Abituraufgaben BG Teil 2 bis 4 (mit Hilfsmittel) 2022

Teil2 - Analysis / Anwendungsorientierte Analysis

Lösung A1/2022

1.1 Bestimmung des Funktionsterms einer Polynomfunktion:
Allgemeine Form einer Polynomfunktion 4. Grades symmetrisch zu y-Achse:

$f(x) = ax^4 + bx^2 + c$

Zur Auflösung von a, b und c benötigen wir drei Bedingungen:

(I) $f(0) = 4$
(II) $f(2) = 2$
(III) $f'(2) = 0$

$f'(x) = 4ax^3 + 2bx$

(I) $a \cdot 0 + b \cdot 0 + c = 4 \quad \Rightarrow \quad c = 4$
(II) $16a + 4b + 4 = 2 \qquad | \quad -4$
(III) $32a + 4b = 0$

(II) $16a + 4b = -2$
(III) $32a + 4b = 0$
(III)-(II)

$16a = 2$

$a = \frac{1}{8}$

$a \rightarrow (II)$

$2 + 4b = -2$

$4b = -4$

$b = -1$

$f(x) = \frac{1}{8}x^4 - x^2 + 4$

1.2.1 Die Faktorisierung von $f(x) = \frac{1}{8}x^4 - x^2 + 4$ in die Form

$f(x) = a(x + b)^2(x + c)^2 + 2$

Die Funktion $f(x) - 2$ hat bei $x_1 = -b$ und $x_2 = -a$ doppelte Nullstellen. Doppelte Nullstellen berühren die x-Achse, sind also Extremstellen. Die beiden Extremstellen von liegen bei $x_1 = -2$ und $x_2 = 2$. Damit ist $b = 2$ und $c = -2$. Wegen $\frac{1}{8}x^4$ ist $a = \frac{1}{8}$.

$f(x) = \frac{1}{8}(x + 2)^2(x - 2)^2 + 2$

1.2.2 Begründung eines x-Wertes $x_0 < 2\sqrt{2}$

Eine nach unten geöffnete Parabel p mit Scheitelpunkt H hat die Funktionsgleichung. $p(x) = ax^2 + 4$ mit $a < 0$.

$p(x) \cap f(x)$

$ax^2 + 4 = \frac{1}{8}x^4 - x^2 + 4$

$\frac{1}{8}x^4 - x^2 - ax^2 = 0$

$x^2 \cdot \left(\frac{1}{8}x^2 - 1 - a\right) = 0$ | Satz vom Nullprodukt

$x_{1,2} = 0$

$\frac{1}{8}x^2 - 1 - a = 0$

$x^2 = 8 + 8a$

$x_{3,4} = \pm\sqrt{8 + 8a}$

Damit es überhaupt eine Lösung dieser Gleichung gibt, muss $-1 \leq a < 0$ sein. $a = -1$ scheidet aus, da sonst $x_{3,4} = 0$. Wegen $-1 < a < 0$ ist $x_3 < \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

1.2.3 Größter Wert der ersten Ableitung von f für $-3 \leq x \leq 3$.

Größte bzw. kleinste Steigungen treten stets in den Wendepunkten des Graphen einer Funktion auf. Bei Beschränkungen des Definitionsbereichs sind stets auch Randbedingungen zu prüfen.

$f'(x) = \frac{1}{2}x^3 - 2x$

$f''(x) = \frac{3}{2}x^2 - 2$

$\frac{3}{2}x^2 - 2 = 0$

$\frac{3}{2}x^2 = 2$

$x^2 = \frac{4}{3}$

$x_{1,2} = \pm\frac{2}{3}\sqrt{3}$

$f'\left(-\frac{2}{3}\sqrt{3}\right) = \frac{1}{2}\left(-\frac{2}{3}\sqrt{3}\right)^3 - 2\left(-\frac{2}{3}\sqrt{3}\right) = 1{,}54$

Prüfung der Randbedingung bei $x = 3$

$f'(3) = \frac{27}{2} - 6 = 7{,}5$

Die stärkste Steigung befindet sich in $x = 3$.

Abituraufgaben BG Teil 2 bis 4 (mit Hilfsmittel) 2022

1.3.1 g mit $g(x) = \cos(u \cdot x) + v;\ -3 \leq x \leq 3$ hat nur die drei Extrempunkte T_1, H und T_2.

Bestimmung der Werte von u und v:

$u = \frac{2\pi}{p}$ mit $p = 4$ (Entfernung der beiden Tiefpunkte)

$u = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$

$v = \frac{y_{HP} + y_{TP}}{2} = \frac{4+2}{2} = 3$

$g(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot x\right) + 3.$

1.3.2 Schaubild der Stammfunktion G von g mit $G(-3) = 0$.

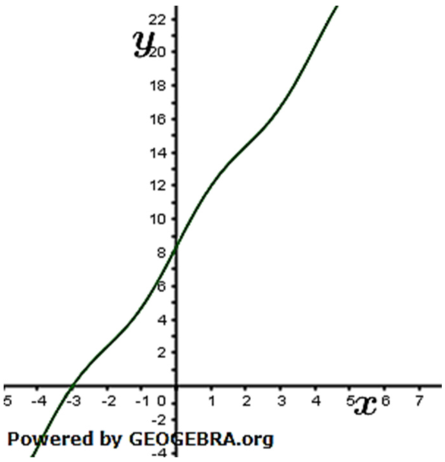
Wir bilden zunächst die Stammfunktion:

$G(x) = \frac{2}{\pi} \cdot sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) + 3x + C$

$G(-3) = 0 = \frac{2}{\pi} \cdot \sin\left(-\frac{3}{2}\pi\right) - 9 + C$

$C = 9 - \frac{2}{\pi} \approx 8{,}36$

$G(x) = \frac{2}{\pi} \cdot sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) + 3x + 8{,}36$



Begründung von Aussagen:

(1) Jede Stammfunktion von g besitzt eine Umkehrfunktion.

Funktionen besitzen Umkehrfunktionen, solange sie entweder monoton wachsend oder monoton fallend sind. G ist im gesamten Definitionsbereich monoton wachsend. $\cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot x\right)$ kann nur Werte zwischen -1 und 1 annehmen, sodass stets $g(x) > 0$ ist.

(2) Der Definitionsbereich ist ein Intervall der Länge $\int_{-3}^{3} g(x)\,dx$.

Bei einer Umkehrfunktion wird der Wertebereich der Ausgangsfunktion zum Definitionsbereich. Der Wertebereich der Ausgangsfunktion bewegt sich jedoch zwischen $G(-3)$ und $G(3)$.

$\int_{-3}^{3} g(x)\,dx = [G(x)]_{-3}^{3} = G(3) - G(-3)$. Somit stimmt der Term mit der Länge des Intervalls überein.

