi\cdot 1{,}7^2=9{,}08$
Der Vasenboden hat eine Fläche von etwa $9\;dm^2$.

*Differenz aus dem Durchmesser der Vasenöffnung und dem Durchmesser des Vasenbodens.*

$d=2\cdot\big(f(10)-f(0)\big)=2\cdot(1{,}95-1{,}7)=0{,}5\;dm$

4.2 *größter Durchmesser der Vase.*

Dieser liegt im Hochpunkt von $f$ vor.
$f'(x)=0{,}042x^2-0{,}4x+0{,}625$
$0{,}042x^2-0{,}4x+0{,}625=0\;|\quad :0{,}042$
$x^2-9{,}52x+14{,}88=0$
$x_{1,2}=4{,}72\pm\sqrt{22{,}28-14{,}88}=4{,}72\pm 2{,}72$
$x_1=7{,}44;\;\; x_2=2$
$f(7{,}44)=0{,}014\cdot 7{,}44^3-0{,}2\cdot 7{,}44^2+0{,}625\cdot 7{,}44+1{,}7=1{,}04$
$f(2)=0{,}014\cdot 8-0{,}2\cdot 4+0{,}625\cdot 2+1{,}7=2{,}262$
$d_{max}=2\cdot f(2)=4{,}524\;dm$
Der größte Durchmesser der Vase ist größer als $4{,}4\;\mathrm{dm}$.
Die Aussage ist wahr.

4.3 *Höhe einer profilveränderten Vase:*

Wir benötigen die Gleichung einer Tangente im Punkt $P(5|f(5))$.
$t(x)=f'(5)\cdot(x-5)+f(5)$
$f'(5)=0{,}042\cdot 5^2-0{,}4\cdot 5+0{,}625=-0{,}325$
$f(5)=0{,}014\cdot 5^3-0{,}2\cdot 5^2+0{,}625\cdot 5+1{,}7=1{,}575$
$t(x)=-0{,}325\cdot(x-5)+1{,}575$

$t(x) = -0{,}325x + 3{,}2$

Das Volumen der Vase bis zur Stelle $x_0 = 5$ beträgt $65{,}57\ dm^3$. Die Differenz bis $70\ l = 70\ dm^3$ ist somit $4{,}43\ dm^3$. Die Rotation der Tangente um die $x$-Achse im Intervall $[5; h]$ mit $h$ als neuer Vasenhöhe muss diese Differenz erzeugen. Will man den Wert von $h$ über ein Rotationsintegral bestimmen, gelangt man zu einer kubischen Gleichung, die mit den zur Verfügung stehenden Hilfsmitteln nicht lösbar ist. Somit ist nur die Lösung über das Volumen eines Kegelstumpfes möglich.

Ab der Stelle $x = 5$ wird das Volumen durch einen Kegel bestimmt. An der Stelle $x = 5$ beträgt der Radius dieses Kegels $r = f(5) = 1{,}575$

Nullstelle der Tangente $t(x)$:

$-0{,}325x + 3{,}2 = 0 \;\; \Rightarrow \;\; x = 9{,}85$

Die Höhe des Vollkegels damit $h_{Krg} = 9{,}85 - 5 = 4{,}85\ dm$

Das Volumen des Vollkegels ist somit:

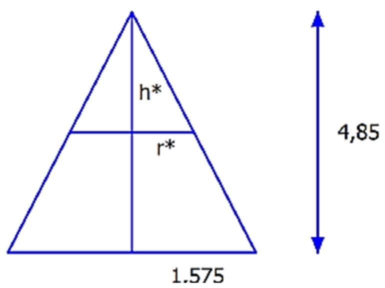
$$V_{Keg} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r_{Keg}^2 \cdot h_{Keg}$$
$$= \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 1{,}575^2 \cdot 4{,}85 = 12{,}6\ dm^3$$

Die Volumenvergrößerung soll aber nur $4{,}43\ dm^3$ betragen. Also müssen wir den Vollkegel um $12{,}6 - 4{,}43 = 8{,}17\ dm^3$ verkleinern.

$$V_{Keg^*} = 8{,}17 = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^{*2} \cdot h^*$$

Nach dem 2. Strahlensatz gilt:

$$\frac{h_{Keg}}{r_{Keg}} = \frac{h_{Keg^*}}{r_{Keg^*}} = \frac{4{,}85}{1{,}575}$$




$$r_{Keg^*} = \frac{1{,}575 \cdot h_{Keg^*}}{4{,}85}$$

$$r_{Keg^*} \rightarrow V_{Keg^*}$$

$$\frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \left(\frac{1{,}575 \cdot h_{Keg^*}}{4{,}85}\right)^2 \cdot h_{Keg}^* = 8{,}17$$

$$0{,}1104\ {h_{Keg}^*}^3 = 8{,}17$$

$$h_{Keg^*} = \sqrt[3]{73{,}98} = 4{,}19$$

Der Vollkegel muss um $4{,}19\ dm$ gekürzt werden. Für den Stumpf verbeibt somit eine Höhe von $4{,}85 - 4{,}19 = 0{,}66\ dm$
Die neue Höhe der Vase ist $5 + 0{,}66 = 5{,}66\ dm$.

