Abituraufgaben BG Teil 2 bis 4 *(mit Hilfsmittel)* *Mustersatz 1*

Teil2 - Analysis / Anwendungsorientierte Analysis

Die Aufgabe A1 ist zu bearbeiten.

Aufgabe A1

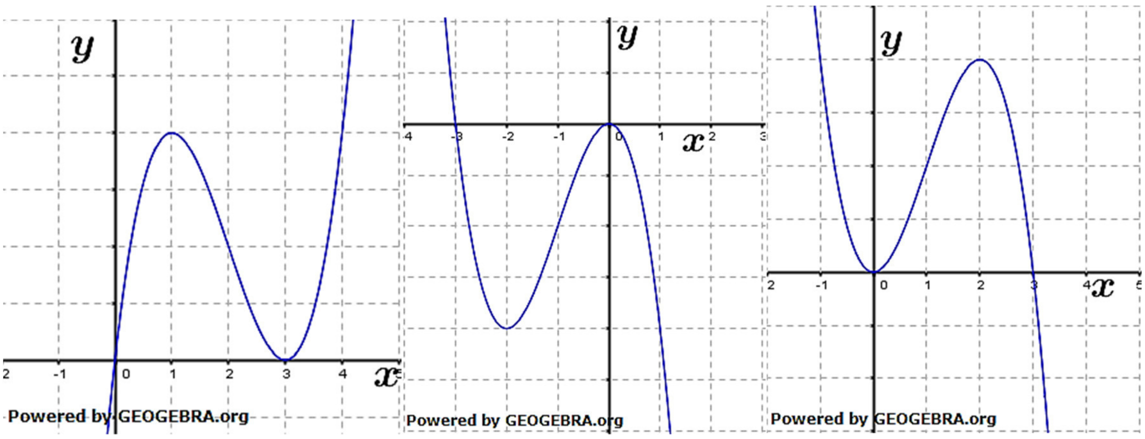
1. Gegeben ist die Funktion f mit

$$f(x) = -2x^2(x-3);\ \ x \in \mathbb{R}$$

Das Schaubild von f ist K.

1.1 Eine der folgenden Abbildung zeigt das Schaubild K. **6P**
Untersuche für jede der Abbildungen, ob es sich um das Schaubild K handeln kann.
Skaliere auf dem beiliegenden Arbeitsblatt bei derjenigen Abbildung, die K zeigt, die y-Achse.

A **B** **C**



1.2 Berechne den Inhalt der Fläche, die das Schaubild von K mit der x-Achse einschließt. **5P**

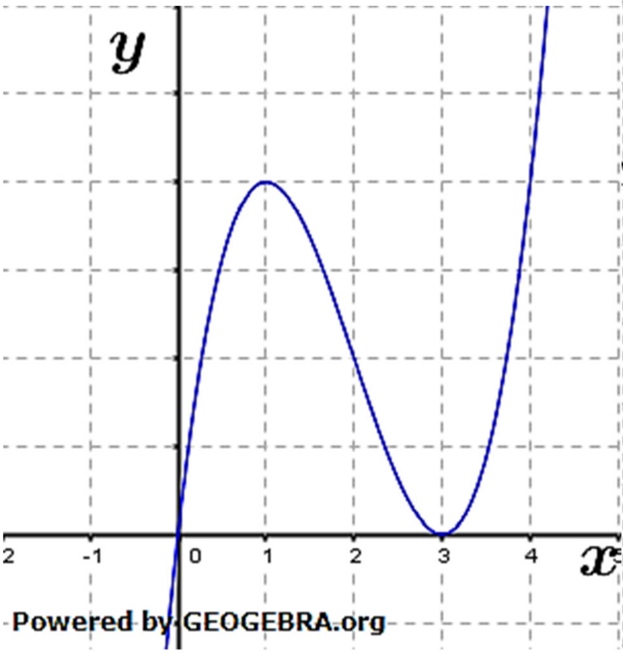
1.3 Die Gerade mit der Gleichung $y = -4x + 8$ zerlegt die Fläche zwischen K und der x-Achse in zwei Teilflächen. **5P**
Ermittle einen Term, mit dem der Inhalt einer der beiden Teilflächen berechnet werden kann und kennzeichne in der Abbildung aus 1.1 auf dem Arbeitsblatt die von dir gewählte Fläche.

1.4 Die Abbildung A zeigt das Schaubild einer Funktion g. **4P**
Begründe, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.
1. $g''(3) < 0$
2. Bei $x = 1$ hat g' einen Vorzeichenwechsel von $+$ nach $-$.
3. An der Stelle $x = 2$ hat das Schaubild von g' einen Hochpunkt.
4. Die momentane Änderungsrate von g an der Stelle $x = 3$ ist größer als die durchschnittliche Änderungsrate im Intervall $[1; 2]$.

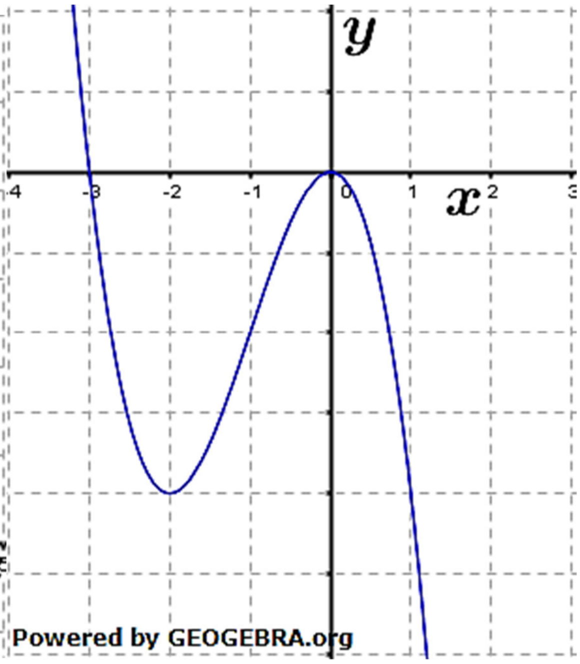
Abituraufgaben BG Teil 2 bis 4 *(mit Hilfsmittel)* *Mustersatz 1*

Arbeitsblatt:

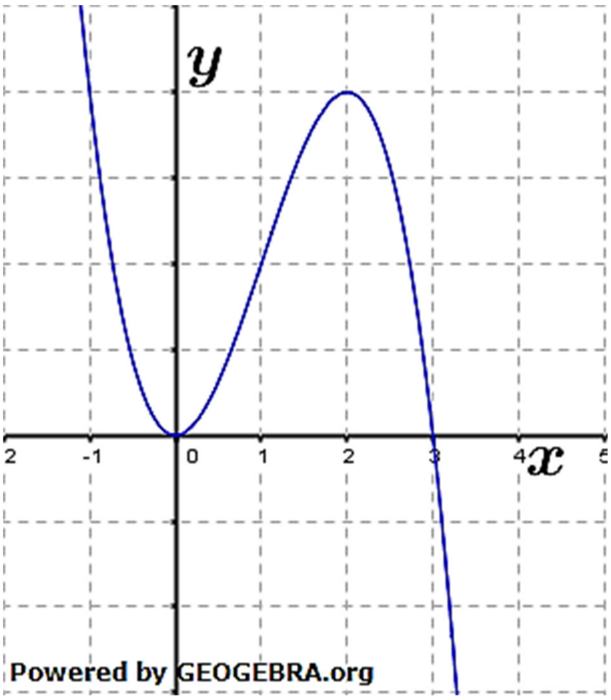
A



B



C

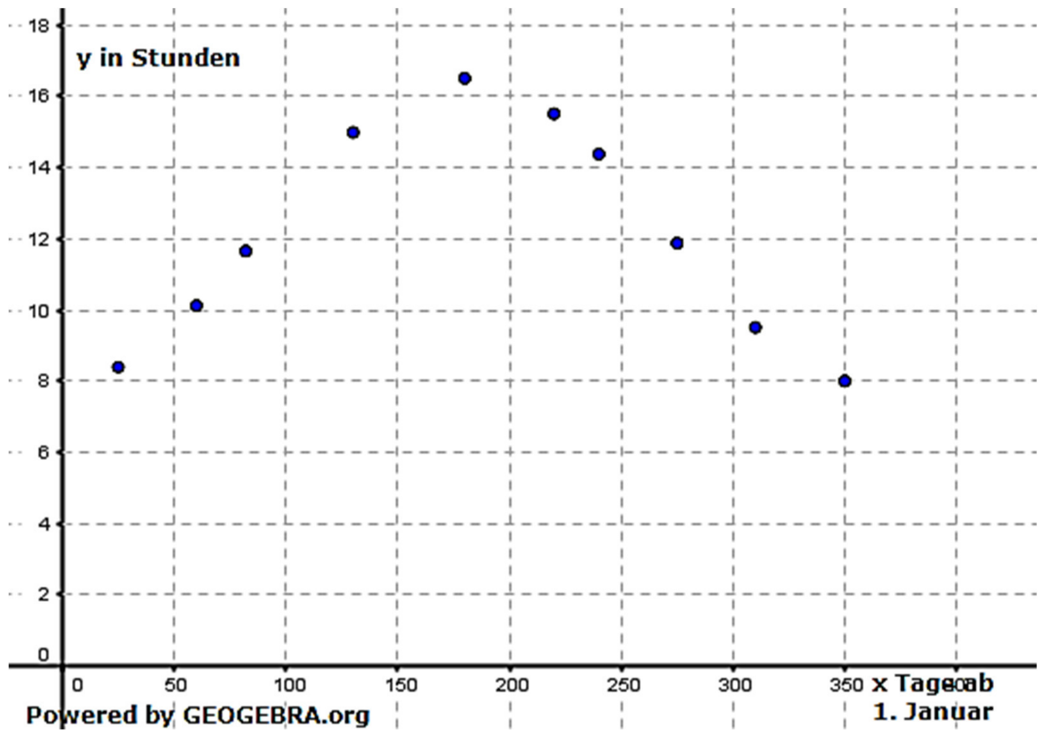


Abituraufgaben BG Teil 2 bis 4 (mit Hilfsmittel) Mustersatz 1

Von drei Aufgaben A2 bis A4 ist eine Aufgabe auszuwählen und zu bearbeiten.

Aufgabe A2

2. Im Verlaufe eines Jahres ändert sich aufgrund der geneigten Erdachse die astronomische Sonnenscheindauer, d. h., die Zeitspanne zwischen Sonnenaufgang und Sonnenuntergang.
In unseren Breiten ist die Sonne am 21. Juni mit ca. $16{,}5$ Stunden am längsten und am 21. Dezember mit ca. 8 Stunden am kürzesten zu sehen.



2.1 Die Messergebnisse sollen durch eine trigonometrische Funktion modelliert werden. **6P**
Gib einen geeigneten Funktionsterm an.

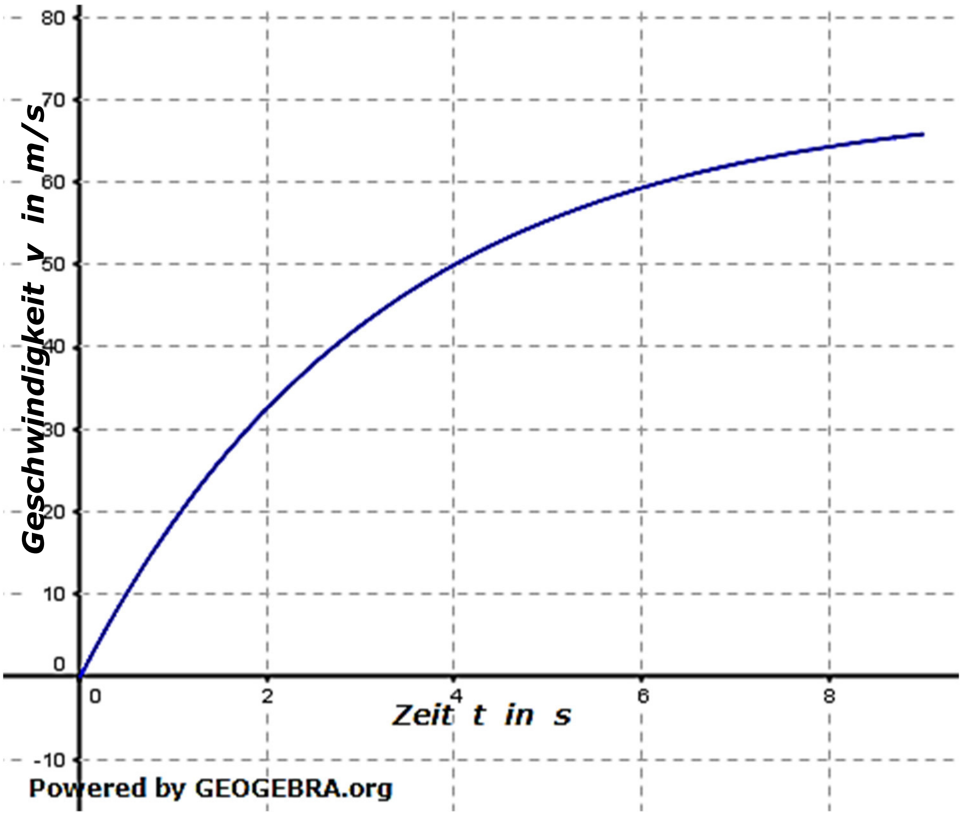
2.2 Tina und Tom haben jeweils einen Funktionsterm bestimmt. **4P**
Tina hat die Daten durch eine quadratische Regression mit dem Bestimmtheitsmaß $r^2 = 0{,}8745$, Tom durch eine Regression 4. Grades mit dem Bestimmtheitsmaß $r^2 = 0{,}9784$ angenähert.

