Abituraufgaben BG Teil 2 bis 4 *(mit Hilfsmittel)* Mustersatz 7

Teil2 - Analysis / Anwendungsorientierte Analysis

Die Aufgabe A1 ist zu bearbeiten.

Aufgabe A1

1.1 Gegeben ist die Funktion s mit $s(x) = \frac{1}{2}x + 1 + 2\sin\left(\frac{\pi}{4}x\right);\ x \in \mathbb{R}$.
Das Schaubild von s ist C.

1.1.1 Zeichne C für $-2 \le x \le 6$. **6P**
Untersuche, welche Werte die Steigung von C annehmen kann.

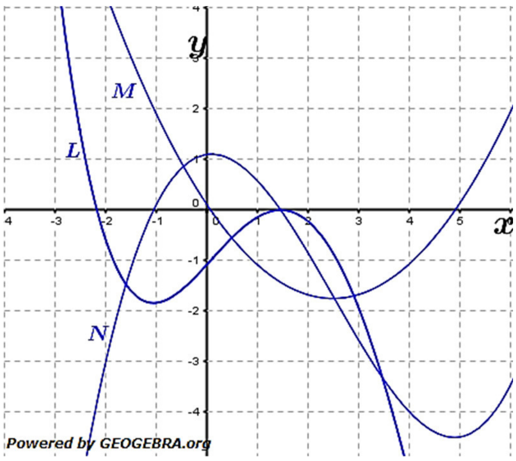
1.1.2 Weise nach, dass die Gerade g mit der Gleichung $y = 0{,}5x - 1$ **3P**
Das Schaubild C an den Stellen $x_1 = -2$ und $x_2 = 6$ berührt.

1.1.3 C und g begrenzen für $-2 \le x \le 6$ eine Fläche. **3P**
Berechne deren Inhalt.

1.2 Die Abbildung zeigt einen Ausschnitt der Schaubilder einer Funktion h, ihrer Ableitungsfunktion h' und einer Stammfunktion H von h.

1.2.1 Ordne die Schaubilder den Funktionen h, h' und H zu und begründe deine Entscheidung. **3P**

1.2.2 Das Schaubild N und die x-Achse begrenzen eine Fläche, die oberhalb der x-Achse liegt. **2P**
Bestimme näherungsweise deren Inhalt.



1.3 G ist das Schaubild von f mit $f(x) = 1 - e^{-x};\ x \in \mathbb{R}$. **3P**
$\overline{G}$ entsteht durch Spiegelung von G an der y-Achse. Zeige, dass sich G und $\overline{G}$ senkrecht schneiden.

Aufgabe A2

2. Die Monatsmittelwerte der Lufttemperatur in München sind in der Tabelle aufgelistet.

Monat	Jan	Feb	Mär	Apr	Mai	Jun	Jul	Aug	Sep	Okt	Nov	Dez
Mittlere Temperatur in $°C$	$-2{,}1$	$-0{,}9$	$3{,}3$	$8{,}0$	$12{,}5$	$15{,}8$	$17{,}5$	$16{,}6$	$13{,}4$	$7{,}9$	$3{,}0$	$-0{,}7$

2.1 Der Temperaturverlauf soll durch eine Funktion g mit **4P**

$$g(x) = a\sin(b(x+c)) + d;\ \ x \in \ [0;12]$$

angenähert werden, wobei die Temperaturen der Monatsmitte zuzuordnen sind (z.B. $g(0{,}5) = -2{,}1$).
Welche Bedeutung haben die Konstanten a und d für den Temperaturverlauf in München während des Jahres?
Bestimme die Konstanten a, b, c und d.

2.2 Die Lufttemperatur in $°C$ in München während eines Tages kann näherungsweise beschrieben werden durch die Funktion f mit

$$f(x) = 9{,}7\sin\left(\frac{\pi}{12}(x-9{,}4)\right) + 14{,}8;\ \ x \in \ [0;24].$$

2.2.1 Formuliere einen Ansatz zur Berechnung der mittleren Lufttemperatur von 4 Uhr bis 9 Uhr morgens. **2P**

2.2.2 Um wieviel Uhr nimmt die Temperatur in München an diesem Tag am stärksten zu? **4P**

Aufgabe A3

3. Der Bestand an fester Holzmasse $h(t)$ zum Zeitpunkt t in einem Wald wird durch die Funktion h mit $h(t) = 10^5 \cdot e^{0{,}02t};\ \ t \geq \ 0$ beschrieben.
Dabei wird die Zeit t in Jahren und der Bestand $h(t)$ in m^3 gemessen.
($t = 0$ steht für das Jahr 2013)

