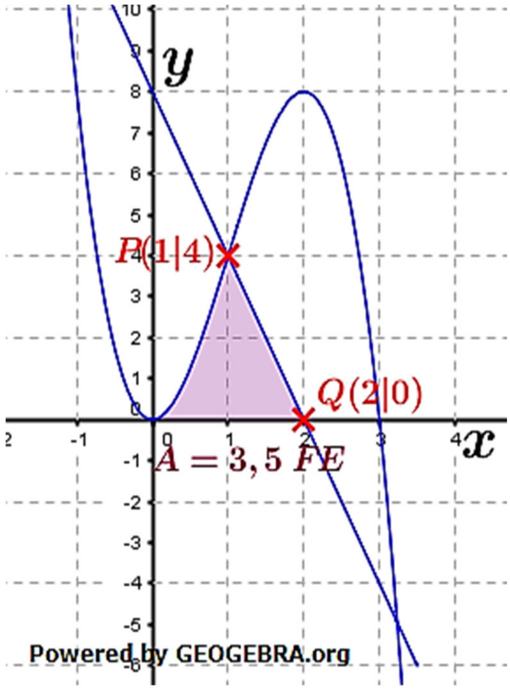
Abituraufgaben BG Teil 2 bis 4 (mit Hilfsmittel) Mustersatz 1

Teil2 - Analysis / Anwendungsorientierte Analysis

Lösung A1

1.1 Nur Abbildung **C** ist das Schaubild der Funktion f mit $f(x) = -2x^2(x-3)$.
f hat in $x_0 = 0$ eine doppelte Nullstelle und in $x_1 = 3$ eine einfache Nullstelle.
Dies trifft nur für Schaubild **C** zu.
Schaubild **A** hat in $x_0 = 0$ eine einfache und in $x_1 = 3$ eine doppelte Nullstelle.
Schaubild **B** hat in $x_0 = 0$ eine doppelte und in $x_1 = -3$ eine einfache Nullstelle.
Die korrekte Skalierung der y-Achse ist in untenstehender Grafik eingetragen.

C



1.2 $A = \int_0^3 (-2x^2(x-3))\,dx = \int_0^3 (-2x^3 + 6x^2)\,dx$
$= \left[-\frac{1}{2}x^4 + 2x^3\right]_0^3 = -\frac{81}{2} + 54 - 0$
$= 13{,}5\ FE$

1.3 $A = \int_0^1 f(x)\,dx + \int_1^2 (-4x+8)\,dx$
$= \left[-\frac{1}{2}x^4 + 2x^3\right]_0^1 + [-2x^2 + 8x]_1^2$
$= -\frac{1}{2} + 2 - 8 + 16 - (-2+8)$
$= 3{,}5\ FE$

1.4

1.4.1 $g''(3) < 0$:
Die Aussage ist falsch, g hat in $x_0 = 3$ einen Tiefpunkt, somit ist $g''(3) > 0$.

1.4.2 Vorzeichenwechsel von g' bei $x = 1$ von $+$ nach $-$:
Die Aussage ist richtig, g hat in $x = 1$ einen Hochpunkt.

1.4.3 g' hat in $x = 2$ einen Hochpunkt:
Die Aussage ist falsch. g hat in $x = 2$ eine Wendestelle mit negativer Steigung, somit hat g' dort einen Tiefpunkt.

1.4.4 Momentane und durchschnittliche Änderungsrate:
Die Aussage ist richtig. Die momentane Änderungsrate in $x = 3$ ist Null, die durchschnittliche Änderungsrate im Intervall $[1;2]$ ist negativ.

Lösung A2

2.1 Trigonometrische Funktion der Messergebnisse:
Die Messergebnisse können entweder mit einer Sinusfunktion ($f(x) = a\sin(b(x-c)) + d$) oder aber auch mit einer Kosinusfunktion ($f(x) = a\cos(b(x-c)) + d$)dargestellt werden.
Hierzu berechnen wir zunächst Amplitude, Verschiebung in y-Richtung sowie den Periodenfaktor b, wobei die Periode die Länge eines Jahres mit 360 Tagen sei.

$a = \frac{y_{HP} - y_{TP}}{2} = \frac{16{,}5-8}{2} = 4{,}25$ $\qquad$ $d = \frac{y_{HP} + y_{TP}}{2} = \frac{16{,}5+8}{2} = 12{,}25$

$b = \frac{2\pi}{p} = \frac{2\pi}{365}$

Jetzt erfolgt die Überlegung, ob Sinus- oder Kosinusfunktion. Bei 365 Tagen pro Jahr kommt der 16. Juni etwa bei 172 Tage ab dem 1. Januar zu liegen. Dies ist ein Hochpunkt.