Bewerte die Güte der beiden Näherungsfunktionen.
Kann man mithilfe Toms Näherungsfunktion die astronomische Sonnenscheindauer im nächsten Jahr vorhersagen?
Begründe deine Antwort.

Abituraufgaben BG Teil 2 bis 4 (mit Hilfsmittel) Mustersatz 1

Aufgabe A3

3. Bei einem Beschleunigungsrennen (Drag Race) versuchen die Teilnehmer mit ihren Rennwagen eine kurvenfreie Strecke in möglichst kurzer Zeit zurückzulegen.
Der Bordcomputer des Fahrzeugs eines Teilnehmers nahm den in der Abbildung dargestellten Geschwindigkeitsverlauf auf.



Dieser Zusammenhang zwischen der Geschwindigkeit und der Zeit lässt sich durch die Funktion v mit

$$v(t) = -70e^{-0{,}313t} + 70;\ \ 0 \leq t \leq 8{,}75$$

modellieren.
Verwende für die Bearbeitung der folgenden Aufgaben dieses Modell.

3.1 Nach wieviel Sekunden hat das Fahrzeug eine Geschwindigkeit von $100\ km/h$ erreicht? **4P**

3.2 Nach $8{,}75$ Sekunden fährt das Fahrzeug durch das Ziel. **6P**
Ermittle die Durchschnittgeschwindigkeit des Fahrzeuges.
Welche Länge hat die Rennstrecke?

Abituraufgaben BG Teil 2 bis 4 *(mit Hilfsmittel)* Mustersatz 1

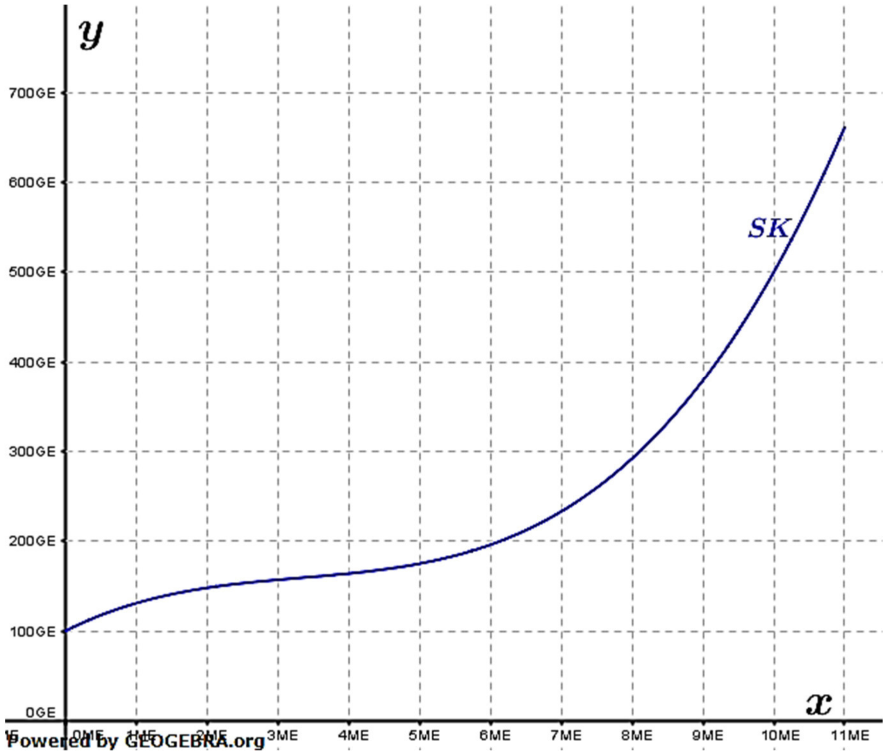
Aufgabe A4

4. Die Gesamtkosten eines Unternehmens bei der Herstellung einer Produktion werden durch die Funktion K mit

$$K(x) = x^3 - 10x^2 + 40x + 100;\ \ x \in \ [0;11]$$

beschrieben. Dabei bezeichnen x die Produktionsmenge in Mengeneinheiten (ME) und $K(x)$ die Gesamtkosten in Geldeinheiten (GE). Der Verkaufspreis beträgt $50\,GE$. Der Erlös ist das Produkt aus Verkaufspreis und Verkaufsmenge und der Gewinn ist die Differenz aus Erlös und Gesamtkosten.

Die Grafik zeigt das Schaubild SK der Funktion K.



4.1 Ermittle die Funktionsterme der Erlösfunktion E und der Gewinnfunktion G. **4P**
Prüfe, ob eine größere Produktionsmenge stets auch mit höheren Gesamtkosten verbunden ist.

4.2 Von G sind die beiden Nullstellen $x_1 = \sqrt{10}$ und $x_2 = 10$ bekannt. **4P**
Skizziere das Schaubild von G für $x \in \ [0;11]$.

Die Gewinnzone ist der Bereich, in dem die Produktionsmenge liegen muss, damit das Unternehmen keinen Verlust macht.
Bestimme die Gewinnzone.

4.3 Die Unternehmensleitung möchte wissen, für welche Produktions-Mengen die Kosten am geringsten ansteigen. Berechne diese Produktionsmenge. **2P**

Abituraufgaben BG Teil 2 bis 4 *(mit Hilfsmittel)* *Mustersatz 1*

Teil3 - Stochastik

Von zwei Aufgaben A1 und A2 ist eine Aufgabe auszuwählen und zu bearbeiten.

Aufgabe A1

1. Ein Skiort wirbt mit Schneesicherheit und seinem großen Skigebiet. Leider kommt es in diesem Gebiet auch zu Schneestürmen, dann sind die Pisten gesperrt.
Langjährige Wetteraufzeichnungen in den Bergen zeigen, dass im Monat Januar $20\,\%$ der Tage Sturmtage sind.

1.1 Berechne die Wahrscheinlichkeit für die folgenden Ereignisse: **3P**
A: „Von drei Januartagen ist genau ein Tag Sturmtag."
B: „Eine Woche im Januar hat mindestens einen Sturmtag."