3.1 Mit welchem Bestand wird im Jahr 2020 gerechnet? Nach welcher Zeit wird der Bestand erstmals über $150\,000\ m^3$ liegen? **3P**

3.2 Um wie viel Prozent nimmt der Holzbestand im Verlaufe des ersten Jahres zu? **1P**

3.3 Nach wie vielen Jahren wird die momentane Änderungsrate $2500\ m^3$ pro Jahr betragen? **3P**

3.4 Um eine Fragestellung zu beantworten, wählt Tom den Ansatz **3P**

$$\frac{1}{4}\int_3^7 h'(t)\,dt.$$

Timo hingegen will mit der Berechnung von $\frac{1}{4}\int_3^7 h(7) - h(3)\,dt$ die Frage lösen.
Notiere eine passende Fragestellung und bewerte die beiden Ansätze.

Aufgabe A4

4. Zwei Ingenieure planen den Bau eines Wasserkanals. In Ihrer Modellrechnung setzen sie für den Kanalquerschnitt ein $x-y$-Koordinatensystem so an, dass die x-Achse genau auf der Höhe des normalen Wasserstandes (Normalpegel) verläuft. Eine Längeneinheit entspricht einem Meter.

Unterhalb des Normalpegels wird die Randkurve des Kanalquerschnitts durch die Funktion f mit $f(x) = 0{,}0125x^4 - 3{,}2$ beschrieben.

4.1 Stelle den gesamten Kanalquerschnitt in einem Koordinaten-System dar. **3P**

4.2 Oberhalb des Normalpegels wird die Begrenzung des Kanals tangential Fortgeführt. Diese geradlinigen Fortführungen sind für einen $1{,}80$ Meter über Normalpegel liegenden Wasserstand ausgelegt. **3P**
Berechne die Breite des Kanals in Höhe des Pegelstandes.

4.3 Die Ingenieure gehen von einer Strömungsgeschwindigkeit von $1{,}3\,\frac{m}{s}$ aus. Wie viel Kubikmeter Wasser fließen pro Sekunde bei Normalpegel durch den Kanalquerschnitt? **4P**

Teil 3 - Stochastik

Aufgabe A1

1. Ein Großhändler bezieht Energiesparlampen von drei unterschiedlichen Herstellern A, B und C, die baugleiche Lampen herstellen. Diese Lampen verpackt er unabhängig vom Hersteller in einer einheitlichen Verpackung und verkauft sie dann weiter.
Nach umfangreichen Prüfzyklen stellt sich heraus, dass $4\,\%$ der Energiesparlampen von Hersteller A, $7\,\%$ der Lampen von B und $10\,\%$ der Lampen von C schon nach 300 Brennstundern deutlich weniger hell leuchten. Zur Vereinfachung werden diese Lampen „Mondlampen" genannt.
Der Großhändler beliefert regelmäßig einen Supermarkt mit Energiesparlampen: $50\,\%$ der Lampen stammen von Hersteller A, $30\,\%$ von B und $20\,\%$ von C.

1.1 Ein Kunde kauft eine zufällig ausgewählte Lampe aus dem Supermarkt. **3P**
Berechne die Wahrscheinlichkeiten dafür, dass die gekaufte Lampe eine Mondlampe ist.
Berechne die Wahrscheinlichkeiten dafür, dass die gekaufte Lampe keine Mondlampe ist und nicht von Hersteller C stammt.

1.2 Der Kunde stellt nach 300 Betriebsstunden fest, dass seine im Supermarkt gekaufte Lampe eine Mondlampe ist. Berechne die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Mondlampe von Hersteller A stammt. **3P**

1.3 Ein Kunde kauft 50 Lampen von Hersteller A. Berechne die Wahrscheinlichkeit dafür, dass **6P**
E: höchstens 3 Mondlampen darunter sind;
F: genau 2 Mondlampen darunter sind;
G: mindestens 1 und höchstens 4 Mondlampen darunter sind.

