Abituraufgaben BG Teil 2 bis 4 (mit Hilfsmittel) 2022

Teil2 - Analysis / Anwendungsorientierte Analysis

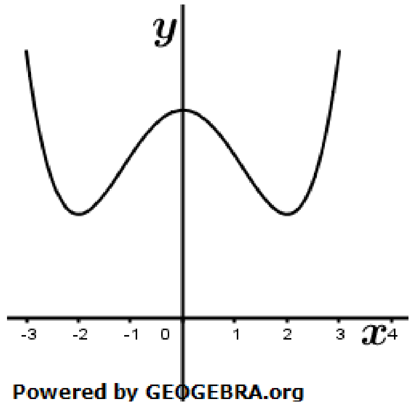
Die Aufgabe A1 ist zu bearbeiten.

Aufgabe A1/2022

1 Gegeben sind die Punkte $T_1(-2|2)$, $T_2(2|2)$ und $H(0|4)$.

1.1 Bestimmen Sie einen Funktionsterm der Polynomfunktion vom Grad 4, deren Schaubild K die folgenden drei Eigenschaften hat:
- K ist symmetrisch zur y-Achse
- K schneidet die y-Achse im Punkt H
- K hat einen Extrempunkt in T_1 (4P)

1.2 Gegeben ist die Funktion f mit
$f(x) = \frac{1}{8}x^4 - x + 4;\ -3 \leq x \leq 3$
Das Schaubild von f ist K_f (siehe Abbildung).



1.2.1 Die Funktionsgleichung von f lässt sich in der Form
$f(x) = a(x+b)^2(x+c)^2 + 2$ darstellen.
Geben Sie passende Werte für a, b und c an. (2P)

1.2.2 Eine nach unten geöffnete Parabel, die H als Scheitelpunkt hat, schneidet K_f in einem Punkt $S(x_0|f(x_0))$ mit $x_0 > 0$. Begründen Sie, dass $x_0 < 2\sqrt{2}$ gilt. (3P)

1.2.3 Ermitteln Sie den größten Wert der ersten Ableitung von f für $-3 \leq x \leq 3$. (4P)

1.3 Das Schaubild der Funktion g mit $g(x) = \cos(u-x) + v;\ -3 \leq x \leq 3$ hat nur die drei Extrempunkte T_1, H und T_2.

1.3.1 Bestimmen Sie die Werte von u und v. (2P)

1.3.2 Skizzieren Sie das Schaubild der Stammfunktion G von g mit $G(-3) = 0$.
Begründen Sie, dass die folgenden beiden Aussagen wahr sind:
(1) Jede Stammfunktion von g besitzt eine Umkehrfunktion.
(2) Der Definitionsbereich einer solchen Umkehrfunktion ist ein Intervall der Länge $\int_{-3}^{3} g(x)\,dx$. (5P)

Abituraufgaben BG Teil 2 bis 4 (mit Hilfsmittel) 2022

Von drei Aufgaben A2 bis A4 ist eine Aufgabe auszuwählen und zu bearbeiten.

Aufgabe A2/2022

2 Forscher gehen davon aus, dass bei der Herstellung von Zement im Zeitraum von Beginn des Jahres 1950 bis einschließlich 2010 weltweit rund $3 \cdot 10^{10}$ Tonnen Kohlendioxid (CO_2) freigesetzt wurden, d.h. pro Jahr wurden durchschnittlich etwa $4{,}9 \cdot 10^8$ Tonnen CO_2 freigesetzt.

2.1 Ein Quadratkilometer (km^2) Regenwald absorbiert jährlich rund 400 Tonnen CO_2 aus der Atmosphäre.
Ermitteln Sie, wie viele Quadratkilometer Regenwald nötig wären, um die durchschnittlich pro Jahr so freigesetzte Menge an CO_2 zu absorbieren.
Geben Sie an, um wie viel Prozent diese Regenwaldfläche von der Fläche Deutschlands (circa $357000\,km^2$) abweicht. (3P)

2.2 Andererseits absorbiert Zement, falls dieser zum Beispiel zu Beton verarbeitet wurde, im Laufe der Zeit wieder einen Teil des zuvor freigesetzten CO_2.
In der Tabelle sind die von den Forschern ermittelten Mengen an CO_2 aufgelistet, die weltweit in den betrachteten Jahren durch den verarbeiteten Zement absorbiert wurden.
Beispielsweise wurden im Jahr 1990 weltweit 255 Millionen Tonnen CO_2 durch den verarbeiteten Zement absorbiert.