1.2 Der Besitzer eines Hotels bietet folgendes Angebot für sieben Tage Halbpension im Monat Januar an: Falls der Gast mehr als zwei Sturmtage erlebt, erhält er eine Rückerstattung von $100\,€$. **4P**

Ein Gast erhält die Rückerstattung von $100\,€$. Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat er genau drei Sturmtage erlebt?

1.3 Der Hotelier plant an den Sturmtagen ein Wellnessangebot anzubieten. Um die Auslastung dieses Angebots in den nächsten zehn Jahren beurteilen zu können, schätzt er, dass es im Januar in diesem Zeitraum insgesamt 62 Sturmtage geben wird.

1.3.1 Erläutere, wie er zu diesem Wert kommen kann. **2P**

1.3.2 Das Wellnessangebot ist nicht rentabel, wenn es weniger als 50 Sturmtage in den nächsten zehn Jahren gibt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Angebot sich nicht rentiert?

1.4 Der Hotelier befragt zufällig ausgewählte Gästen nach ihrer Zufriedenheit. Von 120 befragten Gäste sind 96 zufrieden. **4P**
Bestimme ein $95\,\%$ Vertrauensintervall für den Anteil der zufriedenen Gäste.

Abituraufgaben BG Teil 2 bis 4 (mit Hilfsmittel) Mustersatz 1

Aufgabe A2

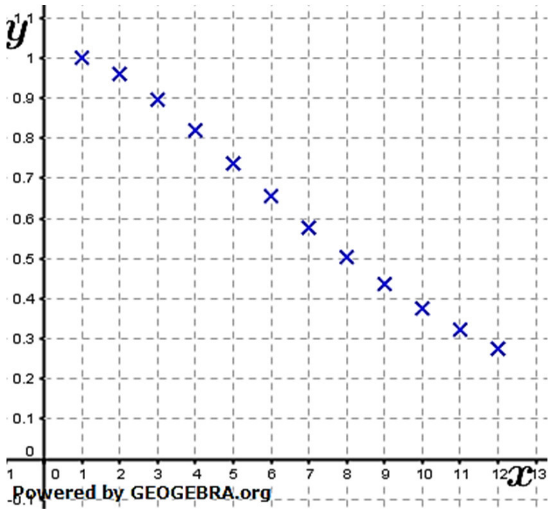
2. Ein Skiort wirbt mit Schneesicherheit und seinem großen Skigebiet. Leider kommt es in diesem Gebiet auch zu Schneestürmen, dann sind die Pisten gesperrt.
Langjährige Wetteraufzeichnungen in den Bergen zeigen, dass im Monat Januar $20\,\%$ der Tage Sturmtage sind.
Der Besitzer eines Hotels in diesem Skiort bietet folgendes Angebot für den Monat Januar:
Sieben Tage Halbpension kosten für eine Person $500\,€$. Falls während dieser sieben Tage mehr als zwei Sturmtage sind, erhält der Gast eine Rückerstattung von $100\,€$.

2.1 Anton bucht dieses Angebot. **5P**
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für die Ereignisse:
A: „Anton erlebt keinen Sturmtag."
B: „Anton kann nur in den ersten drei und den letzten zwei Tagen Ski fahren."
C: „Eine Woche im Januar hat mindestens einen Sturmtag."
D: „Anton erlebt mindestens zwei Sturmtage".

2.2 Da das Angebot nicht die erhoffte Nachfrage zeigt, möchte der Hotelier die Rückerstattung erhöhen. Prüfen Sie, ob der Hotelier die Rückerstattung auf $200\,€$ anheben kann, wenn er mindestens $460\,€$ pro Gast einnehmen will. **5P**

2.3 Anton plant seinen nächsten Skiurlaub im gleichen Skigebiet. **5P**
Er stellt sich die folgende Frage: "Wie viele Tage im Januar darf ich maximal buchen, wenn ich mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens $60\,\%$ nicht mehr als einen Sturmtag erleben will?"

Im nachfolgenden Schaubild liegen die dargestellten Punkte auf der Kurve mit der Gleichung $y = 0{,}8^x + x \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8^{x-1}$.



Interpretiere das Schaubild und beantworte Antons Frage.

Abituraufgaben BG Teil 2 bis 4 (mit Hilfsmittel) Mustersatz 1

Teil4 – Vektorgeometrie / Matrizen und Prozesse

Aufgabe A1 Vektorgeometrie

Aufgabe ist zu bearbeiten, wenn Wahlgebiet „Vektorgeometrie" im Unterricht behandelt.

1. Gegeben sind die Punkte $A(2|0|1)$, $B(-1|2|1)$, $C(1|5|4)$ und $D(3|0|5)$.

1.1 Zeige, dass das Dreieck ABC rechtwinklig ist. **3P**

1.2 Die Punkte A, B, C und D sind die Eckpunkte einer Pyramide. **4P**
Zeichne die Pyramide in ein räumliches Koordinatensystem.
Beschreibe die besondere Lage der Punkte A und D im Koodinatensystem.

1.3 Die Punkte A, B und C liegen in der Ebene E. **8P**
Gib die Koordinatenform von E an.
Prüfe, ob der Punkt $P'(-5{,}5|-8|14)$ der Spiegelpunkt von $P(6{,}5|10|-12)$ bezüglich der Ebene E ist.

Aufgabe A1 Matrizen und Prozesse

Aufgabe ist zu bearbeiten, wenn Wahlgebiet „Matrizen und Prozesse" im Unterricht behandelt.

1.1 Drei Energieversorger A, B und C konkurieren in einer Gemeinde um 2800 Haushalte. Werbeaktionen veranlassen am Jahresende viele Verbraucher, den Energieversorger zu wechseln. **4P**
Von A wechseln $50\,\%$ zu B und $10\,\%$ zu C.
Von B wechseln $20\,\%$ zu A und $10\,\%$ zu C.
Von C wechseln $10\,\%$ zu A und $50\,\%$ zu B.
Die übrigen bleiben bei ihrem Versorger. Im Jahr 2014 sind 1000 Haushalte bei A und 1000 bei B, die übrigen bei C.
Gib die Übergangsmatrix an. Berechne, wie viele Haushalte von den einzelnen Energieversorgern im Jahr 2015 beliefert werden.

1.2 In der Nachbargemeinde sind ebenfalls die Anbieter A und B sowie ein weiterer Anbieter D am Markt. Das Wechselverhalten der Haushalte wird mit folgender Tabelle beschrieben:

A	B	D
0,3	0,2	u
0,5	0,6	v
0,2	0,2	w

1.2.1 Angenommen, u hat den Wert $0{,}1$. Welche Werte für v und w sind dann möglich? **4P**

Nimm Stellung zur Behauptung: Die Kunden von B zeigen mehr Kundentreue als die von A.