Der Beginn einer Sinuskurve wäre somit bei $172 - \frac{p}{4} = 172 - 91 = 81$. Eine Sinuskurve wäre also 81 Tage in x-Richtung nach rechts verschoben. Die Funktionsgleichung würde lauten:

$$f(x) = 4{,}25 \cdot sin\left(\frac{2\pi}{365}(x-81)\right) + 12{,}25.$$

Alternativ die Kosinusfunktion: Wegen des Hochpunktes bei 172 Tagen wäre 2eine Kosinuskurve entweder um 165 Tage in x-Richtung nach rechts verschoben, oder aber eine an der x-Achse gespiegelte Kosinuskurve um 11 Tage nach links verschoben. Die Funktionsgleichung würde lauten:

$$f(x) = 4{,}25 \cdot cos\left(\frac{2\pi}{365}(x-172)\right) + 12{,}25$$

alternativ

$$f(x) = -4{,}25 \cdot cos\left(\frac{2\pi}{365}(x+11)\right) + 12{,}25$$

2.2 Die quadratische Näherung von Tina ist zur Modellierung ungeeignet, da eine Parabel nur eine Extremstelle und keine Wendestellen besitzt. Die Funktion beschreibt die Punktemenge nicht so gut, wie man am Bestimmtheitsgrad $r^2 = 0{,}8745$ erkennen kann.

Toms Näherung beschreibt die Punktemessung besser, da das Bestimmtheitsmaß sehr nahe bei 1 liegt.

Da sich die Sonnenscheindauer als Differenz zwischen Sonnenaufgang und Sinnenuntergang ergibt, ist diese für jedes Jahr gleich.

Toms Näherungsfunktion mit der Definitionsmenge $[0; 365]$ ist für jedes Jahr geeignet.

Lösung A3

3.1 $v(t) = -70e^{-0{,}313t} + 70$

$\frac{100\frac{km}{h}}{3{,}6\frac{km \cdot s}{m \cdot h}} = 27{,}78\frac{m}{s}$

$-70e^{-0{,}313t} + 70 = 27{,}78 \quad | \quad -70; :(-70)$

$e^{-0{,}313t} = 0{,}60314 \quad | \quad ln$

$-0{,}313t = \ln(0{,}60314) \quad | \quad :(-0{,}313)$

$t = \frac{\ln(0{,}60314)}{-0{,}313} = 1{,}61535$

Nach etwa $1{,}6$ Sekunden hat das Fahrzeug eine Geschwindigkeit von $100\ km/h$ erreicht.

3.2 $\overline{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{1}{8{,}75}\int_0^{8{,}75}(-70e^{-0{,}313t} + 70)\,dt = \frac{1}{8{,}75}\left[\frac{-70e^{-0{,}313t}}{-0{,}313} + 70t\right]_0^{8{,}75}$

$= \frac{1}{87{,}75} \cdot 403{,}3168 = 46{,}09$

Das Fahrzeug hatte eine Durchschnittsgeschwindigkeit von etwa $46\frac{m}{s}$.

Die zurückgelegte Strecke ist mit etwa $403{,}3\,m$ bereits berechnet, denn die Fläche unter dem Graphen der Geschwindigkeit in einem bestimmten Intervall ist gleich der zurückgelegten Strecke.

Das Fahrzeug hat eine Strecke von etwa $403\,m$ in $8{,}75\,s$ zurückgelegt.

Lösung A4

4.1 $E(x) = 50x$

$G(x) = E(x) - K(x) = -x^3 + 10x^2 + 10x - 100;\ \ x \in [0; 11]$

Größere Produktionsmenge mit höheren Gesamtkosten:

$K'(x) = 3x^2 - 20x + 40$

$3x^2 - 20x + 40 = 0 \qquad | \quad :3$

$x^2 - \frac{20}{3}x + \frac{40}{3} = 0$

$x_{1,2} = \frac{10}{3} \pm \sqrt{\frac{100}{9} - \frac{120}{9}} \qquad | \quad p/q$-Formel

$\mathbb{L} = \{\}$

Die Funktion besitzt keine Extremstellen.