Abituraufgaben BG Teil 2 bis 4 (mit Hilfsmittel) 2022

Lösung A2/2022

2.1 *Regenwaldfläche zur Absorption von etwa* $4{,}9 \cdot 10^8$ *Tonnen* CO_2*:*

Ein Quadratkilometer (km^2) Regenwald absorbiert jährlich rund 400 Tonnen CO_2.

$A_{ges} = \frac{4{,}9 \cdot 10^8}{400} = 1225 \cdot 10^3\ km^2$

Abweichung in Prozent zur Gesamtfläche der BRD:

$\frac{A_{ges}}{A_{BRD}} \cdot 100 = \frac{1225 \cdot 10^3}{357 \cdot 10^3} \cdot 100 = 343{,}1\ \%$

Die Regenwaldfläche weicht um etwa $343\ \% - 100\ \% = 243\ \%$ ab.

2.2.1 *Nachweis exponentielles Wachstum:*

Ein Bestand wächst exponentiell, wenn er in gleichen Zeitschritten immer mit demselben Faktor zunimmt.

$\frac{CO_{2_{70}}}{CO_{2_{50}}} = \frac{9{,}7}{3{,}7} = 2{,}622;\quad \frac{CO_{2_{90}}}{CO_{2_{70}}} = \frac{25{,}5}{9{,}7} = 2{,}629;\quad \frac{CO_{2_{10}}}{CO_{2_{90}}} = \frac{67{,}2}{25{,}5} = 2{,}635$

Da in gleichen Zeitschritten (20 Jahre) die Menge an CO_2 um den Faktor $2{,}6$ ansteigt, handelt es sich um exponentielles Wachstum.

2.2.2.1 *Nachweis der Wachstumskonstante* k*:*

$m(t) = 3{,}7 \cdot 10^7 \cdot e^{kt}$ | Punktprobe mit 1970

$9{,}7 \cdot 10^7 = 3{,}7 \cdot 10^7 \cdot e^{20k}$

$e^{20k} = 2{,}6216$ | ln

$20k = \ln(2{,}6216)$

$k = \frac{1}{20}\ln(2{,}6216) = 0{,}048$

2.2.2.2 *Prozentuales Verhältnis absorbiertes zu freigesetztes* CO_2*:*

Insgesamt freigesetztes CO_2: $3 \cdot 10^{10}$ Tonnen

Insgesamt absorbiertes CO_2: $\int_0^{61} m(t)\ dt$ Tonnen

$$m_{2010} = 3{,}7 \cdot 10^7 \int_0^{61} e^{0{,}048t}\ dt = 3{,}7 \cdot 10^7 \cdot \left[\frac{e^{0{,}048t}}{0{,}048}\right]_0^{61}$$

$$= \frac{3{,}7 \cdot 10^7}{0{,}048} \cdot (e^{0{,}048 \cdot 61} - 1) = 1{,}364 \cdot 10^{10}$$

$\frac{m_{absorbiert}}{m_{freigesetzt}} = \frac{1{,}364 \cdot 10^{10}}{3 \cdot 10^{10}} = 0{,}455 \approx 45{,}5\ \%$

Der gesuchte prozentuale Anteil beträgt ca. $45{,}5\ \%$.

Lösung A3/2022

3.1 *Beurteilung zweier Aussagen:*

(1) Zu Beginn des Monats Februar 2023 wird etwa jedes sechste neu zugelassene Auto ein E-Auto sein.
Der Beginn des Monats Februar ist gemäß Aufgabenstellung $f(1)$.
$f(1) = 0{,}06 \cdot e^{0{,}04} = 0{,}062 \approx \frac{6}{100} = 6\ \%$
Die Aussage ist korrekt.

(2) Der Marktanteil der E-Autos wird im Jahr 2025 erstmalig 50 % übersteigen.
Wir berechnen $f(t) = 0{,}5$:
$0{,}06 \cdot e^{0{,}04t} = 0{,}5 \quad | \quad :0{,}06$
$e^{0{,}04t} = \frac{0{,}5}{0{,}06} = \frac{25}{3} \quad | \quad ln$
$0{,}04t = \ln\left(\frac{25}{3}\right) \quad | \quad :0{,}04$
$t = \frac{\ln\left(\frac{25}{3}\right)}{0{,}04} = 53$
Von 2021 bis Ende 2024 sind es 48 Monate bis Ende 2025 60 Monate. Die Aussage ist korrekt.

3.2 *Begründung der Zunahme des Marktanteils von jährlich etwa 60 %.*

$\frac{f(t+12)}{f(t)} \cdot 100 = \frac{0{,}06 \cdot e^{0{,}04(t+12)}}{0{,}06 \cdot e^{0{,}04t}} = \frac{0{,}06 \cdot e^{0{,}04t}}{0{,}06 \cdot e^{0{,}04t}} \cdot e^{0{,}48} = e^{0{,}48} = 1{,}62$

Der Faktor 1,62 entspricht einem jährlichen Zuwachs von ca. 62 %. Daher beträgt die jährliche prozentuale Zunahme mehr als 60 %.

3.3 *Durchschnittlicher Marktanteil der E-Autos von Anfang 2021 bis Ende 2025:*

$\overline{m} = \frac{1}{60}\int_0^{60} 0{,}06 \cdot e^{0{,}04t}\, dt = \frac{0{,}06}{60}\left[\frac{e^{0{,}04t}}{0{,}04}\right]_0^{60} = \frac{1}{40}\left(e^{2{,}4} - 1\right) = 0{,}2505$

Der durchschnittliche Marktanteil der E-Autos beträgt etwa 25 %.

3.4 *Frage im Sachzusammenhang, die durch die Bestimmung des Wertes des Integrals $\int_3^{39} f(t) \cdot g(t)\,dt$ beantwortet wird:*

Der Zeitraum $t = 3$ bis $t = 39$ entspricht den Zeitpunkten Beginn April 2021 bis Beginn März 2024.
Das Produkt $f(t) \cdot g(t)$ entspricht der Anzahl der neu zugelassenen E-Autos zum Zeitpunkt t.
Durch das Integral wird die Summe aller neu zugelassenen E-Autos berechnet im Zeitraum Beginn April 2021 bis Beginn März 2024.