Jahr	1950	1970	1990	2010
CO_2 in Tonnen	$3{,}7 \cdot 10^7$	$9{,}7 \cdot 10^7$	$25{,}5 \cdot 10^7$	$67{,}2 \cdot 10^7$

2.2.1 Die vom Zement absorbierte Menge an CO_2 ist im dargestellten Zeitraum exponentiell angewachsen. Erläutern Sie, wie dies aus den Daten hervorgeht. (2P)

2.2.2 Die Funktion m mit $m(t) = 3{,}7 \cdot 10^7 \cdot e^{kt}$ und $t \geq 0$ modelliert die jährlich absorbierte Menge an CO_2 in Tonnen. Dabei wird t in Jahren gemessen und $t = 0$ entspricht dem Beginn des Jahres 1950.

2.2.2.1 Zeigen Sie, dass die Wachstumskonstante k etwa den Wert $0{,}048$ hat. (2P)

2.2.2.2 Ermitteln Sie für den Zeitraum von Beginn des Jahres 1950 bis einschließlich 2010, wie viel Prozent der bei der Herstellung von Zement freigesetzten CO_2-Menge im selben Zeitraum wieder absorbiert wurden. (3P)

Abituraufgaben BG Teil 2 bis 4 (mit Hilfsmittel) *2022*

Aufgabe A3/2022

3 Ein Marktforschungsinstitut ermittelt zu Beginn des Jahres 2021 einen Marktanteil von $6\,\%$ der rein elektrisch angetriebenen Autos (E-Autos) unter allen neu zugelassenen Autos.
Die zukünftige Entwicklung dieses Marktanteils zum Zeitpunkt t wird im Folgenden durch die Funktion f mit $f(t) = 0{,}06 \cdot e^{0{,}04t};\ \ t \geq 0$ modelliert, wobei t in Monaten ab Beginn des Jahres 2021 gemessen wird.
Beispielsweise ist $f(1)$ der Marktanteil, den man zu Beginn des Monats Februar im Jahr 2021 für die E-Auto Neuzulassungen erwartet.

3.1 Beurteilen Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.
(1) Zu Beginn des Monats Februar 2023 wird etwa jedes sechste neu zugelassene Auto ein E-Auto sein.
(2) Der Marktanteil der E-Autos wird im Jahr 2025 erstmalig $50\,\%$ übersteigen. (3P)

3.2 Begründen Sie, dass der Marktanteil der neu zugelassenen E-Autos um mehr als $60\,\%$ pro Jahr zunimmt. (2P)

3.3 Ermitteln Sie den durchschnittlichen Marktanteil der E-Autos unter allen neu zugelassenen Autos von Beginn des Jahres 2021 bis einschließlich 2025. (3P)

3.4 Im Folgenden wird mit der Funktion $g\colon\ t \to g(t)$ mit $t \geq 0$ die gesamte Anzahl der monatlich neu zugelassenen Autos zum Zeitpunkt t modelliert, wobei t die vergangene Zeit in Monaten ab Beginn des Jahres 2021 ist.
Formulieren Sie eine Frage im Sachzusammenhang, die durch die Bestimmung des Wertes des Integrals
$\int_3^{39} f(t) \cdot g(t)\,dt$
beantwortet werden kann. (2P)

Aufgabe A4/2022

4. Die Mantelfläche einer ein Meter hohen Vase wird durch Rotation des Schaubilds der Funktion f mit
$f(x) = 0{,}014x^3 - 0{,}2x^2 + 0{,}625x + 1{,}7;\ \ 0 \leq x \leq 10$
um die x -Achse modelliert. Dabei entspricht eine Längeneinheit einem Dezimeter (dm) in der Realität. Die Dicke des Vasenbodens und die Wandstärke der Vase werden vernachlässigt.