Teil3 - Stochastik

Lösung A1/2022

1.1.1 *Wahrscheinlichkeit eines jugendlichen Teilnehmers, der einen Streamingdienst nutzt:*

Wir vervollständigen zunächst die Vierfeldertafel.

| | $S$ | $\overline{S}$ | $\sum$ |
|---|---|---|---|
| $J$ | 450 | 50 | 500 |
| $\overline{J}$ | 350 | 150 | 500 |
| $\sum$ | 800 | 200 | 1000 |

$P(J \cap S) = \frac{450}{1000} = 0{,}45 = 45\ \%$

*Beurteilung, ob die Ereignisse $J$ und $S$ stochastisch unabhängig sind.*

Zwei Ereignisse $J$ und $S$ sind stochastisch unabhängig wenn gilt: $P(J \cap S) = P(J) \cdot P(S)$

$P(J) = \frac{500}{1000} = \frac{1}{2}; \quad P(S) = \frac{800}{1000} = \frac{4}{5}$

$P(J) \cdot P(S) = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5} = \frac{4}{10} = 0{,}4 = 40\ \% \neq P(J \cap S)$

Die Ereignisse $J$ und $S$ sind stochastisch abhängig.

1.1.2 *Bedeutung des Wertes $P_J(S)$:*

Der Wert $P_J(S)$ gibt die Wahrscheinlichkeit an, dass ein Teilnehmer einen Streamingdienst benutzt unter der Bedingung, dass er jugendlich ist.

1.2 *Bestimmung der Wahrscheinlichkeit, dass ein Nutzer von Streamingdiensten weder Anbieter A noch B verwendet.*

Wir tragen die vorgegebenen Werte in eine Vierfeldertafel ein.

| | $A$ | $\overline{A}$ | $\sum$ |
|---|---|---|---|
| $B$ | 0,35 | 0,05 | 0,4 |
| $\overline{B}$ | 0,35 | 0,25 | 0,6 |
| $\sum$ | 0,7 | 0,30 | 1 |

$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0{,}25 = 25\ \%$

Abituraufgaben BG Teil 2 bis 4 (mit Hilfsmittel) 2022

1.3.1 *Ermitteln von Werten:*

Binomialverteilung mit $n = 5000;\ \ p = 0{,}2$ für Teilnahme, $X$ beschreibt die Anzahl der Personen, die an der Umfrage teilnehmen.

*Erwartungswert und Standardabweichung:*

$\mu = n \cdot p = 5000 \cdot 0{,}2 = 1000$

$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} = \sqrt{1000 \cdot 0{,}8} = 28{,}3$

*Bestimmung eines Wertes von $k$, damit $P(\mu - k \leq X \leq \mu + k) \geq 0{,}9$.*

Wir verwenden die einschlägig bekannten Sigma-Regeln.

Es gilt $P(\mu - 1{,}64\sigma \leq X \leq \mu + 1{,}64\sigma) \approx 0{,}9$.

$1{,}64\sigma = 1{,}64 \cdot 28{,}3 = 46{,}4$

$\mu - 1{,}64\sigma = 1000 - 46{,}4 = 953{,}6$ ➔ gewählt $954$.

$\mu + 1{,}64\sigma = 1000 + 46{,}4 = 1046{,}4$ ➔ gewählt $1046$.

$B_{5000;0,2}(954 \leq X \leq 1046) = 0{,}9493 - 0{,}0494 = 0{,}8999$

Weitere Kontrolle mit:

$B_{5000;0,2}(953 \leq X \leq 1047) = 0{,}9528 - 0{,}0459 = 0{,}9069$

Das kleinste $k$ ist somit $1047 - 1000 = 47$.

1.3.2 *Mindestanzahl anzusprechender Personen um mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens $95\,\%$ mindestens $1000$ Personen zur Teilnahme zu bewegen.*

Gesucht ist der Stichprobenumfang $n$.

$B_{n;0,2}(X \geq 1000) \geq 0{,}95$

$B_{n;0,2}(X \leq 999) \leq 0{,}05$

| $n$ | $B_{n;0,2}(X \leq 999)$ |
|---|---|
| 5100 | 0,2370 |
| 5210 | 0,07 |
| 5220 | 0,0612 |
| 5230 | 0,0533 |
| 5235 | 0,0497 |
| 5234 | 0,0505 |

Es müssen mindestens $5235$ Personen angesprochen werden.

Lösung A2/2022

2.1.1.1 *Berechnen bestimmter Wahrscheinlichkeit:*

$P(rot) = \frac{20}{100}$; $P(gelb) = \frac{30}{100}$; $P(blau) = \frac{50}{100}$

Jeweils nur im ersten Zug (Ziehen OHNE Zurücklegen)

A: Die ersten beiden Kugeln sind blau und die dritte Kugel ist rot.

$P(A) = P(blau; blau; rot) = \frac{50}{100} \cdot \frac{49}{99} \cdot \frac{20}{98} = \frac{5}{99}$

B: Mindestens zwei Kugeln sind rot.

$P(B) = P(rot; rot; rot) + 3 \cdot P(rot; rot; \overline{rot})$

$P(B) = \frac{20}{100} \cdot \frac{19}{99} \cdot \frac{18}{98} + 3 \cdot \frac{20}{100} \cdot \frac{19}{99} \cdot \frac{80}{98} = \frac{817}{8085}$

C: Die dritte Kugel ist gelb.