Lösung A4/2022

4.1 *Flächeninhakt Vasenboden:*

Dies ist ein Kreis mit Radius $r = f(0) = 2{,}7$
$A_{Kreis} = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot 1{,}7^2 = 9{,}08$
Der Vasenboden hat eine Fläche von etwa $9\ dm^2$.
Differenz aus dem Durchmesser der Vasenöffnung und dem Durchmesser des Vasenbodens.
$d = 2 \cdot \left(f(10) - f(0)\right) = 2 \cdot (1{,}95 - 1{,}7) = 0{,}5\ dm$

4.2 *größter Durchmesser der Vase.*

Dieser liegt im Hochpunkt von f vor.
$f'(x) = 0{,}042x^2 - 0{,}4x + 0{,}625$
$0{,}042x^2 - 0{,}4x + 0{,}625 = 0 \quad | \quad :0{,}042$
$x^2 - 9{,}52x + 14{,}88 = 0$
$x_{1,2} = 4{,}72 \pm \sqrt{22{,}28 - 14{,}88} = 4{,}72 \pm 2{,}72$
$x_1 = 7{,}44;\ \ x_2 = 2$
$f(7{,}44) = 0{,}014 \cdot 7{,}44^3 - 0{,}2 \cdot 7{,}44^2 + 0{,}625 \cdot 7{,}44 + 1{,}7 = 1{,}04$
$f(2) = 0{,}014 \cdot 8 - 0{,}2 \cdot 4 + 0{,}625 \cdot 2 + 1{,}7 = 2{,}262$
$d_{max} = 2 \cdot f(2) = 4{,}524\ dm$
Der größte Durchmesser der Vase ist größer als $4{,}4\ \mathrm{dm}$.
Die Aussage ist wahr.

4.3 *Höhe einer profilveränderten Vase:*

Wir benötigen die Gleichung einer Tangente im Punkt $P(5|f(5))$.
$t(x) = f'(5) \cdot (x - 5) + f(5)$
$f'(5) = 0{,}042 \cdot 5^2 - 0{,}4 \cdot 5 + 0{,}625 = -0{,}325$
$f(5) = 0{,}014 \cdot 5^3 - 0{,}2 \cdot 5^2 + 0{,}625 \cdot 5 + 1{,}7 = 1{,}575$
$t(x) = -0{,}325 \cdot (x - 5) + 1{,}575$

$t(x) = -0{,}325x + 3{,}2$

Das Volumen der Vase bis zur Stelle $x_0 = 5$ beträgt $65{,}57\ dm^3$. Die Differenz bis $70\ l = 70\ dm^3$ ist somit $4{,}43\ dm^3$. Die Rotation der Tangente um die x-Achse im Intervall $[5; h]$ mit h als neuer Vasenhöhe muss diese Differenz erzeugen. Will man den Wert von h über ein Rotationsintegral bestimmen, gelangt man zu einer kubischen Gleichung, die mit den zur Verfügung stehenden Hilfsmitteln nicht lösbar ist. Somit ist nur die Lösung über das Volumen eines Kegelstumpfes möglich.

Ab der Stelle $x = 5$ wird das Volumen durch einen Kegel bestimmt. An der Stelle $x = 5$ beträgt der Radius dieses Kegels $r = f(5) = 1{,}575$

Nullstelle der Tangente $t(x)$:

$-0{,}325x + 3{,}2 = 0 \quad ➔ \quad x = 9{,}85$

Die Höhe des Vollkegels damit $h_{Krg} = 9{,}85 - 5 = 4{,}85\ dm$

Das Volumen des Vollkegels ist somit:

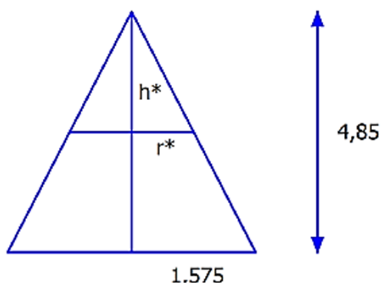
$$V_{Keg} = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r_{Keg}^2 \cdot h_{Keg}$$
$$= \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 1{,}575^2 \cdot 4{,}85 = 12{,}6\ dm^3$$

Die Volumenvergrößerung soll aber nur $4{,}43\ dm^3$ betragen. Also müssen wir den Vollkegel um $12{,}6 - 4{,}43 = 8{,}17\ dm^3$ verkleinern.

$$V_{Keg^*} = 8{,}17 = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^{*2} \cdot h^*$$

Nach dem 2. Strahlensatz gilt:

$$\frac{h_{Keg}}{r_{Keg}} = \frac{h_{Keg^*}}{r_{Keg^*}} = \frac{4{,}85}{1{,}575}$$



$$r_{Keg^*} = \frac{1{,}575 \cdot h_{Keg^*}}{4{,}85}$$

$$r_{Keg^*} \rightarrow V_{Keg^*}$$

$$\frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \left(\frac{1{,}575 \cdot h_{Keg^*}}{4{,}85}\right)^2 \cdot h_{Keg}^* = 8{,}17$$

$$0{,}1104\ {h_{Keg}^*}^3 = 8{,}17$$

$$h_{Keg^*} = \sqrt[3]{73{,}98} = 4{,}19$$

Der Vollkegel muss um $4{,}19\ dm$ gekürzt werden. Für den Stumpf verbeibt somit eine Höhe von $4{,}85 - 4{,}19 = 0{,}66\ dm$

Die neue Höhe der Vase ist $5 + 0{,}66 = 5{,}66\ dm$.

Teil3 - Stochastik

Lösung A1/2022

1.1.1 *Wahrscheinlichkeit eines jugendlichen Teilnehmers, der einen Streamingdienst nutzt:*

Wir vervollständigen zunächst die Vierfeldertafel.

	S	$\bar{S}$	$\sum$
J	450	50	500
$\bar{J}$	350	150	500
$\sum$	800	200	1000

$P(J \cap S) = \frac{450}{1000} = 0{,}45 = 45\ \%$

Beurteilung, ob die Ereignisse J und S stochastisch unabhängig sind.

Zwei Ereignisse J und S sind stochastisch unabhängig wenn gilt: $P(J \cap S) = P(J) \cdot P(S)$

$P(J) = \frac{500}{1000} = \frac{1}{2}; \quad P(S) = \frac{800}{1000} = \frac{4}{5}$

$P(J) \cdot P(S) = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5} = \frac{4}{10} = 0{,}4 = 40\ \% \neq P(J \cap S)$

Die Ereignisse J und S sind stochastisch abhängig.

1.1.2 *Bedeutung des Wertes $P_J(S)$:*

Der Wert $P_J(S)$ gibt die Wahrscheinlichkeit an, dass ein Teilnehmer einen Streamingdienst benutzt unter der Bedingung, dass er jugendlich ist.

1.2 *Bestimmung der Wahrscheinlichkeit, dass ein Nutzer von Streamingdiensten weder Anbieter A noch B verwendet.*

Wir tragen die vorgegebenen Werte in eine Vierfeldertafel ein.

	A	$\bar{A}$	$\sum$
B	0,35	0,05	0,4
$\bar{B}$	0,35	0,25	0,6
$\sum$	0,7	0,30	1

$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0{,}25 = 25\ \%$

Abituraufgaben BG Teil 2 bis 4 (mit Hilfsmittel) 2022

1.3.1 *Ermitteln von Werten:*

Binomialverteilung mit $n = 5000$; $p = 0{,}2$ für Teilnahme, X beschreibt die Anzahl der Personen, die an der Umfrage teilnehmen.

Erwartungswert und Standardabweichung:

$\mu = n \cdot p = 5000 \cdot 0{,}2 = 1000$

$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} = \sqrt{1000 \cdot 0{,}8} = 28{,}3$

Bestimmung eines Wertes von k, damit $P(\mu - k \leq X \leq \mu + k) \geq 0{,}9$.