1.4 Bestimme die Wahrscheinlichkeit, dass mehr als die erwartete Anzahl von Mondlampen darunter sind, wenn die Lampen alle aus einer Lieferung des Herstellers B stammen. **3P**

Aufgabe A2

2. Ein Jahrmarktbudenbesitzer bietet das Glücksspiel „Entenangeln" an. Bei diesem Spiel angelt man drei Gummi-Enten ohne Zurücklegen aus der Wanne mit 100 Gummi-Enten. Die Enten unterscheiden sich nur durch eine farbige Markierung auf ihrer Unterseite, die der Spieler beim Angeln nicht erkennen kann.
Laut Veranstalter ist die Markierung der Enten wie in folgender Tabelle:

Markierung	Rot	Blau	Grün	Gelb	Golden
Anzahl	50	30	15	4	1

2.1 Berechne die Wahrscheinlichkeit der folgenden Ereignisse für ein Spiel: **5P**
A: Es wird keine Ente mit roter Markierung gezogen.
B: Es werden 3 gleichmarkierte Enten gezogen.
C: Jede der Farben rot, blau, grün kommt einmal vor.

2.2 Zeige, dass die Wahrscheinlichkeit, die golden markierte Ente zu Angeln, im ersten Zug genauso groß wie im zweiten bzw. dritten Zug ist. **3P**

2.3 Je nach Farbe der Markierung erhält der Spieler Punkte, die anschließend addiert und gegen den Preis eingetauscht werden können. Für jede rot markierte Ente erhält der Spieler 10 Punkte, für jede blaue 20 Punkte, grün 50 Punkte, gelb 100 Punkte und für die golden markierte Ente gibt es 500 Punkte.
Wie viele Punkte kann ein Spieler beim Angeln der ersten Ente im Mittel erwarten? **3P**

2.4 Marina hat viele Spiele beobachtet, in denen sich unter den jeweils drei gezogenen Enten niemals die golden markierte Ente befand. **4P**
Sie sagt: „Ich bin mir sicher, dass die golden markierte Ente nicht in der Wanne ist, denn ich habe so viele Spiele beobachtet, dass diese Ente mit mehr als 80% Wahrscheinlichkeit in mindestens einem Spiel hätte gezogen werden müssen.“
Wie viele Spiele hat Marina mindestens beobachtet?

Teil4 – Vektorgeometrie / Matrizen und Prozesse

Aufgabe A1

Aufgabe ist zu bearbeiten, wenn Wahlgebiet „Vektorgeometrie“ im Unterricht behandelt.

1.1 Ermittle die Lagebeziehung der Ebenen und der Geraden g: **5P**

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 8 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 8 \end{pmatrix};\ r, s \in \mathbb{R};\quad g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix};\ t\ \mathbb{R}.$$

1.2 Die Punkte $A(4|0|0)$, $B(0|4|0)$ und $C(0|0|8)$ sind die Eckpunkte eines Dreiecks. **5P**
Zeige, dass es sich um ein gleichschenkliges Dreieck handelt und berechne die Größe des Winkels ACB.

1.3 Ermittle die Koordinaten eines Punktes D, der das Dreieck zu einer Raute ergänzt. **5P**
In die Raute soll ein möglichst großer Kreis einbeschrieben werden. Ermittle den Radius des Kreises.

Aufgabe A1 (nicht für TG)

Aufgabe ist zu bearbeiten, wenn Wahlgebiet „Matrizen und Prozesse“ im Unterricht behandelt.

1. Ein Reisebüro pflegt eine Datei mit Adressen von langjährigen Stammkunden. Dabei wird unterschieden zwischen den Kunden, die im abgelaufenen Jahr genau einen Urlaub bei dem Reisebüro gebucht haben (Kundengruppe E), Kunden, die im abgelaufenen Jahr mehr als einen Urlaub bei dem Reisebüro gebucht haben (Kundengruppe M), und Kunden, die im abgelaufenen Jahr keinen Urlaub bei dem Reisebüro gebucht haben (Kundengruppe K).
Das folgende jährliche Wechselverhalten der Kunden ist zu beobachten:
$10\ \%$ der Kunden aus Gruppe E werden zu Kunden der Gruppe M
$15\ \%$ der Kunden aus Gruppe E werden zu Kunden der Gruppe K
$20\ \%$ der Kunden aus Gruppe M werden zu Kunden der Gruppe E
$20\ \%$ der Kunden aus Gruppe M werden zu Kunden der Gruppe K
$57\ \%$ der Kunden aus Gruppe K werden zu Kunden der Gruppe E
$28\ \%$ der Kunden aus Gruppe K werden zu Kunden der Gruppe M

1.1 Gib eine stochastische Übergangsmatrix an, die dieses Verhalten beschreibt. **3P**

1.2 Vervollständige $\boldsymbol{A^2} = \begin{pmatrix} 0{,}668 & \dots & 0{,}569 \\ 0{,}177 & 0{,}436 & \dots \\ 0{,}155 & \dots & 0{,}164 \end{pmatrix}$ und interpretiere den Eintrag in der dritten Zeile und ersten Spalte sowie den Eintrag in der zweiten Zeile und zweiten Spalte. **5P**