Für $x \longrightarrow \infty$ verläuft $K(x) \longrightarrow \infty$. Je größer die Produktionsmenge, umso höher sind die Gesamtkosten.

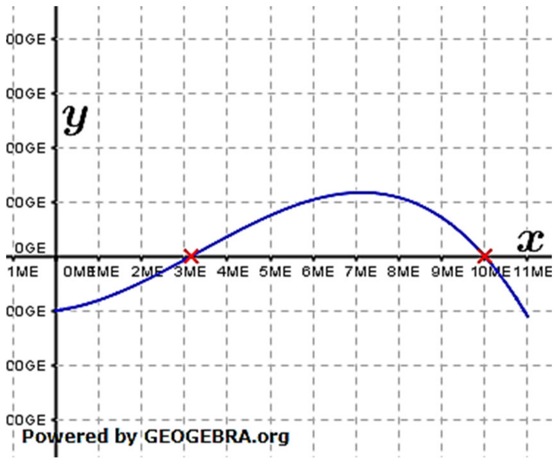
4.2 Grafik links.

Gewinnzone:

Die Gewinnzone ist der Bereich, in dem nebenstehende Grafik oberhalb der x-Achse verläuft.

Somit:

Gewinnzone in $=]\sqrt{10}; 10[$.



4.3 Der geringste Anstieg der Produktionskosten ist im Wendepunkt des Graphen von K, somit $f''(x) = 0$.

$K'(x) = 3x^2 - 20x + 40 \qquad | \quad$ siehe Aufgabenteil 4.1

$K''(x) = 6x - 20$

$6x - 20 = 0 \Longrightarrow\ \ x = \frac{10}{3}$

Bei einer Produktion von $\frac{10}{3}\,ME$ ist der Anstieg der Produktionskosten am niedrigsten.

Abituraufgaben BG Teil 2 bis 4 *(mit Hilfsmittel)* *Mustersatz 1*

Teil3 - Stochastik

Lösung A1

1. Die Angabe „dass im Monat Januar $20\,\%$ der Tage Sturmtage sind" bedeutet, dass die Wahrscheinlichkeit für einen Sturmtag $p = 0{,}2$ ist.

1.1 A: „Von drei Januartagen ist genau ein Tag Sturmtag."
Stichprobenumfang ist $n = 3$, die Zufallsvariabel $X = 1$ für einen Sturmtag.
$P(A) = \binom{3}{1} \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8^2 = 3 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8^2 = 0{,}384$
B: „Eine Woche im Januar hat mindestens einen Sturmtag."
Stichprobenumfang ist $n = 7$, die Zufallsvariabel $X \geq 1$ für mindestens einen Sturmtag.
Es sei $\overline{B}$ das Gegenereignis von B, dann gilt:
$P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 1 - \binom{7}{0} \cdot 0{,}2^0 \cdot 0{,}8^7 = 1 - 1 \cdot 0{,}8^7 \approx 0{,}79$

1.2 Es handelt sich um eine bedingte Wahrscheinlichkeit.
C: „Der Gast erhält eine Rückerstattung wegen mehr als zwei Sturmtagen."
D: „Der Gast erlebt genau drei Sturmtage."
Damit ist
E: Der Gast erlebt genau drei Sturmtage unter der Bedingung (Voraussetzung) dass er eine Rückerstattung erhalten hat.
$P(E) = P_C(D) = \frac{P(C \cap D)}{P(C)}$
Es sei $\overline{C}$ das Gegenereignis von C mit $\overline{C}$: „weniger als drei Sturmtage", dann gilt:
$$P(C) = 1 - P(\overline{C})$$
$$= 1 - \left(\binom{7}{0} \cdot 0{,}2^0 \cdot 0{,}8^7 + \binom{7}{1} \cdot 0{,}2^1 \cdot 0{,}8^6 + \binom{7}{2} \cdot 0{,}2^2 \cdot 0{,}8^6\right) \approx 0{,}148$$
$P(D) = \binom{7}{3} \cdot 0{,}2^3 \cdot 0{,}8^4 \approx 0{,}115$
Da $P(C)$ und $P(D)$ nur den Wert $0{,}115$ gemeinsam haben, ist $P(C \cap D) = 0{,}115$.
$P_C(D) = \frac{P(C \cap D)}{P(C)} = \frac{0{,}115}{0{,}148} \approx 0{,}775$
Der Gast hat mit einer Wahrscheinlichkeit von etwa $77{,}5\,\%$ genau drei Sturmtage erlebt, falls er eine Rückerstattung erhalten hat.