$P(C) = P(gelb; gelb; gelb) + P(\overline{gelb}; gelb; gelb) +$
$P(gelb; \overline{gelb}; gelb) + P(\overline{gelb}; \overline{gelb}; gelb)$

$P(C) = \frac{30 \cdot 29 \cdot 28 + 2 \cdot 30 \cdot 29 \cdot 40 + 70 \cdot 69 \cdot 30}{100 \cdot 99 \cdot 98} = \frac{3}{10}$

2.1.1.2 *Formulierung eines Ereignisses D im Sachzusammenhang:*

Der Term $3! \cdot \frac{20}{100} \cdot \frac{30}{99} \cdot \frac{50}{98}$ berechnet die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses D beim dreimaligen Ziehen ohne Zurücklegen drei unterschiedliche Farben zu ziehen.

2.1.2 *Widerlegung einer Behauptung:*

Der Term $\binom{6}{4} \cdot 0{,}2^4 \cdot 0{,}8^2$ berechnet die beschriebene Wahrscheinlichkeit im Falle von „mit Zurücklegen“. Aufgabenstellung lautet jedoch „ohne Zurücklegen.

*Berichtigung des Terms:*

Richtig wäre $\binom{6}{4} \cdot \frac{20}{100} \cdot \frac{19}{99} \cdot \frac{18}{98} \cdot \frac{17}{97} \cdot \frac{80}{96} \cdot \frac{79}{95}$

2.2 *Ermittlung einer Anzahl Kugeln in einer Urne:*

$P(rot) = \frac{n}{3n}$; $P(gelb) = \frac{n}{3n}$; $P(blau) = \frac{n}{3n}$

Jeweils nur im ersten Zug.

A: Beim dreimaligen Ziehen werden nur Kugeln gleicher Farbe gezogen.

$P(A) = P(rot; rot; rot) + P(gelb; gelb; gelb) +$
$P(blau; blau; blau)$

$P(rot; rot; rot) = P(gelb; gelb; gelb) = P(blau; blau; blau)$

$P(A) = 3 \cdot P(rot; rot; rot) = 3 \cdot \frac{n}{3n} \cdot \frac{n-1}{3n-1} \cdot \frac{n-2}{3n-2}$

$P(A) = \frac{(n-1)(n-2)}{(3n-1)(3n-2)} = \frac{n^2-3n+2}{9n^2-9n+2}$

$\frac{n^2-3n+2}{9n^2-9n+2} \geq 0{,}1 \qquad | \quad \cdot (9n^2 - 9n + 2)$

$n^2 - 3n + 2 \geq 0{,}9n^2 - 0{,}9n + 0{,}2$

$0{,}1n^2 - 2{,}1n + 1{,}8 \geq 0 \qquad | \quad : 0{,}1$

$n^2 - 21n + 18 \geq 0$

$n_{1,2} = 10{,}5 \pm \sqrt{110{,}25 - 18} = 10{,}5 \pm 9{,}6$

$n_1 = 20{,}1;\ \ n_2 = 0{,}9$

$n_2$ ist keine Lösung der Aufgabe.

Es liegen 63 Kugeln in der Urne, nämlich jeweils 21 rote, blaue und gelbe.

Teil4 – Vektorgeometrie

Lösung A1/2022

1.1 *Koordinaten des Punktes $P$ des U-Bootes nach $2$ Minuten:*

Geradengleichung des Bootes:

$g\colon\ \ \vec{x} = \vec{o} + t \cdot \begin{pmatrix} 60 \\ 60 \\ -8 \end{pmatrix};\ \ t \in \mathbb{R}$ in Minuten

$\overrightarrow{OP} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 60 \\ 60 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 120 \\ 120 \\ -16 \end{pmatrix}$

Das U-Boot befindet sich nach $2$ Minten im Punkt $P(120|120|-16)$.

*Tiefe und Abstand des Punktes $P$ zu $O$:*

Die $x_3$-Koordinate von $P$ gibt die Tiefe des U-Bootes an. Wegen des Maßstabs $1\,LE$ gleich $1\,m$, befindet sich das U-Boot in $16\,m$ Tiefe.

$d(P;O) = \left|\overrightarrow{OP}\right| = \sqrt{120^2 + 120^2 + 16^2} = 170{,}5$

Die Entfernung des Bootes vom Ursprung beträgt etwa $170{,}5\,m$.

1.2 *Geschwindigkeit des Bootes in $km/h$:*

$v = \left|\begin{pmatrix} 60 \\ 60 \\ -8 \end{pmatrix}\right| \frac{m}{min} = \sqrt{60^2 + 60^2 + 8^2}\,\frac{m}{min} = 85{,}2\,\frac{m}{min} = 5112\,\frac{m}{h}$

$v \approx 5{,}1\,\frac{km}{h}$.

1.3 *Schnittgerade von $E$ mit der $x_1x_2$-Ebene:*

$x_1x_2$-Ebene $F$: $x_3 = 1$

$E$: $x_1 + x_2 + 10x_3 = -200$

$F$: $x_3 = 0$

$E \cap F$

$E$: $x_1 + x_2 = -200$

$x_1 + x_2 = -210$

Wir wählen eine Variable frei mit $x_2 = t$

$x_1 + t = -200$

$x_1 = -200 - t$

$$\mathbb{L} = \left\{\begin{pmatrix} -200 - t \\ t \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$$

Daraus die Geradengleichung:

$$g:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} -210 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

*Bedeutung der Schnittgeraden im Sachkontext:*

Die Gerade h modelliert die Grenze zwischen Meer und Land auf Höhe der Meeresoberfläche.