Wir verwenden die einschlägig bekannten Sigma-Regeln.

Es gilt $P(\mu - 1{,}64\sigma \leq X \leq \mu + 1{,}64\sigma) \approx 0{,}9$.

$1{,}64\sigma = 1{,}64 \cdot 28{,}3 = 46{,}4$

$\mu - 1{,}64\sigma = 1000 - 46{,}4 = 953{,}6$ ➔ gewählt 954.

$\mu + 1{,}64\sigma = 1000 + 46{,}4 = 1046{,}4$ ➔ gewählt 1046.

$B_{5000;0,2}(954 \leq X \leq 1046) = 0{,}9493 - 0{,}0494 = 0{,}8999$

Weitere Kontrolle mit:

$B_{5000;0,2}(953 \leq X \leq 1047) = 0{,}9528 - 0{,}0459 = 0{,}9069$

Das kleinste k ist somit $1047 - 1000 = 47$.

1.3.2 *Mindestanzahl anzusprechender Personen um mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 95 % mindestens 1000 Personen zur Teilnahme zu bewegen.*

Gesucht ist der Stichprobenumfang n.

$B_{n;0,2}(X \geq 1000) \geq 0{,}95$

$B_{n;0,2}(X \leq 999) \leq 0{,}05$

n	$B_{n;0,2}(X \leq 999)$
5100	0,2370
5210	0,07
5220	0,0612
5230	0,0533
5235	0,0497
5234	0,0505

Es müssen mindestens 5235 Personen angesprochen werden.

Abituraufgaben BG Teil 2 bis 4 (mit Hilfsmittel) 2022

Lösung A2/2022

2.1.1.1 *Berechnen bestimmter Wahrscheinlichkeit:*

$P(rot) = \frac{20}{100}; \quad P(gelb) = \frac{30}{100}; \quad P(blau) = \frac{50}{100}$

Jeweils nur im ersten Zug (Ziehen OHNE Zurücklegen)

A: Die ersten beiden Kugeln sind blau und die dritte Kugel ist rot.

$P(A) = P(blau; blau; rot) = \frac{50}{100} \cdot \frac{49}{99} \cdot \frac{20}{98} = \frac{5}{99}$

B: Mindestens zwei Kugeln sind rot.

$P(B) = P(rot; rot; rot) + 3 \cdot P(rot; rot; \overline{rot})$

$P(B) = \frac{20}{100} \cdot \frac{19}{99} \cdot \frac{18}{98} + 3 \cdot \frac{20}{100} \cdot \frac{19}{99} \cdot \frac{80}{98} = \frac{817}{8085}$

C: Die dritte Kugel ist gelb.

$P(C) = P(gelb; gelb; gelb) + P(\overline{gelb}; gelb; gelb) +$
$P(gelb; \overline{gelb}; gelb) + P(\overline{gelb}; \overline{gelb}; gelb)$

$P(C) = \frac{30 \cdot 29 \cdot 28 + 2 \cdot 30 \cdot 29 \cdot 40 + 70 \cdot 69 \cdot 30}{100 \cdot 99 \cdot 98} = \frac{3}{10}$

2.1.1.2 *Formulierung eines Ereignisses D im Sachzusammenhang:*

Der Term $3! \cdot \frac{20}{100} \cdot \frac{30}{99} \cdot \frac{50}{98}$ berechnet die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses D beim dreimaligen Ziehen ohne Zurücklegen drei unterschiedliche Farben zu ziehen.

2.1.2 *Widerlegung einer Behauptung:*

Der Term $\binom{6}{4} \cdot 0{,}2^4 \cdot 0{,}8^2$ berechnet die beschriebene Wahrscheinlichkeit im Falle von „mit Zurücklegen“. Aufgabenstellung lautet jedoch „ohne Zurücklegen.

Berichtigung des Terms:

Richtig wäre $\binom{6}{4} \cdot \frac{20}{100} \cdot \frac{19}{99} \cdot \frac{18}{98} \cdot \frac{17}{97} \cdot \frac{80}{96} \cdot \frac{79}{95}$

2.2 *Ermittlung einer Anzahl Kugeln in einer Urne:*

$P(rot) = \frac{n}{3n}; \quad P(gelb) = \frac{n}{3n}; \quad P(blau) = \frac{n}{3n}$

Jeweils nur im ersten Zug.

A: Beim dreimaligen Ziehen werden nur Kugeln gleicher Farbe gezogen.

$P(A) = P(rot; rot; rot) + P(gelb; gelb; gelb) +$
$P(blau; blau; blau)$

$P(rot; rot; rot) = P(gelb; gelb; gelb) = P(blau; blau; blau)$

$P(A) = 3 \cdot P(rot; rot; rot) = 3 \cdot \frac{n}{3n} \cdot \frac{n-1}{3n-1} \cdot \frac{n-2}{3n-2}$

$P(A)=\frac{(n-1)(n-2)}{(3n-1)(3n-2)}=\frac{n^2-3n+2}{9n^2-9n+2}$

$\frac{n^2-3n+2}{9n^2-9n+2}\geq 0{,}1 \qquad | \quad \cdot(9n^2-9n+2)$

$n^2-3n+2\geq 0{,}9n^2-0{,}9n+0{,}2$

$0{,}1n^2-2{,}1n+1{,}8\geq 0 \qquad | \quad :0{,}1$

$n^2-21n+18\geq 0$

$n_{1,2}=10{,}5\pm\sqrt{110{,}25-18}=10{,}5\pm 9{,}6$

$n_1=20{,}1;\ \ n_2=0{,}9$

n_2 ist keine Lösung der Aufgabe.

Es liegen 63 Kugeln in der Urne, nämlich jeweils 21 rote, blaue und gelbe.

Teil4 – Vektorgeometrie

Lösung A1/2022

1.1 *Koordinaten des Punktes P des U-Bootes nach 2 Minuten:*

Geradengleichung des Bootes:

$g:\quad \vec{x}=\vec{o}+t\cdot\begin{pmatrix}60\\60\\-8\end{pmatrix};\ \ t\in\mathbb{R}$ in Minuten

$\overrightarrow{OP}=2\cdot\begin{pmatrix}60\\60\\-8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}120\\120\\-16\end{pmatrix}$

Das U-Boot befindet sich nach 2 Minten im Punkt $P(120|120|-16)$.

Tiefe und Abstand des Punktes P zu O:

Die x_3-Koordinate von P gibt die Tiefe des U-Bootes an. Wegen des Maßstabs $1\,LE$ gleich $1\,m$, befindet sich das U-Boot in $16\,m$ Tiefe.

$d(P;O)=\left|\overrightarrow{OP}\right|=\sqrt{120^2+120^2+16^2}=170{,}5$

Die Entfernung des Bootes vom Ursprung beträgt etwa $170{,}5\,m$.