1.2.2 Bestimme u, v und w, sodass sich die Anteile der Haushalte bei den Anbietern A, B und D von einem Jahr zum anderen nicht ändern, wobei sich die Anteile von A, B und D wie $1:3:1$ verhalten. **7P**

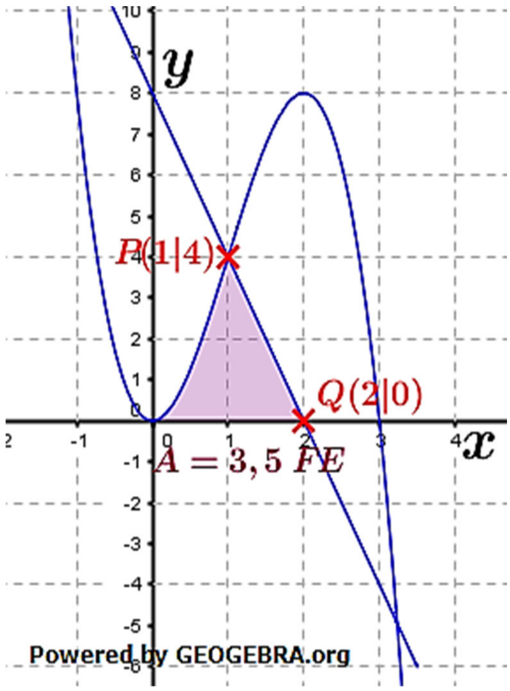
Abituraufgaben BG Teil 2 bis 4 (mit Hilfsmittel) *Mustersatz 1*

Teil2 - Analysis / Anwendungsorientierte Analysis

Lösung A1

1.1 Nur Abbildung **C** ist das Schaubild der Funktion f mit $f(x) = -2x^2(x-3)$.
f hat in $x_0 = 0$ eine doppelte Nullstelle und in $x_1 = 3$ eine einfache Nullstelle.
Dies trifft nur für Schaubild **C** zu.
Schaubild **A** hat in $x_0 = 0$ eine einfache und in $x_1 = 3$ eine doppelte Nullstelle.
Schaubild **B** hat in $x_0 = 0$ eine doppelte und in $x_1 = -3$ eine einfache Nullstelle.
Die korrekte Skalierung der y-Achse ist in untenstehender Grafik eingetragen.

C



1.2 $A = \int_0^3 (-2x^2(x-3))\,dx = \int_0^3 (-2x^3 + 6x^2)\,dx$

$= \left[-\frac{1}{2}x^4 + 2x^3\right]_0^3 = -\frac{81}{2} + 54 - 0$

$= 13{,}5\,FE$

1.3 $A = \int_0^1 f(x)\,dx + \int_1^2 (-4x+8)\,dx$

$= \left[-\frac{1}{2}x^4 + 2x^3\right]_0^1 + [-2x^2 + 8x]_1^2$

$= -\frac{1}{2} + 2 - 8 + 16 - (-2+8)$

$= 3{,}5\,FE$

1.4

1.4.1 $g''(3) < 0$:
Die Aussage ist falsch, g hat in $x_0 = 3$ einen Tiefpunkt, somit ist $g''(3) > 0$.

1.4.2 Vorzeichenwechsel von g' bei $x = 1$ von $+$ nach $-$:
Die Aussage ist richtig, g hat in $x = 1$ einen Hochpunkt.

1.4.3 g' hat in $x = 2$ einen Hochpunkt:
Die Aussage ist falsch. g hat in $x = 2$ eine Wendestelle mit negativer Steigung, somit hat g' dort einen Tiefpunkt.

1.4.4 Momentane und durchschnittliche Änderungsrate:
Die Aussage ist richtig. Die momentane Änderungsrate in $x = 3$ ist Null, die durchschnittliche Änderungsrate im Intervall $[1;2]$ ist negativ.

Lösung A2

2.1 Trigonometrische Funktion der Messergebnisse:
Die Messergebnisse können entweder mit einer Sinusfunktion ($f(x) = a\sin(b(x-c)) + d$) oder aber auch mit einer Kosinusfunktion ($f(x) = a\cos(b(x-c)) + d$)dargestellt werden.
Hierzu berechnen wir zunächst Amplitude, Verschiebung in y-Richtung sowie den Periodenfaktor b, wobei die Periode die Länge eines Jahres mit 360 Tagen sei.

$a = \frac{y_{HP} - y_{TP}}{2} = \frac{16{,}5 - 8}{2} = 4{,}25$ $\qquad$ $d = \frac{y_{HP} + y_{TP}}{2} = \frac{16{,}5 + 8}{2} = 12{,}25$

$b = \frac{2\pi}{p} = \frac{2\pi}{365}$

Jetzt erfolgt die Überlegung, ob Sinus- oder Kosinusfunktion. Bei 365 Tagen pro Jahr kommt der 16. Juni etwa bei 172 Tage ab dem 1. Januar zu liegen. Dies ist ein Hochpunkt.

Der Beginn einer Sinuskurve wäre somit bei $172 - \frac{p}{4} = 172 - 91 = 81$. Eine Sinuskurve wäre also 81 Tage in x-Richtung nach rechts verschoben. Die Funktionsgleichung würde lauten:

$$f(x) = 4{,}25 \cdot sin\left(\frac{2\pi}{365}(x - 81)\right) + 12{,}25.$$

Alternativ die Kosinusfunktion: Wegen des Hochpunktes bei 172 Tagen wäre 2eine Kosinuskurve entweder um 165 Tage in x-Richtung nach rechts verschoben, oder aber eine an der x-Achse gespiegelte Kosinuskurve um 11 Tage nach links verschoben. Die Funktionsgleichung würde lauten:

$$f(x) = 4{,}25 \cdot cos\left(\frac{2\pi}{365}(x - 172)\right) + 12{,}25$$

alternativ

$$f(x) = -4{,}25 \cdot cos\left(\frac{2\pi}{365}(x + 11)\right) + 12{,}25$$

2.2 Die quadratische Näherung von Tina ist zur Modellierung ungeeignet, da eine Parabel nur eine Extremstelle und keine Wendestellen besitzt. Die Funktion beschreibt die Punktemenge nicht so gut, wie man am Bestimmtheitsgrad $r^2 = 0{,}8745$ erkennen kann.

Toms Näherung beschreibt die Punktemessung besser, da das Bestimmtheitsmaß sehr nahe bei 1 liegt.

Da sich die Sonnenscheindauer als Differenz zwischen Sonnenaufgang und Sinnenuntergang ergibt, ist diese für jedes Jahr gleich.