1.4.1 *Begründung von Aussagen:*

(1) Geschwindigkeit ab $120\,m$ Tiefe:

$$v_1 = \left|\begin{pmatrix} 15 \\ 15 \\ -2 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{15^2 + 15^2 + 2^2} = 21{,}3\frac{m}{min}$$

Geschwindigkeit bis  Tiefe (siehe 1.2) $v = 85{,}2\frac{m}{min}$

$\frac{v_1}{v} \cdot 100 = \frac{21{,}3}{85{,}2} \cdot 100 = 25\ \%$

Das Boot hat noch $25\ \%$ seiner ursprünglichen Geschwindigkeit, d.h. es fährt um $75\ \%$ langsamer.

(2) $15$ Minten nach Beginn des Abtauchens muss dieses eine Tiefe von $120\,m$ erreicht haben. Ist dies der Fall. So stimmt die Aussage.

$$\overrightarrow{OP^*} = 15 \cdot \begin{pmatrix} 60 \\ 60 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 900 \\ 900 \\ -120 \end{pmatrix}$$

Das Boot hat 15 Minuten nach Beginn des Abtauchens eine Tiefe von $120\,m$ erreicht.

1.4.2 Vergrößerung des Abstands des U-Boots zu $E$ mit zunehmender Tiefe:

Die neue Gerade ab einer Tiefe von $120\,m$ lautet:

$g_{120}:\quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 900 \\ 900 \\ -120 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 15 \\ 15 \\ -2 \end{pmatrix};\ t\ \in \mathbb{R}$ in Minuten

Wir berechnen den Abstand der Geraden zu $E$ über die HNF.

$E:\ \frac{x_1+x_2+10x_3+200}{\sqrt{102}} = 0$

Wir setzen den Punkt $Q(900+15t|900+15t|-120-2t)$ ein:

$d(E;Q) = \frac{|900+15t+900+15t-1200-20t+200|}{\sqrt{102}} = \frac{|800+10t|}{\sqrt{102}}$

Wegen $t \geq 0$ nimmt der Abstand zu $E$ mit größer werdender Tiefe zu.

1.4.3 *Mittlerer Abstand zu $E$ während der letzten 60 Minuten:*

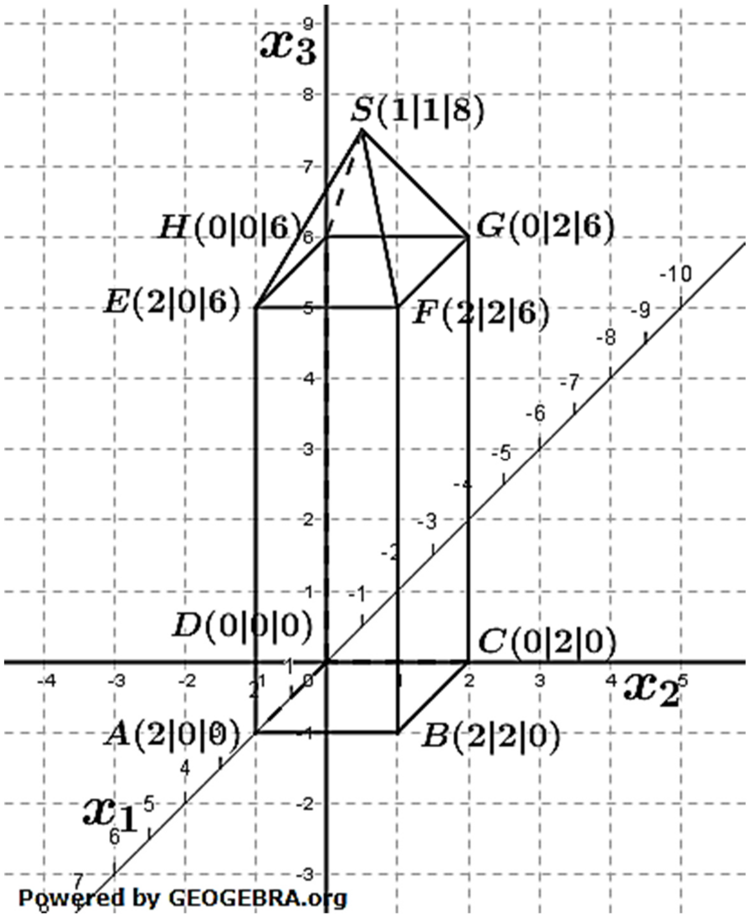
$d_{15}(E;Q) = \frac{800+10\cdot 0}{\sqrt{102}} = 79{,}21\,m$

$d_{75}(E;Q) = \frac{800+10\cdot 60}{\sqrt{102}} = 138{,}62\,m$

$d_{\overline{m}}(E;Q) = \frac{d_{75}(E;Q)+d_{75}(E;Q)}{2} = \frac{138{,}62+79{,}21}{2} = 108{,}9\,m$

Lösung A2/2021

2.1 Modell des Kirchturms im Koordinatensystem:




2.2 *Anzahl von Paletten zur Bedachung des Kirchturmdaches:*

Das Kirchturmdach besteht aus 4 gleich großen gleichschenkligen Dreiecken. Wir berechnen die Fläche eines Dreiecks über z. B.