1.3.1 Der Hotelier geht von einer Bernoullikette aus mit der „Trefferwahrscheinlichkeit" $p = 0{,}2$ für Sturmtag im Januar und dem Stichprobenumfang von $n = 310$ Sturmtagen im Januar in den nächsten 10 Jahren. Der Mittelwert ist damit:
$\mu = n \cdot p = 310 \cdot 0{,}2 = 62$

1.3.2 Es handelt sich um eine Bernoullikette
$B_{310;0,2}(X \leq 49) = \sum_{i=0}^{49} \binom{310}{i} \cdot 0{,}2^i \cdot 0{,}8^{310-i} \approx 0{,}0352$

1.4 $95\,\%$ Konfidenzintervall bezüglich 96 zufriedenen Gästen von 120 Gästen:
$h = \frac{96}{120} = 0{,}8$
$\left[0{,}8 - 1{,}96 \cdot \frac{\sqrt{0{,}8 \cdot 0{,}2}}{\sqrt{120}}; 0{,}8 + 1{,}96 \cdot \frac{\sqrt{0{,}8 \cdot 0{,}2}}{\sqrt{120}}\right] = [0{,}728; 0{,}872]$

Lösung A2

2. Die Angabe „dass im Monat Januar $20\,\%$ der Tage Sturmtage sind" bedeutet, dass die Wahrscheinlichkeit für einen Sturmtag $p = 0{,}2$ ist.

2.1 $P(A) = \binom{7}{0} \cdot 0{,}2^0 \cdot 0{,}8^7 = 1 \cdot 1 \cdot 0{,}8^7 \approx 0{,}21$

$P(B) = 0{,}8^3 \cdot 0{,}2^2 \cdot 0{,}8^2 \approx 0{,}0131$

Es sei $\overline{C}$ "höchstens ein Sturmtag" das Gegenereignis von C, dann gilt:

$P(C) = 1 - P(\overline{C}) = 1 - \left(\binom{7}{0} \cdot 0{,}2^0 \cdot 0{,}8^7 + \binom{7}{1} \cdot 0{,}2^1 \cdot 0{,}8^6\right) \approx 1 - 0{,}577 \approx 0{,}423$

2.2 Gesucht wird der Erwartungswert.

Der Hotelier verdient $500\,€$ pro Gast, wenn höchstens zwei Sturmtage pro Woche auftreten, ansonsten verdient er nur $300\,€$ pro Gast.

Berechnung für $P(X = 500\,€)$

$P(X = 500) = \binom{7}{0} \cdot 0{,}2^0 \cdot 0{,}8^7 + \binom{7}{1} \cdot 0{,}2^1 \cdot 0{,}8^6 + \binom{7}{2} \cdot 0{,}2^2 \cdot 0{,}8^5 =\approx 0{,}852$

Da in der Wahrscheinlichkeitsrechnung die Summe aller möglichen Ereignisse stets 1 ist, gilt somit für $P(X = 300) = 1 - P(X = 500) = 0{,}148$.

$E(X) = \sum_{i=1}^{n} X_i \cdot P(X_i) = 500 \cdot 0{,}852 + 300 \cdot 0{,}148 = 470{,}4 > 460$

Da der Erwartungswert mit $470{,}4\,€$ größer ist als die vom Hotelier gesetzte Untergrenze von $460\,€$, kann der Hotelier die Rückerstattung erhöhen.

2.3 Im Schaubild wird die Wahrscheinlichkeit dargestellt, nach x Urlaubstagen höchstens einen Sturmtag zu erleben, denn die gegebene Gleichung ist nichts anderes als die Auflösung der Bernoulliformel

$B_{x;0,2}(X \leq 1) = \binom{x}{0} \cdot 0{,}2^0 \cdot 0{,}8^x + \binom{x}{1} \cdot 0{,}2^1 \cdot 0{,}85^{x-1} = 0{,}8^x + x \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8^{x-1}$

Anton darf für seinen nächsten Skiurlaub höchstens sechs Urlaubstage buchen.