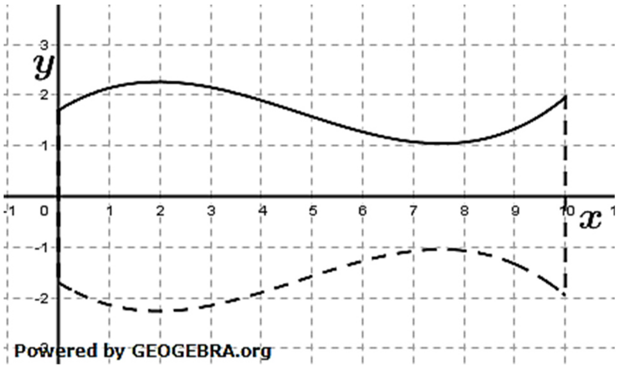


Abb.1: Modellierung der Vasenkontur mit f. Das Schaubild von f ist als durchgezogene Kurve dargestellt.

Abb. 2: Vase

4.1 Bestimmen Sie den Wert des Flächeninhalts des Bodens der Vase. Berechnen Sie die Differenz aus dem Durchmesser der Vasenöffnung und dem Durchmesser des Vasenbodens. (2P)

4.2 Beurteilen Sie, ob die folgende Aussage wahr oder falsch ist:
„Der größte Durchmesser der Vase ist größer als $4{,}4\ dm$." (3P)

4.3 Es gilt $\pi \cdot \int_0^5 \left(f(x)\right)^2 dx \approx 65{,}57$.
Das Design der Vase soll nun geändert werden. Bis zu einer Höhe von $5\ dm$ soll dabei das Modell f beibehalten werden. Ab dieser Höhe wird eine Gerade verwendet, die sich knickfrei an das Schaubild von f anschließt.
Bestimmen Sie die Höhe der derart veränderten Vase, falls deren Fassungsvermögen insgesamt 70 Liter betragen soll. (5P)

Abituraufgaben BG Teil 2 bis 4 *(mit Hilfsmittel)* 2022

Teil3 - Stochastik

Von zwei Aufgaben A1 und A2 ist eine Aufgabe auszuwählen und zu bearbeiten.

Aufgabe A1/2021

1 Ein Institut untersucht im Auftrag eines Streamingdienstes das Medienverhalten von Bürgern einer Großstadt.

1.1 Eine statistische Erhebung unter 1000 zufällig ausgewählten Teilnehmern hat das Folgende ergeben:
450 Teilnehmer sind jugendlich und nutzen einen Streamingdienst. Die Ergebnisse der Erhebung sind in der nicht vollständig ausgefüllten Tabelle dargestellt. Dabei bezeichnen J und S die folgenden Ereignisse:

	S	$\overline{S}$	
J	450		
$\overline{J}$		150	
	800		1000

J: Teilnehmer ist jugendlich
S: Teilnehmer nutzt einen Streamingdienst

1.1.1 Geben Sie an, mit welcher Wahrscheinlichkeit ein Teilnehmer der Erhebung jugendlich ist und einen Streamingdienst nutzt.
Beurteilen Sie, ob die Ereignisse J und S stochastisch unabhängig sind. (3P)

1.1.2 Erläutern Sie die Bedeutung des Wertes $P_J(S)$ im Sachzusammenhang. (2P)

1.2 Dem Institut ist bekannt, dass $70\,\%$ der Nutzer von Streamingdiensten den Anbieter A, $40\,\%$ den Anbieter B und $35\,\%$ beide Anbieter A und B verwenden.
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein Nutzer von Streamingdiensten keinen dieser beiden Anbieter verwendet. (3P)

1.3 An einer vom Institut organisierten Umfrage nimmt erfahrungsgemäß nur jede fünfte angesprochene Person teil.

1.3.1 Es werden 5000 zufällig ausgewählte Personen angesprochen. Die binomialverteilte Zufallsgröße X beschreibt die Anzahl der Personen, die an der Umfrage teilnehmen.
Berechnen Sie den Erwartungswert μ und die Standardabweichung σ von X.
Bestimmen Sie die kleinste natürliche Zahl k, für die gilt:
$P(\mu - k \leq X \leq \mu + k) \geq 0{,}9$. (4P)

1.3.2 Ermitteln Sie die Anzahl der Personen, die mindestens angesprochen werden müssen, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens $95\,\%$ mindestens 1000 Personen für die Umfrage zu gewinnen. (3P)

Aufgabe A2/2022

2.1 In einer Urne befinden sich 100 Kugeln. 20 Kugeln sind rot, 30 gelb und 50 blau. Aus dieser wird immer ohne Zurücklegen gezogen.