Toms Näherungsfunktion mit der Definitionsmenge $[0; 365]$ ist für jedes Jahr geeignet.

Lösung A3

3.1 $v(t) = -70e^{-0{,}313t} + 70$

$\frac{100\frac{km}{h}}{3{,}6\frac{km \cdot s}{m \cdot h}} = 27{,}78\frac{m}{s}$

$-70e^{-0{,}313t} + 70 = 27{,}78$	|	$-70; :(-70)$
$e^{-0{,}313t} = 0{,}60314$	|	ln
$-0{,}313t = \ln(0{,}60314)$	|	$:(-0{,}313)$

$t = \frac{\ln(0{,}60314)}{-0{,}313} = 1{,}61535$

Nach etwa $1{,}6$ Sekunden hat das Fahrzeug eine Geschwindigkeit von $100\ km/h$ erreicht.

Abituraufgaben BG Teil 2 bis 4 (mit Hilfsmittel) Mustersatz 1

3.2 $\overline{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{1}{8{,}75}\int_0^{8{,}75}(-70e^{-0{,}313t} + 70)\,dt = \frac{1}{8{,}75}\left[\frac{-70e^{-0{,}313t}}{-0{,}313} + 70t\right]_0^{8{,}75}$

$= \frac{1}{87{,}75} \cdot 403{,}3168 = 46{,}09$

Das Fahrzeug hatte eine Durchschnittsgeschwindigkeit von etwa $46\frac{m}{s}$.

Die zurückgelegte Strecke ist mit etwa $403{,}3\,m$ bereits berechnet, denn die Fläche unter dem Graphen der Geschwindigkeit in einem bestimmten Intervall ist gleich der zurückgelegten Strecke.

Das Fahrzeug hat eine Strecke von etwa $403\,m$ *in* $8{,}75\,s$ *zurückgelegt.*

Lösung A4

4.1 $E(x) = 50x$

$G(x) = E(x) - K(x) = -x^3 + 10x^2 + 10x - 100;\ \ x \in [0; 11]$

Größere Produktionsmenge mit höheren Gesamtkosten:

$K'(x) = 3x^2 - 20x + 40$

$3x^2 - 20x + 40 = 0 \qquad | \quad :3$

$x^2 - \frac{20}{3}x + \frac{40}{3} = 0$

$x_{1,2} = \frac{10}{3} \pm \sqrt{\frac{100}{9} - \frac{120}{9}} \qquad | \quad p/q$-Formel

$\mathbb{L} = \{\}$

Die Funktion besitzt keine Extremstellen.

Für $x \longrightarrow \infty$ verläuft $K(x) \longrightarrow \infty$. Je größer die Produktionsmenge, umso höher sind die Gesamtkosten.

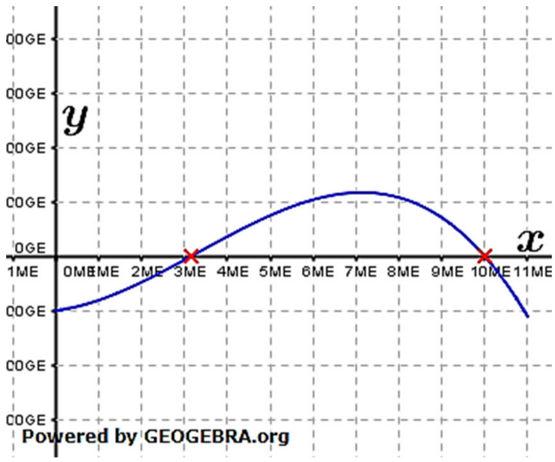
4.2 Grafik links.

Gewinnzone:

Die Gewinnzone ist der Bereich, in dem nebenstehende Grafik oberhalb der x-Achse verläuft.

Somit:

Gewinnzone in $=]\sqrt{10}; 10[$.



4.3 Der geringste Anstieg der Produktionskosten ist im Wendepunkt des Graphen von K, somit $f''(x) = 0$.

$K'(x) = 3x^2 - 20x + 40 \qquad | \quad$ siehe Aufgabenteil 4.1

$K''(x) = 6x - 20$

$6x - 20 = 0 \Longrightarrow\ \ x = \frac{10}{3}$

Bei einer Produktion von $\frac{10}{3}\,ME$ *ist der Anstieg der Produktionskosten am niedrigsten.*

Abituraufgaben BG Teil 2 bis 4 (mit Hilfsmittel) Mustersatz 1

Teil3 - Stochastik

Lösung A1

1. Die Angabe „dass im Monat Januar $20\,\%$ der Tage Sturmtage sind" bedeutet, dass die Wahrscheinlichkeit für einen Sturmtag $p = 0{,}2$ ist.

1.1 A: „Von drei Januartagen ist genau ein Tag Sturmtag."
Stichprobenumfang ist $n = 3$, die Zufallsvariabel $X = 1$ für einen Sturmtag.
$P(A) = \binom{3}{1} \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8^2 = 3 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8^2 = 0{,}384$
B: „Eine Woche im Januar hat mindestens einen Sturmtag."
Stichprobenumfang ist $n = 7$, die Zufallsvariabel $X \geq 1$ für mindestens einen Sturmtag.
Es sei $\overline{B}$ das Gegenereignis von B, dann gilt:
$P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 1 - \binom{7}{0} \cdot 0{,}2^0 \cdot 0{,}8^7 = 1 - 1 \cdot 0{,}8^7 \approx 0{,}79$

1.2 Es handelt sich um eine bedingte Wahrscheinlichkeit.
C: „Der Gast erhält eine Rückerstattung wegen mehr als zwei Sturmtagen."
D: „Der Gast erlebt genau drei Sturmtage."
Damit ist
E: Der Gast erlebt genau drei Sturmtage unter der Bedingung (Voraussetzung) dass er eine Rückerstattung erhalten hat.
$P(E) = P_C(D) = \frac{P(C\cap D)}{P(C)}$
Es sei $\overline{C}$ das Gegenereignis von C mit $\overline{C}$: „weniger als drei Sturmtage", dann gilt:
$P(C) = 1 - P(\overline{C})$
$= 1 - \left(\binom{7}{0} \cdot 0{,}2^0 \cdot 0{,}8^7 + \binom{7}{1} \cdot 0{,}2^1 \cdot 0{,}8^6 + \binom{7}{2} \cdot 0{,}2^2 \cdot 0{,}8^6\right) \approx 0{,}148$
$P(D) = \binom{7}{3} \cdot 0{,}2^3 \cdot 0{,}8^4 \approx 0{,}115$
Da $P(C)$ und $P(D)$ nur den Wert $0{,}115$ gemeinsam haben, ist $P(C \cap D) = 0{,}115$.
$P_C(D) = \frac{P(C\cap D)}{P(C)} = \frac{0{,}115}{0{,}148} \approx 0{,}775$
Der Gast hat mit einer Wahrscheinlichkeit von etwa $77{,}5\,\%$ genau drei Sturmtage erlebt, falls er eine Rückerstattung erhalten hat.