Abituraufgaben BG Teil 2 bis 4 (mit Hilfsmittel) Mustersatz 1

Teil4 – Vektorgeometrie / Matrizen und Prozesse

Lösung A1 Vektorgeometrie

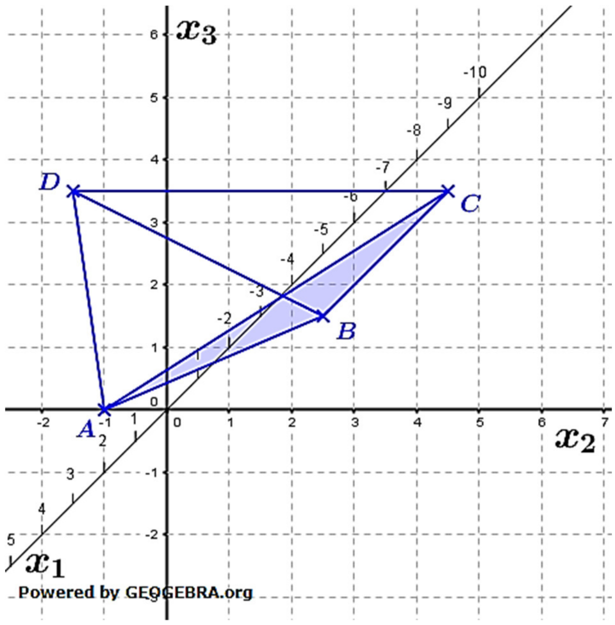
1.1 Das Dreieck ABC ist rechtwinklig, wenn das Skalarprodukt zweier Seitenvektoren den Wert Null hat. Hierzu benötigen wir zunächst alle Seitenvektoren.

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -1-2 \\ 2-0 \\ 1-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 4-2 \\ 5-0 \\ 1-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 1-(-1) \\ 5-2 \\ 4-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = -6+6+0 = 0$$

Wegen $\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{BC} = 0$ ist das Dreieck bei Punkt B rechtwinklig.

1.2 Zeichnung siehe Grafik links.
Besondere Lage von A und D:
Die x_2-Koordinate der beiden Punkte ist 0, also liegen beide Punkte in der x_1x_3-Ebene.



1.3 Koordinatenform der Ebene E:

$$k \cdot \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = k \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ -13 \end{pmatrix}$$

$6x_1 + 9x_2 - 13x_3 = d$

$6 \cdot 2 + 9 \cdot 0 - 13 \cdot 1 = d$

$12 - 13 = -1$

$E\colon\ 6x_1 + 9x_2 - 13x_3 = -1$

Spiegelpunkt P':
P' ist Spiegelpunkt von P sofern gilt:
1. $\overrightarrow{PP'} = k \cdot \overrightarrow{n_e}$
2. $\overrightarrow{OQ}$ mit $\frac{1}{2} \cdot \left(\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OP'}\right) \in E$

$\overrightarrow{PP'} = \begin{pmatrix} -5{,}5 - 6{,}5 \\ -8 - 10 \\ 14 - (-12) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 \\ -18 \\ 26 \end{pmatrix} = -2 \cdot \overrightarrow{n_E}$ | Die erste Bedingung ist erfüllt.

$\overrightarrow{OQ} = \frac{1}{2} \cdot \left(\begin{pmatrix} 6{,}5 \\ 10 \\ -12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5{,}5 \\ -8 \\ 14 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$6 \cdot 0{,}5 + 9 \cdot 1 - 13 \cdot 1 \stackrel{?}{=} -1$ | Punktprobe von Q in E
$-1 = -1$ | Die zweite Bedingung ist erfüllt.

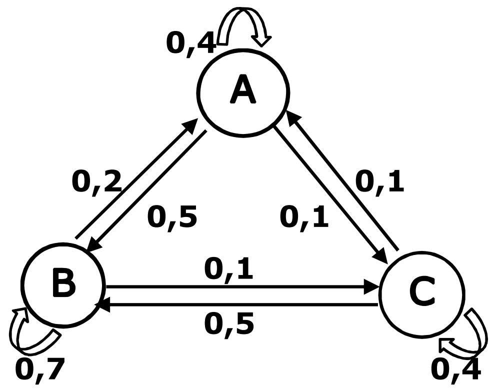
P' ist Spiegelpunkt zu P bezüglich der Ebene E.