2.1.1 Zunächst werden nacheinander drei Kugeln gezogen.

2.1.1.1 Berechnen Sie jeweils die Wahrscheinlichkeit der folgenden Ereignisse:

A: Die ersten beiden Kugeln sind blau und die dritte Kugel ist rot.

B: Mindestens zwei Kugeln sind rot.

C: Die dritte Kugel ist gelb. (5P)

2.1.1.2 Für die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses D gilt:

$P(D) = 3! \cdot \frac{20}{100} \cdot \frac{30}{99} \cdot \frac{50}{98}$

Formulieren Sie ein zugehöriges Ereignis D im Sachzusammenhang. (2P)

2.1.2 Es werden nun sechs Kugeln gezogen. Jemand behauptet:

„Die Wahrscheinlichkeit, dass dabei genau vier rote Kugeln gezogen werden, kann durch $\binom{6}{4} \cdot 0{,}2^4 \cdot 0{,}8^2$ *berechnet werden."*

Begründen Sie, warum diese Behauptung falsch ist, und geben Sie einen richtigen Lösungsansatz an. (3P)

2.2 In einer anderen Urne befinden sich ebenfalls nur rote, gelbe und blaue Kugeln. Von jeder Farbe sind jedoch jeweils gleich viele Kugeln in dieser Urne. Die Wahrscheinlichkeit, dass bei dreimaligem Ziehen ohne Zurücklegen nur Kugeln gleicher Farbe gezogen werden ist mindestens $10\,\%$.

Ermitteln Sie die Anzahl der Kugeln, die in dieser Urne mindestens enthalten sein müssen. (5P)

Teil4 – Vektorgeometrie

Eine Aufgabe ist zu bearbeiten, wenn Wahlgebiet „Vektorgeometrie" im Unterricht behandelt.

Aufgabe A1/2022

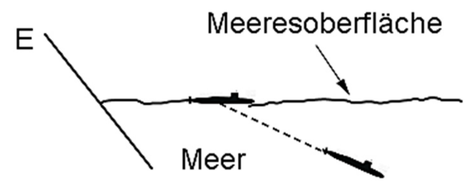


Abbildung: Abtauchen eined U-Bootes

Powered by GEOGEBRA.org

1 Betrachtet wird das Abtauchen eines U-Bootes (siehe Abbildung). Die Meeresoberfläche wird durch die x_1x_2-Ebene dargestellt. Das punktförmige Modell des U-Boots bewegt sich zu Beginn mit konstanter Geschwindigkeit vom Start im Ursprung $O(0|0|0)$ innerhalb einer Minute geradlinig zum Punkt $(60|60|-8)$. Danach behält das U-Boot die Richtung und zunächst auch die Geschwindigkeit bei.
Eine Längeneinheit entspricht einem Meter (m) in der Realität. Die Ebene E mit $E\colon\ x_1 + x_2 + 10x_3 + 200 = 0$ modelliert für $x_3 \leq 0$ die Grenze zwischen dem Meer und dem unter Wasser liegenden Land.

1.1 Geben Sie den Punkt P an, an dem sich das U-Boot nach 2 Minuten befindet.
Nennen Sie die zugehörige Tiefe und berechnen Sie den Abstand von P zu O. (2P)

1.2 Berechnen Sie, wie viele Kilometer das U-Boot in einer Stunde zurücklegen würde. (2P)

1.3 Ermitteln Sie die Schnittgerade von E mit der x_1x_2-Ebene.
Beschreiben Sie deren Bedeutung im Sachkontext. (3P)

1.4 Ab einer Tiefe von $120\,m$ beschreibt der Vektor $\overrightarrow{v_1} = \begin{pmatrix} 15 \\ 15 \\ -2 \end{pmatrix}$ die Geschwindigkeit des U-Boots (in Meter pro Minute) beim Abtauchen in den anschließenden 60 Minuten. Danach ist das Abtauchen des U-Boots beendet.