1.2 *Geschwindigkeit des Bootes in km/h:*

$v=\left|\begin{pmatrix}60\\60\\-8\end{pmatrix}\right|\frac{m}{min}=\sqrt{60^2+60^2+8^2}\,\frac{m}{min}=85{,}2\,\frac{m}{min}=5112\,\frac{m}{h}$

$v\approx 5{,}1\,\frac{km}{h}$.

1.3 *Schnittgerade von E mit der x_1x_2-Ebene:*

x_1x_2-Ebene F: $x_3 = 1$

E: $x_1 + x_2 + 10x_3 = -200$

F: $x_3 = 0$

$E \cap F$

E: $x_1 + x_2 = -200$

$x_1 + x_2 = -210$

Wir wählen eine Variable frei mit $x_2 = t$

$x_1 + t = -200$

$x_1 = -200 - t$

$$\mathbb{L} = \left\{\begin{pmatrix} -200 - t \\ t \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$$

Daraus die Geradengleichung:

$$g:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} -210 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Bedeutung der Schnittgeraden im Sachkontext:

Die Gerade h modelliert die Grenze zwischen Meer und Land auf Höhe der Meeresoberfläche.

1.4.1 *Begründung von Aussagen:*

(1) Geschwindigkeit ab $120\,m$ Tiefe:

$$v_1 = \left|\begin{pmatrix} 15 \\ 15 \\ -2 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{15^2 + 15^2 + 2^2} = 21{,}3\,\frac{m}{min}$$

Geschwindigkeit bis Tiefe (siehe 1.2) $v = 85{,}2\,\frac{m}{min}$

$$\frac{v_1}{v} \cdot 100 = \frac{21{,}3}{85{,}2} \cdot 100 = 25\ \%$$

Das Boot hat noch $25\ \%$ seiner ursprünglichen Geschwindigkeit, d.h. es fährt um $75\ \%$ langsamer.

(2) 15 Minten nach Beginn des Abtauchens muss dieses eine Tiefe von $120\,m$ erreicht haben. Ist dies der Fall. So stimmt die Aussage.

$$\overrightarrow{OP^*} = 15 \cdot \begin{pmatrix} 60 \\ 60 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 900 \\ 900 \\ -120 \end{pmatrix}$$

Das Boot hat 15 Minuten nach Beginn des Abtauchens eine Tiefe von $120\,m$ erreicht.

1.4.2 Vergrößerung des Abstands des U-Boots zu E mit zunehmender Tiefe:

Die neue Gerade ab einer Tiefe von $120\,m$ lautet:

$g_{120}:\quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 900 \\ 900 \\ -120 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 15 \\ 15 \\ -2 \end{pmatrix};\ t\ \in \mathbb{R}$ in Minuten

Wir berechnen den Abstand der Geraden zu E über die HNF.

$E:\ \frac{x_1+x_2+10x_3+200}{\sqrt{102}} = 0$

Wir setzen den Punkt $Q(900+15t|900+15t|-120-2t)$ ein:

$d(E;Q) = \frac{|900+15t+900+15t-1200-20t+200|}{\sqrt{102}} = \frac{|800+10t|}{\sqrt{102}}$

Wegen $t \geq 0$ nimmt der Abstand zu E mit größer werdender Tiefe zu.

1.4.3 *Mittlerer Abstand zu E während der letzten 60 Minuten:*

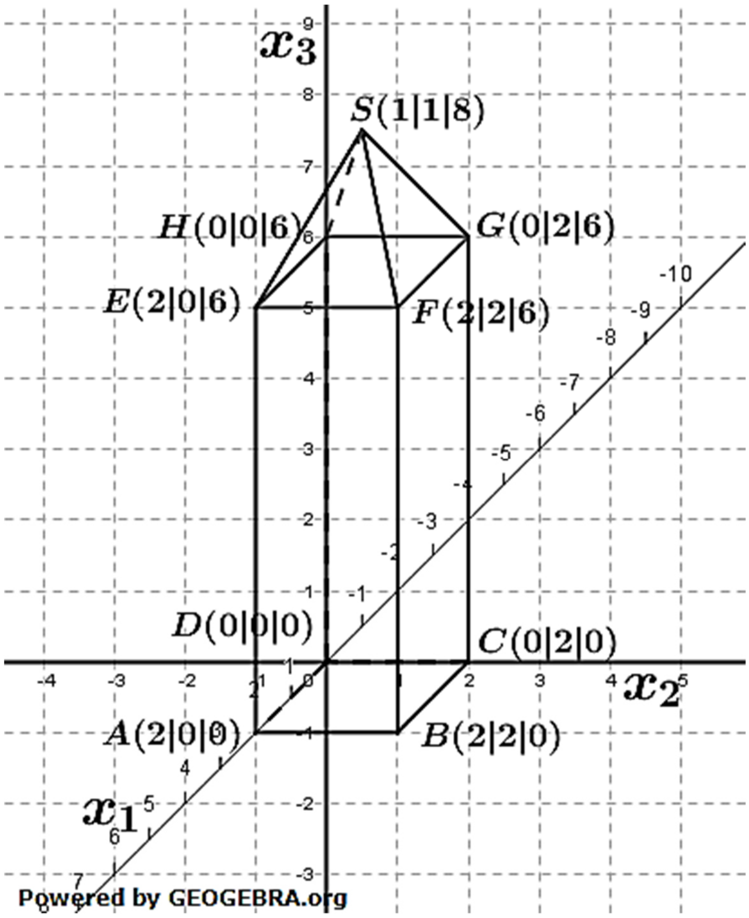
$d_{15}(E;Q) = \frac{800+10\cdot 0}{\sqrt{102}} = 79{,}21\,m$

$d_{75}(E;Q) = \frac{800+10\cdot 60}{\sqrt{102}} = 138{,}62\,m$

$d_{\overline{m}}(E;Q) = \frac{d_{75}(E;Q)+d_{75}(E;Q)}{2} = \frac{138{,}62+79{,}21}{2} = 108{,}9\,m$

<u>Lösung A2/2021</u>

2.1 Modell des Kirchturms im Koordinatensystem:



2.2 <u>*Anzahl von Paletten zur Bedachung des Kirchturmdaches:*</u>
Das Kirchturmdach besteht aus 4 gleich großen gleichschenkligen Dreiecken. Wir berechnen die Fläche eines Dreiecks über z. B.

$$A_{Dreieck} = \frac{1}{2} \cdot |\overrightarrow{EF}| \cdot |\overrightarrow{IS}|$$

$$\overrightarrow{OI} = \frac{1}{2} \cdot \left(\overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OF}\right) = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 2+2 \\ 0+2 \\ 6+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$$