Lösung A2 Matrizen und Prozesse

1.1 *Übergangsmatrix*

Die Übergangsmatrix lautet (vgl. Diagramm):

$$\boldsymbol{M} = \begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}2 & 0{,}1 \\ 0{,}5 & 0{,}7 & 0{,}5 \\ 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}4 \end{pmatrix}$$



Verteilung der Haushalte im Jahr 2015

Stand 2014: 1000 Haushalte bei Versorger A
1000 Haushalte bei Versorger B
800 Haushalte bei Versorger C
Summe: 2800

Mit der Übergangsmatrix $\boldsymbol{M}$ gilt für die Verteilung der Haushalte im Jahr 2015:

$$\begin{pmatrix} A_{2015} \\ B_{2015} \\ C_{2015} \end{pmatrix} = \boldsymbol{M} \cdot \begin{pmatrix} A_{2014} \\ B_{2014} \\ C_{2014} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}2 & 0{,}1 \\ 0{,}5 & 0{,}7 & 0{,}5 \\ 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1000 \\ 1000 \\ 800 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1000 \cdot 0{,}4 & 1000 \cdot 0{,}2 & 800 \cdot 0{,}1 \\ 1000 \cdot 0{,}5 & 1000 \cdot 0{,}7 & 800 \cdot 0{,}5 \\ 1000 \cdot 0{,}1 & 1000 \cdot 0{,}1 & 800 \cdot 0{,}4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 680 \\ 1600 \\ 520 \end{pmatrix}$$

Im Jahr 2015 beliefert Versorger A 680 Haushalte, Versorger B beliefert 1600 Haushalte und Versorger C beliefert 520 Haushalte.

1.2.1 *Mögliche Werte der Übergangsmatrix*

Die Summe der Elemente der Spaltenvektoren muss gleich 1 sein ($100\,\%$), somit muss gelten:
$u + v + w = 1$
Mit $u = 0{,}1$ folgt $v + w = 0{,}9$

$\Rightarrow$ v und w können jeweils Werte zwischen 0 und $0{,}9$ annehmen, Es gilt aber immer $v = 0{,}9 - w$ bzw. $w = 0{,}9 - v$.

Beurteilung der Kundentreue

In der Diagonalen der Übergangsmatrix (bzw. der Tabelle) stehen die Wahrscheinlichkeiten, dass ein Haushalt im kommenden Jahr bei seinem Energieversorger bleibt.

Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Haushalt bei seinem Energieversorger A bleibt, liegt bei $30\,\%$, bei Versorger B liegt die Wahrscheinlichkeit bei $60\,\%$. Die Kunden von Versorger B bleiben also mit einer höheren Wahrscheinlichkeit bei ihrem Versorger als die Kunden vom Versorger A.

$\Rightarrow$ *Die Behauptung kann als richtig angenommen werden.*

1.2.2 Gleichbleibende Verteilung der Haushalte

Die Anteile der Haushalte sollen sich verhalten wie $1{:}3{:}1$, d. h., in einem Jahr gilt: $A_1 = x;\ B_1 = 3x;\ D = x$.

Mithilfe der Übergangsmatrix werden die Anteile für das nächste Jahr berechnet:

$$\begin{pmatrix} A_2 \\ B_2 \\ D_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}2 & u \\ 0{,}5 & 0{,}6 & v \\ 0{,}2 & 0{,}2 & w \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \\ D_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 \cdot 0{,}3 & B_1 \cdot 0{,}2 & D_1 \cdot u \\ A_1 \cdot 0{,}5 & B_1 \cdot 0{,}6 & D_1 \cdot v \\ A_1 \cdot 0{,}2 & B_1 \cdot 0{,}2 & D_1 \cdot w \end{pmatrix}$$

Die Anteile sollen sich aber nicht ändern, d. h., es soll gelten $A_1 = A_2$, $B_1 = B_2$ und $D_1 = D_2$. Damit und mit $A_1 = x$, $B_1 = 3x$ und $C_1 = x$ ergeben sich drei Gleichungen:

$x = x \cdot 0{,}3 + 3x \cdot 0{,}2 + x \cdot u \ \Rightarrow\ 0{,}1x = x \cdot u \ \Rightarrow\ u = 0{,}1$

$3x = x \cdot 0{,}5 + 3x \cdot 0{,}6 + x \cdot v \ \Rightarrow\ 0{,}7x = x \cdot v \ \Rightarrow\ v = 0{,}7$

$x = x \cdot 0{,}2 + x \cdot 0{,}2 + x \cdot w \ \Rightarrow\ 0{,}2x = x \cdot w \ \Rightarrow\ w = 0{,}2$

$u + v + w = 0{,}1 + 0{,}7 + 0{,}2 = 1$