$$A_{Dreieck} = \frac{1}{2} \cdot |\overrightarrow{EF}| \cdot |\overrightarrow{IS}|$$

$$\overrightarrow{OI} = \frac{1}{2} \cdot \left(\overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OF}\right) = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 2+2 \\ 0+2 \\ 6+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$$

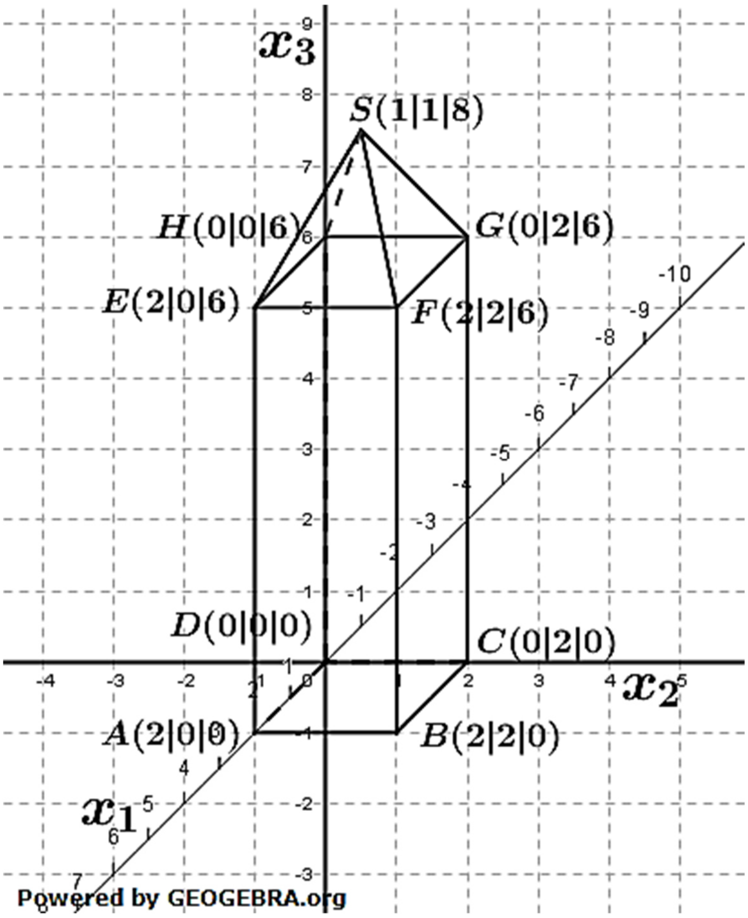
$$\overrightarrow{EF} = \begin{pmatrix} 2-2 \\ 2-0 \\ 6-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \left|\overrightarrow{EF}\right| = 2$$

$$\overrightarrow{IS} = \begin{pmatrix} 1-2 \\ 1-1 \\ 8-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}; \quad \left|\overrightarrow{IS}\right| = \sqrt{1^2+2^2} = \sqrt{5}$$

$$A_{Dreieck} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \sqrt{5} \approx 2{,}24\ FE$$

*Abituraufgaben BG Teil 2 bis 4 (mit Hilfsmittel) 2022*

2.1 Modell des Kirchturms im Koordinatensystem:




2.2 *Anzahl von Paletten zur Bedachung des Kirchturmdaches:*
Das Kirchturmdach besteht aus 4 gleich großen gleichschenkligen Dreiecken. Wir berechnen die Fläche eines Dreiecks über z. B.

$$A_{Dreieck} = \frac{1}{2} \cdot |\overrightarrow{EF}| \cdot |\overrightarrow{IS}|$$

$$\overrightarrow{OI} = \frac{1}{2} \cdot \left(\overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OF}\right) = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 2+2 \\ 0+2 \\ 6+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{EF} = \begin{pmatrix} 2-2 \\ 2-0 \\ 6-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad |\overrightarrow{EF}| = 2$$

$$\overrightarrow{IS} = \begin{pmatrix} 1-2 \\ 1-1 \\ 8-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}; \quad |\overrightarrow{IS}| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$$

$$A_{Dreieck} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \sqrt{5} \approx 2{,}24\ FE$$

$A_{Dach} = 4 \cdot A_{Dreieck} = 4 \cdot 2{,}24\ FE = 8{,}94\ FE$

Wegen Maßstab $1\ LE = 10\ m$ ist $1\ FE = 100\ m^2$

$A_{Dach} = 894\ m^2$

1 Palette Ziegeln hat $200 \cdot 0{,}12\ m^2 = 24\ m^2$ Fläche.

$n_{Palette} = \frac{894}{24} = 37{,}25\ St.$

Es müssen 38 Paletten geliefert werden.