1.4.1 Begründen Sie, dass die folgenden Aussagen wahr sind:
(1) *„Der Betrag der Geschwindigkeit reduziert sich ab $120\,m$ Tiefe um $75\,\%$."*
(2) *„Die Geschwindigkeit ändert sich 15 Minuten nach Beginn des Abtauchens."* (2P)

1.4.2 Zeigen Sie, dass sich der Abstand des U-Boots zu E mit zunehmender Tiefe vergrößert. (3P)

1.4.3 Ermitteln Sie den mittleren Abstand des U-Boots zu der durch E modellierten Grenze während der letzten 60 Minuten des Abtauchens. (3P)

Abituraufgaben BG Teil 2 bis 4 *(mit Hilfsmittel)* 2022

Aufgabe A2/2022

2 Betrachtet wird das Modell einer Kirche. Der Kirchturm besteht aus einem Quader mit aufgesetzter Pyramide. Einer Bauzeichnung kann man Folgendes entnehmen:
Die Punkte $A(2|0|0)$, $B(2|2|0)$, $C(0|2|0)$ und $D(0|0|0)$ bilden die Grundfläche. Das Dach hat die vier Eckpunkte $E(2|0|6)$, $F(2|2|6)$, $G(0|2|6)$, $H(0|0|6)$ und die Turmspitze $S(1|1|8)$.
Eine Längeneinheit entspricht 10 Meter (m).

2.1 Zeichnen Sie das Modell des Kirchturmes in ein geeignetes Koordinatensystem. (3P)

2.2 Das Dach des Kirchturmes soll vollständig gedeckt werden. Hierfür werden Ziegel verwendet, die pro Ziegel $0{,}12\,m^2$ abdecken. Die Ziegel werden auf Paletten mit jeweils 200 Ziegeln geliefert. Bestimmen Sie die kleinstmögliche Anzahl von Paletten, die geliefert werden müssten. (3P)

2.3 Der Vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$ modelliert zu einem bestimmten Zeitpunkt die Richtung des einfallenden Sonnenlichtes.

2.3.1 Berechnen Sie den Winkel, unter dem das Sonnenlicht auf den Boden (d.h. die x_1x_2-Ebene) trifft. (2P)

2.3.2 Auf der Turmspitze S befindet sich ein senkrecht stehendes Kreuz der Höhe h. Der Kirchturm und das Kreuz werfen einen Schatten. Der Schattenpunkt des höchsten Punktes ist $P(3{,}1|5{,}2|0)$.
Bestimmen Sie die Höhe h. (3P)

2.4 Im Kirchturm soll eine Glocke eingebaut werden. Die Position der Glocke wird im Modell mit Q bezeichnet. Der Abstand von Q zu den Eckpunkten E, F, G und H des Daches soll jeweils dreimal so groß sein wie der Abstand von Q zur Turmspitze S.
Ermitteln Sie die Koordinaten des Punktes Q. (4P)

Abituraufgaben BG Teil 2 bis 4 (mit Hilfsmittel) 2022

Teil4 – Matrizen und Prozesse

Eine Aufgabe ist zu bearbeiten, wenn Wahlgebiet „Matrizen und Prozesse" im Unterricht behandelt.

Aufgabe A1/2022 (nicht für TG)

1. Vier verschiedene Stromanbieter A, B, C und D konkurrieren in einer Stadt um die dortigen 25200 Haushalte. Die Anzahl der Haushalte bleibt konstant. Jeder Haushalt ist an genau einen dieser Anbieter vertraglich gebunden. Verträge sind jeweils ein Jahr lang gültig. Die aktuelle Entwicklung des Wechselverhaltens der Haushalte bei den Stromanbietern lässt sich von einem Jahr zum nächsten modellhaft durch die Gleichung
$\boldsymbol{M} \cdot \overrightarrow{v_n} = \overrightarrow{v_{n+1}}$
mit

$$\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}05 & 0 & 0{,}05 \\ 0{,}15 & 0{,}8 & 0{,}05 & 0 \\ 0 & 0{,}15 & 0{,}7 & 0{,}15 \\ 0{,}05 & 0 & 0{,}25 & 0{,}8 \end{pmatrix} \text{ und } \overrightarrow{v_n} = \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{pmatrix}$$

beschrieben. Hierbei wird die Anzahl der Haushalte, die einen Vertrag mit dem entsprechenden Stromanbieter haben, ebenfalls mit A, B, C und D bezeichnet.