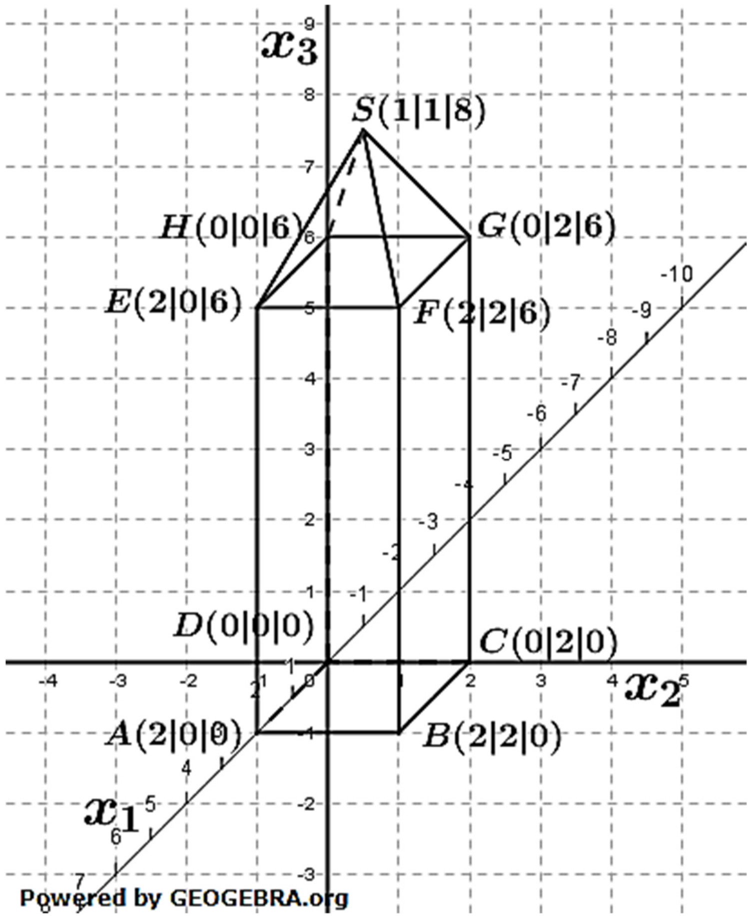
$$\overrightarrow{EF} = \begin{pmatrix} 2-2 \\ 2-0 \\ 6-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \left|\overrightarrow{EF}\right| = 2$$

$$\overrightarrow{IS} = \begin{pmatrix} 1-2 \\ 1-1 \\ 8-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}; \quad \left|\overrightarrow{IS}\right| = \sqrt{1^2+2^2} = \sqrt{5}$$

$$A_{Dreieck} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \sqrt{5} \approx 2{,}24\ FE$$

Abituraufgaben BG Teil 2 bis 4 (mit Hilfsmittel) 2022

2.1 Modell des Kirchturms im Koordinatensystem:



2.2 *Anzahl von Paletten zur Bedachung des Kirchturmdaches:*
Das Kirchturmdach besteht aus 4 gleich großen gleichschenkligen Dreiecken. Wir berechnen die Fläche eines Dreiecks über z. B.

$$A_{Dreieck} = \frac{1}{2} \cdot |\overrightarrow{EF}| \cdot |\overrightarrow{IS}|$$

$$\overrightarrow{OI} = \frac{1}{2} \cdot \left(\overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OF}\right) = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 2+2 \\ 0+2 \\ 6+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{EF} = \begin{pmatrix} 2-2 \\ 2-0 \\ 6-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad |\overrightarrow{EF}| = 2$$

$$\overrightarrow{IS} = \begin{pmatrix} 1-2 \\ 1-1 \\ 8-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}; \quad |\overrightarrow{IS}| = \sqrt{1^2+2^2} = \sqrt{5}$$

$$A_{Dreieck} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \sqrt{5} \approx 2{,}24\ FE$$

$A_{Dach} = 4 \cdot A_{Dreieck} = 4 \cdot 2{,}24\,FE = 8{,}94\,FE$

Wegen Maßstab $1\,LE = 10\,m$ ist $1\,FE = 100\,m^2$

$A_{Dach} = 894\,m^2$

1 Palette Ziegeln hat $200 \cdot 0{,}12\,m^2 = 24\,m^2$ Fläche.

$n_{Palette} = \frac{894}{24} = 37{,}25\,St.$

Es müssen 38 Paletten geliefert werden.

2.3.1 *Winkel zwischen Sonnenstrahl und x_1x_2-Ebene:*

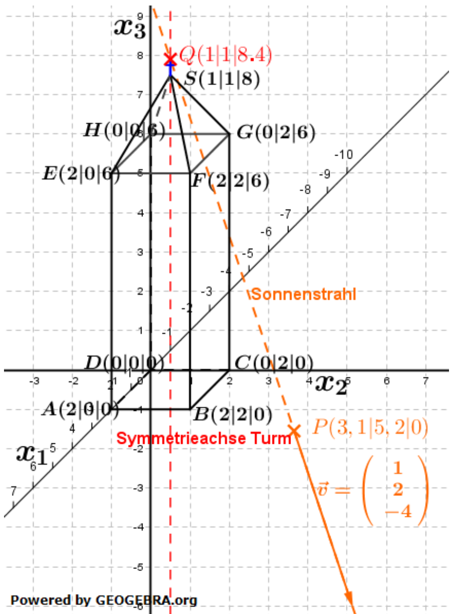
Dies ist der Schnittwinkel zwischen einem Vektor und einer Ebene. Berechnung über:

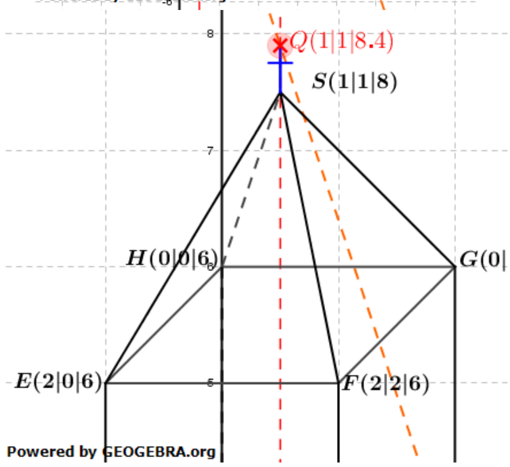
$$\sin(\varphi) = \frac{|\vec{v} \cdot \overrightarrow{n_E}|}{|\vec{v}| \cdot |\overrightarrow{n_E}|} = \frac{\left|\begin{pmatrix}1\\2\\-4\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix}1\\2\\-4\end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right|} = \frac{|-4|}{\sqrt{21}} = \frac{4}{\sqrt{21}}$$

$$\varphi = \arcsin\left(\frac{4}{\sqrt{21}}\right) = 60{,}8\,°$$

2.3.2 *Höhe eines Kreuzes:*

Die Grafik verdeutlicht die Situation. Gesucht ist der Punkt Q als Schnittpunkt der Geraden s des Sonnlichts durch den Punkt P mit der Geraden a der Symmetrieachse des Turms. Die Differenz der x_3-Koordinate von Q und S ergibt dann die Höhe des Kreuzes.