2.3.1 *Winkel zwischen Sonnenstrahl und $x_1x_2$-Ebene:*

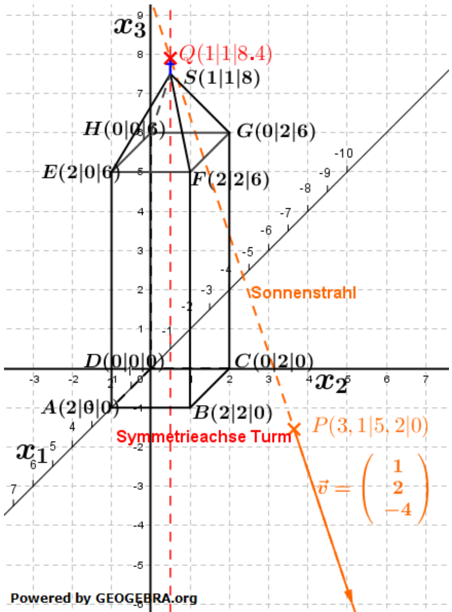
Dies ist der Schnittwinkel zwischen einem Vektor und einer Ebene. Berechnung über:

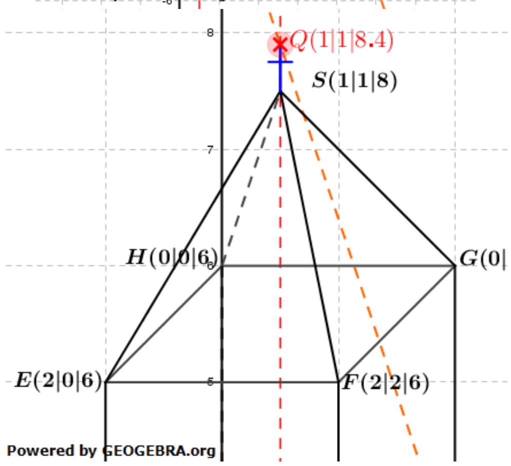
$$\sin(\varphi) = \frac{|\vec{v} \cdot \overrightarrow{n_E}|}{|\vec{v}| \cdot |\overrightarrow{n_E}|} = \frac{\left|\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right|} = \frac{|-4|}{\sqrt{21}} = \frac{4}{\sqrt{21}}$$

$$\varphi = \arcsin\left(\frac{4}{\sqrt{21}}\right) = 60{,}8\,°$$

2.3.2 *Höhe eines Kreuzes:*

Die Grafik verdeutlicht die Situation. Gesucht ist der Punkt $Q$ als Schnittpunkt der Geraden $s$ des Sonnlichts durch den Punkt $P$ mit der Geraden $a$ der Symmetrieachse des Turms. Die Differenz der $x_3$-Koordinate von $Q$ und $S$ ergibt dann die Höhe des Kreuzes.




Gerade $s$:

$$s\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 3{,}1 \\ 5{,}2 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Gerade $a$:

$$a\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$s \cap a$:

$$\begin{pmatrix} 3{,}1 \\ 5{,}2 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$r\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\-4\end{pmatrix}-s\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\8\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3,1\\5,2\\0\end{pmatrix}$$
$$r\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\-4\end{pmatrix}-s\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2,1\\-4,2\\8\end{pmatrix}$$
(I) $r=-2,1$
(III) $-4r-s=8$
$-4\cdot(-2,1)=8+s$
$8,4-8=s$
$s=0,4$
$$\overrightarrow{OQ}=\begin{pmatrix}1\\1\\8\end{pmatrix}+0,4\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\8,4\end{pmatrix}$$
$h_{Kreuz}=q_3-s_3=8,4-8=0,4$
Das Kreuz ist $4\,m$ hoch.

2.4 *Ermittlung eines Punktes $Q$ einer Glocke:*
Der Punkt $Q(1|1|q_3)$ liegt auf der Symmetrieachse des Turms.
Es soll gelten $\left|\overrightarrow{QE}\right|=\left|\overrightarrow{QF}\right|=\left|\overrightarrow{QG}\right|=\left|\overrightarrow{QH}\right|=3\cdot\left|\overrightarrow{QS}\right|$
$$\overrightarrow{QS}=\begin{pmatrix}1-1\\1-1\\8-q_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\8-q_3\end{pmatrix};\quad \left|\overrightarrow{QS}\right|=8-q_3$$
$$\overrightarrow{QE}=\begin{pmatrix}2-1\\0-1\\6-q_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1\\6-q_3\end{pmatrix};\quad \left|\overrightarrow{QE}\right|=\sqrt{1+1+(6-q_3)^2}$$
$3\cdot\left|\overrightarrow{QS}\right|=\left|\overrightarrow{QE}\right|$
$3\cdot(8-q_3)=\sqrt{2+(6-q_3)^2}\quad|\quad\uparrow^2$
$9\cdot(8-q_3)^2=2+(6-q_3)^2$
$9\cdot(64-16_3+q_3^2)=2+36-12q_3+q_3^2$
$9q_3^2-144q_3+576=q_3^2-12q_3+38$
$8q_3^2-132q_3+538=0\quad|\quad:8$
$q_3^2-16,5q_3+67,25=0$
$q_{3_{1,2}}=8,25\pm\sqrt{68,0625-67,25}=8,25\pm0,9$
$q_{3_1}=9,15;\quad q_{3_2}=7,35$
$q_{3_1}=9,15$ entfällt, da außerhalb des Turms.
$q_3=7,35$.
Die Koordinaten des gesuchten Punktes sind $Q(1|1|7,35)$.