1.3.1 Der Hotelier geht von einer Bernoullikette aus mit der „Trefferwahrscheinlichkeit" $p = 0{,}2$ für Sturmtag im Januar und dem Stichprobenumfang von $n = 310$ Sturmtagen im Januar in den nächsten 10 Jahren. Der Mittelwert ist damit:
$\mu = n \cdot p = 310 \cdot 0{,}2 = 62$

1.3.2 Es handelt sich um eine Bernoullikette
$B_{310;0,2}(X \leq 49) = \sum_{i=0}^{49} \binom{310}{i} \cdot 0{,}2^i \cdot 0{,}8^{310-i} \approx 0{,}0352$

1.4 $95\,\%$ Konfidenzintervall bezüglich 96 zufriedenen Gästen von 120 Gästen:
$h = \frac{96}{120} = 0{,}8$
$\left[0{,}8 - 1{,}96 \cdot \frac{\sqrt{0{,}8 \cdot 0{,}2}}{\sqrt{120}}; 0{,}8 + 1{,}96 \cdot \frac{\sqrt{0{,}8 \cdot 0{,}2}}{\sqrt{120}}\right] = [0{,}728; 0{,}872]$

Abituraufgaben BG Teil 2 bis 4 (mit Hilfsmittel) Mustersatz 1

Lösung A2

2. Die Angabe „dass im Monat Januar $20\,\%$ der Tage Sturmtage sind“ bedeutet, dass die Wahrscheinlichkeit für einen Sturmtag $p = 0{,}2$ ist.

2.1 $P(A) = \binom{7}{0} \cdot 0{,}2^0 \cdot 0{,}8^7 = 1 \cdot 1 \cdot 0{,}8^7 \approx 0{,}21$

$P(B) = 0{,}8^3 \cdot 0{,}2^2 \cdot 0{,}8^2 \approx 0{,}0131$

Es sei $\overline{C}$ "höchstens ein Sturmtag“ das Gegenereignis von C, dann gilt:

$P(C) = 1 - P(\overline{C}) = 1 - \left(\binom{7}{0} \cdot 0{,}2^0 \cdot 0{,}8^7 + \binom{7}{1} \cdot 0{,}2^1 \cdot 0{,}8^6\right) \approx 1 - 0{,}577 \approx 0{,}423$

2.2 Gesucht wird der Erwartungswert.

Der Hotelier verdient $500\,€$ pro Gast, wenn höchstens zwei Sturmtage pro Woche auftreten, ansonsten verdient er nur $300\,€$ pro Gast.

Berechnung für $P(X = 500\,€)$

$P(X = 500) = \binom{7}{0} \cdot 0{,}2^0 \cdot 0{,}8^7 + \binom{7}{1} \cdot 0{,}2^1 \cdot 0{,}8^6 + \binom{7}{2} \cdot 0{,}2^2 \cdot 0{,}8^5 = \approx 0{,}852$

Da in der Wahrscheinlichkeitsrechnung die Summe aller möglichen Ereignisse stets 1 ist, gilt somit für $P(X = 300) = 1 - P(X = 500) = 0{,}148$.

$E(X) = \sum_{i=1}^{n} X_i \cdot P(X_i) = 500 \cdot 0{,}852 + 300 \cdot 0{,}148 = 470{,}4 > 460$

Da der Erwartungswert mit $470{,}4\,€$ größer ist als die vom Hotelier gesetzte Untergrenze von $460\,€$, kann der Hotelier die Rückerstattung erhöhen.

2.3 Im Schaubild wird die Wahrscheinlichkeit dargestellt, nach x Urlaubstagen höchstens einen Sturmtag zu erleben, denn die gegebene Gleichung ist nichts anderes als die Auflösung der Bernoulliformel

$B_{x;0,2}(X \leq 1) = \binom{x}{0} \cdot 0{,}2^0 \cdot 0{,}8^x + \binom{x}{1} \cdot 0{,}2^1 \cdot 0{,}85^{x-1} = 0{,}8^x + x \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8^{x-1}$

Anton darf für seinen nächsten Skiurlaub höchstens sechs Urlaubstage buchen.

Abituraufgaben BG Teil 2 bis 4 (mit Hilfsmittel) Mustersatz 1

Teil4 – Vektorgeometrie / Matrizen und Prozesse

Lösung A1 Vektorgeometrie

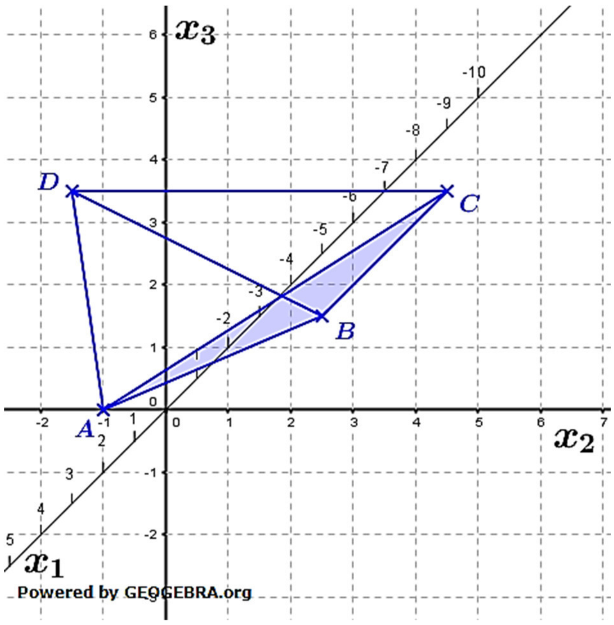
1.1 Das Dreieck ABC ist rechtwinklig, wenn das Skalarprodukt zweier Seitenvektoren den Wert Null hat. Hierzu benötigen wir zunächst alle Seitenvektoren.

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -1-2 \\ 2-0 \\ 1-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 4-2 \\ 5-0 \\ 1-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 1-(-1) \\ 5-2 \\ 4-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = -6+6+0 = 0$$

Wegen $\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{BC} = 0$ ist das Dreieck bei Punkt B rechtwinklig.

1.2 Zeichnung siehe Grafik links.
Besondere Lage von A und D:
Die x_2-Koordinate der beiden Punkte ist 0, also liegen beide Punkte in der x_1x_3-Ebene.