Gerade s:

$$s\colon \vec{x} = \begin{pmatrix}3{,}1\\5{,}2\\0\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}1\\2\\-4\end{pmatrix}$$

Gerade a:

$$a\colon \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\1\\8\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

$s \cap a$:

$$\begin{pmatrix}3{,}1\\5{,}2\\0\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}1\\2\\-4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\8\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} - s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3{,}1 \\ 5{,}2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} - s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2{,}1 \\ -4{,}2 \\ 8 \end{pmatrix}$$

(I) $\quad r = -2{,}1$

(III) $\quad -4r - s = 8$

$-4 \cdot (-2{,}1) = 8 + s$

$8{,}4 - 8 = s$

$s = 0{,}4$

$$\overrightarrow{OQ} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix} + 0{,}4 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 8{,}4 \end{pmatrix}$$

$h_{Kreuz} = q_3 - s_3 = 8{,}4 - 8 = 0{,}4$

Das Kreuz ist $4\,m$ hoch.

2.4 *Ermittlung eines Punktes Q einer Glocke:*

Der Punkt $Q(1|1|q_3)$ liegt auf der Symmetrieachse des Turms.

Es soll gelten $|\overrightarrow{QE}| = |\overrightarrow{QF}| = |\overrightarrow{QG}| = |\overrightarrow{QH}| = 3 \cdot |\overrightarrow{QS}|$

$$\overrightarrow{QS} = \begin{pmatrix} 1-1 \\ 1-1 \\ 8-q_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 8-q_3 \end{pmatrix}; \quad |\overrightarrow{QS}| = 8 - q_3$$

$$\overrightarrow{QE} = \begin{pmatrix} 2-1 \\ 0-1 \\ 6-q_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 6-q_3 \end{pmatrix}; \quad |\overrightarrow{QE}| = \sqrt{1+1+(6-q_3)^2}$$

$3 \cdot |\overrightarrow{QS}| = |\overrightarrow{QE}|$

$3 \cdot (8 - q_3) = \sqrt{2 + (6-q_3)^2} \quad | \quad \uparrow^2$

$9 \cdot (8 - q_3)^2 = 2 + (6 - q_3)^2$

$9 \cdot (64 - 16_3 + q_3^2) = 2 + 36 - 12q_3 + q_3^2$

$9q_3^2 - 144q_3 + 576 = q_3^2 - 12q_3 + 38$

$8q_3^2 - 132q_3 + 538 = 0 \quad | \quad :8$

$q_3^2 - 16{,}5q_3 + 67{,}25 = 0$

$q_{3_{1,2}} = 8{,}25 \pm \sqrt{68{,}0625 - 67{,}25} = 8{,}25 \pm 0{,}9$

$q_{3_1} = 9{,}15; \quad q_{3_2} = 7{,}35$

$q_{3_1} = 9{,}15$ entfällt, da außerhalb des Turms.

$q_3 = 7{,}35$.

Die Koordinaten des gesuchten Punktes sind $Q(1|1|7{,}35)$.

Abituraufgaben BG Teil 2 bis 4 (mit Hilfsmittel) 2022

Teil4 – Matrizen / Prozesse

Lösung A1/2022

1.1 *Interpretation des Wertes 0,25:*

$25\,\%$ der Haushalte, die bei Anbieter C einen Vertrag haben, wechseln innerhalb eines Jahres zu Anbieter D.
Für die Paare (A, C) und (B, D) wechseln untereinander keinerlei Haushalte, da die entsprechenden Einträge in der Matrix 0 sind.
Mit dem Anbieter C sind die Haushalte am wenigsten zufrieden, da nur $70\,\%$ der Haushalte bei Anbieter C von einem Jahr zum nächsten bleiben.
Bei den anderen Anbietern bleiben $80\,\%$ der Haushalte von einem Jahr zum nächsten.

1.2 *Anzahl der Haushalte bei Anbieter D:*

$25200 - 3000 - 5000 - 7000 = 10200$

$$\begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}05 & 0 & 0{,}05 \\ 0{,}15 & 0{,}8 & 0{,}05 & 0 \\ 0 & 0{,}15 & 0{,}7 & 0{,}15 \\ 0{,}05 & 0 & 0{,}25 & 0{,}8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3000 \\ 5000 \\ 7000 \\ 10200 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3160 \\ 4800 \\ 7180 \\ 10060 \end{pmatrix}$$

Anzahlen im Jahr 2022:

$A = 3160,\ B = 4800,\ C = 7180,\ D = 10060$

1.3 Da die gesuchte Verteilung gleich bleiben soll, muss gelten: $\boldsymbol{M} \cdot \vec{v} = \vec{v}$.

Es gilt $\vec{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ 2a \\ 25200 - 3a - b \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}05 & 0 & 0{,}05 \\ 0{,}15 & 0{,}8 & 0{,}05 & 0 \\ 0 & 0{,}15 & 0{,}7 & 0{,}15 \\ 0{,}05 & 0 & 0{,}25 & 0{,}8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ 2a \\ 25200 - 3a - b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ 2a \\ 25200 - 3a - b \end{pmatrix}$$

Daraus ergibt sich folgendes Gleichungssystem:

(I) $\quad 0{,}8a + 0{,}05b + 0{,}05(25200 - 3a - b) = a$

(II) $\quad 0{,}15a + 0{,}8b + 0{,}05 \cdot 2a = b$

(III) $\quad 0{,}15b + 0{,}7 \cdot 2a + 0{,}15 \cdot (25200 - 3a - b) = 2a$

(IV) $\quad 0{,}05a + 0{,}25 \cdot 2a + 0{,}8(25200 - 3a - b) = 25200 - 3a - b$

(II) $\quad 0{,}25a - 0{,}2b = 0 \quad ➔ \quad b = 1{,}25a$

$b \rightarrow (I)$

(I) $\quad 0{,}8a + 0{,}05 \cdot 1{,}25a + 0{,}05(25200 - 3a - 1{,}25a) = a$

$0{,}65a + 1260 = a$

$a = 3600$

$a \rightarrow (II)$

(II) $\quad b = 1{,}25 \cdot 3600 = 4500$

Die Probe mit (III) und (IV) führt zu wahren Aussagen.

Die gesuchte Verteilung ist $\vec{v} = \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3600 \\ 4500 \\ 7200 \\ 9900 \end{pmatrix}$.

1.4 Die gesuchte Verteilung hat folgende Bauart:

$\vec{v} = \begin{pmatrix} a \\ a \\ a \\ 25200 - 3a \end{pmatrix}$.