Teil4 – Matrizen / Prozesse

Lösung A1/2022

1.1 *Interpretation des Wertes 0,25:*

$25\ \%$ der Haushalte, die bei Anbieter $C$ einen Vertrag haben, wechseln innerhalb eines Jahres zu Anbieter $D$.
Für die Paare $(A, C)$ und $(B, D)$ wechseln untereinander keinerlei Haushalte, da die entsprechenden Einträge in der Matrix $0$ sind.
Mit dem Anbieter $C$ sind die Haushalte am wenigsten zufrieden, da nur $70\ \%$ der Haushalte bei Anbieter $C$ von einem Jahr zum nächsten bleiben.
Bei den anderen Anbietern bleiben $80\ \%$ der Haushalte von einem Jahr zum nächsten.

1.2 *Anzahl der Haushalte bei Anbieter D:*

$25200 - 3000 - 5000 - 7000 = 10200$

$$\begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}05 & 0 & 0{,}05 \\ 0{,}15 & 0{,}8 & 0{,}05 & 0 \\ 0 & 0{,}15 & 0{,}7 & 0{,}15 \\ 0{,}05 & 0 & 0{,}25 & 0{,}8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3000 \\ 5000 \\ 7000 \\ 10200 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3160 \\ 4800 \\ 7180 \\ 10060 \end{pmatrix}$$

Anzahlen im Jahr 2022:

$A = 3160,\ B = 4800,\ C = 7180,\ D = 10060$

1.3 Da die gesuchte Verteilung gleich bleiben soll, muss gelten: $\boldsymbol{M} \cdot \vec{v} = \vec{v}$.

Es gilt $\vec{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ 2a \\ 25200 - 3a - b \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}05 & 0 & 0{,}05 \\ 0{,}15 & 0{,}8 & 0{,}05 & 0 \\ 0 & 0{,}15 & 0{,}7 & 0{,}15 \\ 0{,}05 & 0 & 0{,}25 & 0{,}8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ 2a \\ 25200 - 3a - b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ 2a \\ 25200 - 3a - b \end{pmatrix}$$

Daraus ergibt sich folgendes Gleichungssystem:

(I) $0{,}8a + 0{,}05b + 0{,}05(25200 - 3a - b) = a$

(II) $0{,}15a + 0{,}8b + 0{,}05 \cdot 2a = b$

(III) $0{,}15b + 0{,}7 \cdot 2a + 0{,}15 \cdot (25200 - 3a - b) = 2a$

(IV) $0{,}05a + 0{,}25 \cdot 2a + 0{,}8(25200 - 3a - b) = 25200 - 3a - b$

(II) $0{,}25a - 0{,}2b = 0 \quad \Rightarrow \quad b = 1{,}25a$

$b \rightarrow (I)$

(I) $0{,}8a + 0{,}05 \cdot 1{,}25a + 0{,}05(25200 - 3a - 1{,}25a) = a$

$0{,}65a + 1260 = a$

$a = 3600$

$a \rightarrow (II)$

(II) $b = 1{,}25 \cdot 3600 = 4500$

Die Probe mit (III) und (IV) führt zu wahren Aussagen.

Die gesuchte Verteilung ist $\vec{v} = \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3600 \\ 4500 \\ 7200 \\ 9900 \end{pmatrix}$.

1.4 Die gesuchte Verteilung hat folgende Bauart:

$\vec{v} = \begin{pmatrix} a \\ a \\ a \\ 25200 - 3a \end{pmatrix}$.

Nun soll gelten:

$$\begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}05+p & 0 & 0{,}05+p \\ 0{,}15 & 0{,}8 & 0{,}05 & 0 \\ 0 & 0{,}15-p & 0{,}7 & 0{,}15-p \\ 0{,}05 & 0 & 0{,}25 & 0{,}8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ a \\ a \\ 25200 - 3a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ a \\ a \\ 25200 - 3a \end{pmatrix}$$

Daraus ergibt sich folgendes Gleichungssystem:

(I) $0{,}8a + (0{,}05 + p) \cdot a + (0{,}05 + p)(25200 - 3a) = a$

(II) $0{,}15a + 0{,}8a + 0{,}05a = a$

(III) $(0{,}15 - p)a + 0{,}7a + (0{,}15 - p) \cdot (25200 - 3a) = a$

(IV) $0{,}05a + 0{,}25a + 0{,}8(25200 - 3a) = 25200 - 3a$

Aus (IV) Zeile folgt:

$0{,}3a + 20160 - 2{,}4a = 25200 - 3a$

$a = 5600$

Aus (I) folgt:

$0{,}8 \cdot 5600 + (0{,}05 + p) \cdot 5600 + (0{,}05 + p)(8400) = 5600$

$5180 + 14000p = 5600$

$p = 0{,}03$

Die Probe mit (II) und (III) führt zu wahren Aussagen.
Es ist möglich, den gleichen Anteil der alljährlich wechselnden Haushalte von $D$ zu $A$ um den selben Prozentsatz zu erhöhen und im selben Maß den Anteil dieser Anbieter bei deren Wechsel zu $C$ zu senken, und das Wechselverhalten ansonsten unverändert zu lassen. Langfristig haben dabei die Haushalte $A, B$ und $C$ gleich viele Haushalte an sich gebunden. Nur noch 12 Prozent der Haushalte würden dann von $B$ zu $C$ wechseln.