1.1 Interpretieren Sie den Eintrag $0{,}25$ im Sachzusammenhang.
Für zwei mögliche Paare von Stromanbietern wechseln untereinander keinerlei Haushalte. Nennen Sie diese Paare.
Geben Sie den Stromanbieter an, dessen vertraglich gebundene Haushalte am wenigsten zufrieden sind. (4P)

1.2 Im Jahr 2021 waren 3000 Haushalte an Stromanbieter A, 5000 Haushalte an B und 7000 Haushalte an C vertraglich gebunden. Bestimmen Sie für jeden Stromanbieter die zu erwartende Anzahl von Haushalten, die im Jahr 2022 an den Anbieter gebunden sein werden. (3P)

1.3 Eine Verteilung $\vec{v}$ bleibt von einem auf das nächste Jahr unverändert und Stromanbieter C bindet doppelt so viele Haushalte vertraglich an sich wie Anbieter A. Berechnen Sie hierfür die Verteilung aller Haushalte. (4P)

1.4 Anbieter B und C haben jeweils gleich viele Haushalte vertraglich an sich gebunden. Anbieter A möchte die Entwicklung beeinflussen, um langfristig ebenso viele Haushalte wie Anbieter B, bzw. Anbieter C an sich zu binden. Eine Werbeaktion von Anbieter A zielt daher darauf ab, den Anteil der alljährlichen Wechsel der Haushalte von B und D zu A um den selben Prozentsatz zu erhöhen. Im selben Maße soll sich dann der Anteil der alljährlichen Wechsel von B und D zu C verringern. Ansonsten soll das Wechselverhalten aber unverändert bleiben.
Beurteilen Sie, ob dies möglich ist und ermitteln Sie gegebenenfalls, wie viel Prozent der Haushalte dabei von Anbieter B zu C wechseln würden. (4P)

Aufgabe A2/2022 (nicht für TG)

2 Ein Betrieb stellt aus den Rohstoffen R_1, R_2 und R_3 die Zwischenprodukte Z, Z_2 und Z_3 her. Aus diesen Zwischenprodukten werden die Endprodukte E_1, E_2 und E_3 hergestellt. Der Materialfluss in Der Materialfluss in Mengeneinheiten (ME) ist den folgenden Tabellen zu entnehmen.

	E_1	E_2	E_3
Z_1	2	1	2
Z_2	3	0	1
Z_3	1	4	2

	E_1	E_2	E_3
R_1	43	36	33
R_2	30	15	19
R_3	37	14	20

2.1 Für einen Auftrag sollen $400\ ME$ von E_1, $600\ ME$ von E_2 und $500\ ME$ von E_3 hergestellt werden.

2.1.1 Berechnen Sie, wie viele ME der drei Rohstoffe dafür benötigt werden. (2P)

2.1.2 Für diesen Auftrag betragen die Fixkosten 2050 €, die gesamten Rohstoffkosten 400 € und die gesamten Fertigungskosten der Endprodukte betragen 1850 €. Die Fertigungskosten pro ME für Z_2 sind $2{,}5$ mal so hoch wie für Z_1. Für Z_3 sind diese Kosten $1{,}25$ mal so hoch wie für Z_1.
Die Verkaufspreise pro ME der Endprodukte betragen 20 € für E_1 und jeweils 35 € für E_2 und E_3. Es wird ein Gewinn von 8000 € erwirtschaftet.
Bestimmen Sie die Fertigungskosten pro ME der drei Zwischenprodukte. (5P)

2.2 Für einen weiteren Auftrag werden $4600\ ME$ des Zwischenprodukts Z_1, $3800\ ME$ von Z_2 und $6250\ ME$ von Z_3 hergestellt. Die Zwischenprodukte sollen für den Auftrag vollständig zu Endprodukten weiterverarbeitet werden, wobei $950\ ME$ von E_1 produziert werden sollen.
Beurteilen Sie, ob dieser Auftrag ausführbar ist. (3P)

2.3 Das Endprodukt E_3 wird zukünftig nicht mehr produziert. Im Lager befinden sich noch $30000\ ME$ des Rohstoffs R_2, die vollständig aufgebraucht werden müssen. Es sollen zudem nicht mehr als $1000\ ME$ von E_1 produziert werden.
Ermitteln Sie, wie viele ME der Rohstoffe R_1 und R_3 mindestens bzw. höchstens im Lager vorhanden sein müssen. (5P)