1.3 Koordinatenform der Ebene E:

$$k \cdot \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = k \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ -13 \end{pmatrix}$$

$6x_1 + 9x_2 - 13x_3 = d$

$6 \cdot 2 + 9 \cdot 0 - 13 \cdot 1 = d$

$12 - 13 = -1$

$E\colon\ 6x_1 + 9x_2 - 13x_3 = -1$

Spiegelpunkt P':

P' ist Spiegelpunkt von P sofern gilt:

1. $\overrightarrow{PP'} = k \cdot \overrightarrow{n_e}$
2. $\overrightarrow{OQ}$ mit $\frac{1}{2} \cdot \left(\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OP'}\right) \in E$

$\overrightarrow{PP'} = \begin{pmatrix} -5{,}5 - 6{,}5 \\ -8 - 10 \\ 14 - (-12) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 \\ -18 \\ 26 \end{pmatrix} = -2 \cdot \overrightarrow{n_E}$ | Die erste Bedingung ist erfüllt.

$\overrightarrow{OQ} = \frac{1}{2} \cdot \left(\begin{pmatrix} 6{,}5 \\ 10 \\ -12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5{,}5 \\ -8 \\ 14 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$6 \cdot 0{,}5 + 9 \cdot 1 - 13 \cdot 1 \stackrel{?}{=} -1$ | Punktprobe von Q in E

$-1 = -1$ | Die zweite Bedingung ist erfüllt.

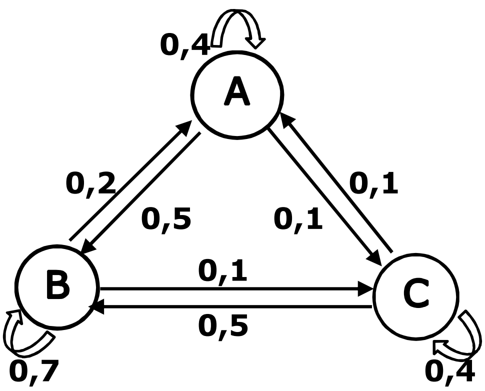
P' ist Spiegelpunkt zu P bezüglich der Ebene E.

Lösung A2 Matrizen und Prozesse

1.1 *Übergangsmatrix*

Die Übergangsmatrix lautet (vgl. Diagramm):

$\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}2 & 0{,}1 \\ 0{,}5 & 0{,}7 & 0{,}5 \\ 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}4 \end{pmatrix}$



Verteilung der Haushalte im Jahr 2015

Stand 2014: 1000 Haushalte bei Versorger A
1000 Haushalte bei Versorger B
800 Haushalte bei Versorger C
Summe: 2800

Mit der Übergangsmatrix $\boldsymbol{M}$ gilt für die Verteilung der Haushalte im Jahr 2015:

$$\begin{pmatrix} A_{2015} \\ B_{2015} \\ C_{2015} \end{pmatrix} = \boldsymbol{M} \cdot \begin{pmatrix} A_{2014} \\ B_{2014} \\ C_{2014} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}2 & 0{,}1 \\ 0{,}5 & 0{,}7 & 0{,}5 \\ 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1000 \\ 1000 \\ 800 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1000 \cdot 0{,}4 & 1000 \cdot 0{,}2 & 800 \cdot 0{,}1 \\ 1000 \cdot 0{,}5 & 1000 \cdot 0{,}7 & 800 \cdot 0{,}5 \\ 1000 \cdot 0{,}1 & 1000 \cdot 0{,}1 & 800 \cdot 0{,}4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 680 \\ 1600 \\ 520 \end{pmatrix}$$

Im Jahr 2015 beliefert Versorger A 680 Haushalte, Versorger B beliefert 1600 Haushalte und Versorger C beliefert 520 Haushalte.

1.2.1 *Mögliche Werte der Übergangsmatrix*

Die Summe der Elemente der Spaltenvektoren muss gleich 1 sein $(100\,\%)$, somit muss gelten:

$u + v + w = 1$

Mit $u = 0{,}1$ folgt $v + w = 0{,}9$

$\Rightarrow$ v und w können jeweils Werte zwischen 0 und $0{,}9$ annehmen, Es gilt aber immer $v = 0{,}9 - w$ bzw. $w = 0{,}9 - v$.

Beurteilung der Kundentreue

In der Diagonalen der Übergangsmatrix (bzw. der Tabelle) stehen die Wahrscheinlichkeiten, dass ein Haushalt im kommenden Jahr bei seinem Energieversorger bleibt.

Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Haushalt bei seinem Energieversorger A bleibt, liegt bei $30\,\%$, bei Versorger B liegt die Wahrscheinlichkeit bei $60\,\%$. Die Kunden von Versorger B bleiben also mit einer höheren Wahrscheinlichkeit bei ihrem Versorger als die Kunden vom Versorger A.

$\Rightarrow$ *Die Behauptung kann als richtig angenommen werden.*

1.2.2 Gleichbleibende Verteilung der Haushalte

Die Anteile der Haushalte sollen sich verhalten wie $1:3:1$, d. h., in einem Jahr gilt: $A_1 = x;\ B_1 = 3x;\ D = x$.

Mithilfe der Übergangsmatrix werden die Anteile für das nächste Jahr berechnet:

$$\begin{pmatrix} A_2 \\ B_2 \\ D_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}2 & u \\ 0{,}5 & 0{,}6 & v \\ 0{,}2 & 0{,}2 & w \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \\ D_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 \cdot 0{,}3 & B_1 \cdot 0{,}2 & D_1 \cdot u \\ A_1 \cdot 0{,}5 & B_1 \cdot 0{,}6 & D_1 \cdot v \\ A_1 \cdot 0{,}2 & B_1 \cdot 0{,}2 & D_1 \cdot w \end{pmatrix}$$

Die Anteile sollen sich aber nicht ändern, d. h., es soll gelten $A_1 = A_2$, $B_1 = B_2$ und $D_1 = D_2$. Damit und mit $A_1 = x$, $B_1 = 3x$ und $C_1 = x$ ergeben sich drei Gleichungen:

$x = x \cdot 0{,}3 + 3x \cdot 0{,}2 + x \cdot u \;\Rightarrow\; 0{,}1x = x \cdot u \;\Rightarrow\; u = 0{,}1$

$3x = x \cdot 0{,}5 + 3x \cdot 0{,}6 + x \cdot v \;\Rightarrow\; 0{,}7x = x \cdot v \;\Rightarrow\; v = 0{,}7$

$x = x \cdot 0{,}2 + x \cdot 0{,}2 + x \cdot w \;\Rightarrow\; 0{,}2x = x \cdot w \;\Rightarrow\; w = 0{,}2$

$u + v + w = 0{,}1 + 0{,}7 + 0{,}2 = 1$