Lösung A2/2022

2.1.1 *Rohstoffberechnung eines Auftrages:*

Rohstoff-Endprodukt-Matrix: $\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 43 & 36 & 33 \\ 30 & 15 & 19 \\ 37 & 14 & 20 \end{pmatrix}$

Berechnung der $ME$ der Rohstoffe:

$\begin{pmatrix} 43 & 36 & 33 \\ 30 & 15 & 19 \\ 37 & 14 & 20 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 400 \\ 600 \\ 500 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 55300 \\ 30500 \\ 33200 \end{pmatrix}$

Für den Auftrag benötigt man $55300\,ME$ von $R_1$, $30500\,ME$ von $R_2$ und $33200\,ME$ von $R_3$.

2.1.2 *Fertigungskosten pro $ME$ von Zwischenprodukten:*

Für die Gesamtkosten gilt die Formel

$K_{ges} = K_R + K_z + K_E + K_{Fix}$.

Es gilt $K_{Ges} = 400 + K_Z + 1850 + 2050 =$

Der Erlös beträgt $E = 20\,€ \cdot 400 + 35\,€ \cdot 600 + 35\,€ \cdot 500$

$E = 46500\,€$

Da der Gewinn $8000\,€$ beträgt, ergibt sich

$K_{ges} = E - G = 46500\,€ - 8000\,€ = 38500\,€$

Daraus folgt $4300 + K_Z = 38500\,€$

$K_Z = 34200\,€$

Zwischenprodukt-Endprodukt-Matrix: $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

Berechnung des Zwischenproduktvektors:

$\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{B} \cdot p = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 400 \\ 600 \\ 500 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2400 \\ 1700 \\ 3800 \end{pmatrix}$

Der Kostenvektor für die Zwischenprodukte lautet

$\overrightarrow{k_Z} = (z \quad 2{,}5z \quad 1{,}25z)$

Bedingung:

$K_z = \overrightarrow{k_Z} \cdot \boldsymbol{Z} = (z \quad 2{,}5z \quad 1{,}25z) \cdot \begin{pmatrix} 2400 \\ 1700 \\ 3800 \end{pmatrix} = 2400z + 4250z + 4750z$

$K_z = 11400z$

Es gilt $34200\,€ = 11400z \quad \Rightarrow \quad z = 3$

Fertigungskosten für $Z_1 = 3{,}00\,€$, $Z_2 = 7{,}50\,€$; $Z_3 = 3{,}75\,€$.

2. 2 *Prüfung der Ausführbarkeit eines Auftrages:*

Es gilt $\boldsymbol{B} \cdot p = \boldsymbol{Z}$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 950 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4600 \\ 3800 \\ 6250 \end{pmatrix}$$

(I) $\quad 950 + p_2 + 2p_3 = 4600$

(II) $\quad 2850 + p_3 = 3800$

(III) $\quad 950 + 4p_2 + 2p_3 = 6250$

(II) $\quad p_3 = 950$

$p_3 \to (I)$

(I) $\quad 950 + p_2 + 1900 = 4600$

$\quad p_2 = 800$

$p_2; p_3 \to (III)$

(III) $\quad 950 + 4 \cdot 800 + 2 \cdot 950 = 6250$

Falsche Aussage, der Auftrag ist nicht durchführbar.

2. 3 *Bedarfsermittlung von Rohstoffen:*

Es gilt $\boldsymbol{C} \cdot \vec{p} = \vec{r}$

Da $E_3$ nicht mehr produziert wird, ist der dritte Eintrag des Produktionsvektors gleich $0$.

$$\begin{pmatrix} 43 & 36 & 33 \\ 30 & 15 & 19 \\ 37 & 14 & 20 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 \\ 30000 \\ r_3 \end{pmatrix}$$

Daraus ergibt sich folgendes Gleichungssystem:

(I) $\quad 43p_1 + 36p_2 = r_1$

(II) $\quad 30p_1 + 15p_2 = 30000$

(III) $\quad 37p_1 + 14p_2 = r_3$

Das Gleichungssystem besitzt $3$ Gleichungen und $4$ Unbekannte. Daher existieren unendlich viele Lösungen.

Wir wählen eine Variable frei, z. B. $p_1 = t\text{:}\ t \in \mathbb{R}$.

(I) $\quad 43t + 36p_2 = r_1$

(II) $\quad 30t + 15p_2 = 30000$

(III) $\quad 37t + 14p_2 = r_3$

Aus (II) folgt: $\quad p_2 = 2000 - 2t$

$p_2 \to (I); (III)$

(I) $\quad 43t + 36 \cdot (2000 - 2t) = r_1$

$\quad r_1 = 72000 - 29t$

(III) $\quad 37t + 14 \cdot (2000 - 2t) = r_3$

$\quad r_3 = 28000 + 9t$

Wegen $p_1 \geq 0$ folgt $t \geq 0$.
Wegen $p_2 \geq 0$ folgt $2000 - 2t \geq 0$ ➔ $t \leq 1000$.
Für $t = 0$ folgt $r_1 = 72000$
Für $t = 1000$ folgt $r_1 = 43000$
Daraus folgt $43000 \leq r_1 \leq 72000$
Für $t = 0$ folgt $r_3 = 28000$
Für $t = 1000$ folgt $r_3 = 37000$
Daraus folgt $28000 \leq r_3 \leq 37000$
Von $R_1$ werden mindestens $43000\,ME$ und höchstens $72000\,ME$ benötigt.
Von $R_3$ werden mindestens $28000\,ME$ und höchstens $37000\,ME$ benötigt.