Nun soll gelten:

$$\begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}05 + p & 0 & 0{,}05 + p \\ 0{,}15 & 0{,}8 & 0{,}05 & 0 \\ 0 & 0{,}15 - p & 0{,}7 & 0{,}15 - p \\ 0{,}05 & 0 & 0{,}25 & 0{,}8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ a \\ a \\ 25200 - 3a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ a \\ a \\ 25200 - 3a \end{pmatrix}$$

Daraus ergibt sich folgendes Gleichungssystem:

(I) $\quad 0{,}8a + (0{,}05 + p) \cdot a + (0{,}05 + p)(25200 - 3a) = a$

(II) $\quad 0{,}15a + 0{,}8a + 0{,}05a = a$

(III) $\quad (0{,}15 - p)a + 0{,}7a + (0{,}15 - p) \cdot (25200 - 3a) = a$

(IV) $\quad 0{,}05a + 0{,}25a + 0{,}8(25200 - 3a) = 25200 - 3a$

Aus (IV) Zeile folgt:

$0{,}3a + 20160 - 2{,}4a = 25200 - 3a$

$a = 5600$

Aus (I) folgt:

$0{,}8 \cdot 5600 + (0{,}05 + p) \cdot 5600 + (0{,}05 + p)(8400) = 5600$

$5180 + 14000p = 5600$

$p = 0{,}03$

Die Probe mit (II) und (III) führt zu wahren Aussagen.

Es ist möglich, den gleichen Anteil der alljährlich wechselnden Haushalte von D zu A um den selben Prozentsatz zu erhöhen und im selben Maß den Anteil dieser Anbieter bei deren Wechsel zu C zu senken, und das Wechselverhalten ansonsten unverändert zu lassen. Langfristig haben dabei die Haushalte A, B und C gleich viele Haushalte an sich gebunden. Nur noch 12 Prozent der Haushalte würden dann von B zu C wechseln.

Lösung A2/2022

2.1.1 *Rohstoffberechnung eines Auftrages:*

Rohstoff-Endprodukt-Matrix: $\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 43 & 36 & 33 \\ 30 & 15 & 19 \\ 37 & 14 & 20 \end{pmatrix}$

Berechnung der ME der Rohstoffe:

$$\begin{pmatrix} 43 & 36 & 33 \\ 30 & 15 & 19 \\ 37 & 14 & 20 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 400 \\ 600 \\ 500 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 55300 \\ 30500 \\ 33200 \end{pmatrix}$$

Für den Auftrag benötigt man $55300\,ME$ von R_1, $30500\,ME$ von R_2 und $33200\,ME$ von R_3.

2.1.2 *Fertigungskosten pro ME von Zwischenprodukten:*

Für die Gesamtkosten gilt die Formel

$K_{ges} = K_R + K_z + K_E + K_{Fix}$.

Es gilt $K_{Ges} = 400 + K_Z + 1850 + 2050 =$

Der Erlös beträgt $E = 20\,€ \cdot 400 + 35\,€ \cdot 600 + 35\,€ \cdot 500$

$E = 46500\,€$

Da der Gewinn $8000\,€$ beträgt, ergibt sich

$K_{ges} = E - G = 46500\,€ - 8000\,€ = 38500\,€$

Daraus folgt $4300 + K_Z = 38500\,€$

$K_Z = 34200\,€$

Zwischenprodukt-Endprodukt-Matrix: $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

Berechnung des Zwischenproduktvektors:

$$\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{B} \cdot p = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 400 \\ 600 \\ 500 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2400 \\ 1700 \\ 3800 \end{pmatrix}$$

Der Kostenvektor für die Zwischenprodukte lautet

$\overrightarrow{k_Z} = (z \quad 2{,}5z \quad 1{,}25z)$

Bedingung:

$$K_z = \overrightarrow{k_Z} \cdot \boldsymbol{Z} = (z \quad 2{,}5z \quad 1{,}25z) \cdot \begin{pmatrix} 2400 \\ 1700 \\ 3800 \end{pmatrix} = 2400z + 4250z + 4750z$$

$K_z = 11400z$

Es gilt $34200\,€ = 11400z \quad \rightarrow \quad z = 3$

Fertigungskosten für $Z_1 = 3{,}00\,€$, $Z_2 = 7{,}50\,€$; $Z_3 = 3{,}75\,€$.

2\. 2 *Prüfung der Ausführbarkeit eines Auftrages:*

Es gilt $\boldsymbol{B} \cdot p = \boldsymbol{Z}$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 950 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4600 \\ 3800 \\ 6250 \end{pmatrix}$$

(I) $950 + p_2 + 2p_3 = 4600$

(II) $2850 + p_3 = 3800$

(III) $950 + 4p_2 + 2p_3 = 6250$

(II) $p_3 = 950$

$p_3 \rightarrow (I)$

(I) $950 + p_2 + 1900 = 4600$

$p_2 = 800$

$p_2; p_3 \rightarrow (III)$

(III) $950 + 4 \cdot 800 + 2 \cdot 950 = 6250$

Falsche Aussage, der Auftrag ist nicht durchführbar.

2\. 3 *Bedarfsermittlung von Rohstoffen:*

Es gilt $\boldsymbol{C} \cdot \vec{p} = \vec{r}$

Da E_3 nicht mehr produziert wird, ist der dritte Eintrag des Produktionsvektors gleich 0.

$$\begin{pmatrix} 43 & 36 & 33 \\ 30 & 15 & 19 \\ 37 & 14 & 20 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 \\ 30000 \\ r_3 \end{pmatrix}$$

Daraus ergibt sich folgendes Gleichungssystem:

(I) $43p_1 + 36p_2 = r_1$

(II) $30p_1 + 15p_2 = 30000$

(III) $37p_1 + 14p_2 = r_3$

Das Gleichungssystem besitzt 3 Gleichungen und 4 Unbekannte. Daher existieren unendlich viele Lösungen. Wir wählen eine Variable frei, z. B. $p_1 = t$: $t \in \mathbb{R}$.

(I) $43t + 36p_2 = r_1$

(II) $30t + 15p_2 = 30000$

(III) $37t + 14p_2 = r_3$

Aus (II) folgt: $p_2 = 2000 - 2t$

$p_2 \rightarrow (I); (III)$

(I) $43t + 36 \cdot (2000 - 2t) = r_1$

$r_1 = 72000 - 29t$

(III) $37t + 14 \cdot (2000 - 2t) = r_3$

$r_3 = 28000 + 9t$

Wegen $p_1 \geq 0$ folgt $t \geq 0$.
Wegen $p_2 \geq 0$ folgt $2000 - 2t \geq 0$ ➔ $t \leq 1000$.
Für $t = 0$ folgt $r_1 = 72000$
Für $t = 1000$ folgt $r_1 = 43000$
Daraus folgt $43000 \leq r_1 \leq 72000$
Für $t = 0$ folgt $r_3 = 28000$
Für $t = 1000$ folgt $r_3 = 37000$
Daraus folgt $28000 \leq r_3 \leq 37000$
Von R_1 werden mindestens $43000\,ME$ und höchstens $72000\,ME$ benötigt.
Von R_3 werden mindestens $28000\,ME$ und höchstens $37000\,ME$ benötigt.