Aufgrund einer Änderung des Buchungsverhaltens gilt nun die folgende Übergangsmatrix:

$$\boldsymbol{A}^* = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 & q \\ 0{,}1 & 0{,}6 & 0{,}95 - q \\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}05 \end{pmatrix} \text{ mit } 0 \le q \le 0{,}95$$

Im Jahr 2016 gehören 3100 Kunden zur Gruppe E, 1300 Kunden zur Gruppe M und 600 Kunden zur Gruppe K.

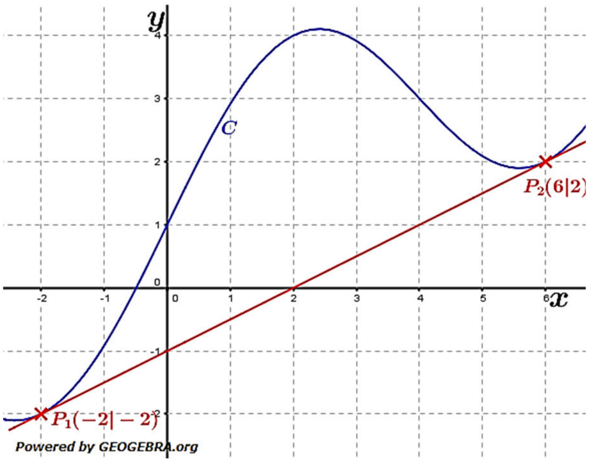
1.3 Zeige, dass diese Verteilung für $q = 0{,}6$ stabil ist. **2P**

1.4 Ermittle den Wert von q für den Fall, dass sich im Jahr 2017 herausstellt, dass 1342 Kunden in diesem Jahr mehr als einen Urlaub gebucht haben. Gib die Verteilung für 2017 an. **5P**

Abituraufgaben BG Teil 2 bis 4 (mit Hilfsmittel) Mustersatz 7

Teil2 - Analysis / Anwendungsorientierte Analysis

Lösung A1



1.1 Mögliche Werte der Steigung von s:
$s'(x) = \frac{1}{2} + \frac{8}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{4}x\right)$
Wegen $-1 \le \cos\left(\frac{\pi}{4}x\right) \le 1$ ist
$\mathbb{W}_{s'} = \{-2{,}05; 3{,}05\}$.

1.1.1 $s'(x) = 0{,}5$
$\frac{1}{2} + \frac{8}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{4}x\right) = \frac{1}{2}$
$\frac{8}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{4}x\right) = 0$
$\frac{\pi}{4}x_1 = -\frac{\pi}{2} \Longrightarrow \; x_1 = -2$
$\frac{\pi}{4}x_1 = \frac{3\pi}{2} \Longrightarrow \; x_2 = 6$
$s(-2) = -1 + 1 + 2\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -2$
$s(6) = 3 + 1 + 2\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 4 - 2 = 2$
$P_1(-2|-2)$; $P_2(6|2)$
Prüfung gegen $y = 0{,}5x - 1$:
$-2 = 0{,}5 \cdot -2 - 1 = -2$ $\qquad$ $2 = 0{,}5 \cdot 6 - 1 = 2$
Die Punkte $P_1(-2|-2)$ sowie $P_2(6|2)$ sind Berührpunkte von C und $y = 0{,}5x - 1$.

1.1.2 $A = \int_{-2}^{6}\left(\frac{1}{2}x + 1 + 2\sin\left(\frac{\pi}{4}x\right) - 0{,}5x + 1\right)dx = \int_{-2}^{6}\left(2 + 2\sin\left(\frac{\pi}{4}x\right)\right)dx$
$= \left[2x - \frac{8}{\pi}cos\left(\frac{\pi}{4}x\right)\right]_2^6 = 12 - 0 - (-4 - 0) = 16$
Die Fläche ist $16\,FE$ groß.

1.2.1 Alle drei Schaubilder sind Schaubilder ganzrationaler Funktionen. Das Schaubild M ist das Schaubild einer ganzrationalen Funktion 2. Grades (Parabel) als Funktion kleinsten Grades. Somit ist M das Schaubild der Funktion h'.
Wegen den beiden Nullstellen mit VZW von M bei $x_1 \approx 0{,}1$ und $x_2 \approx 4{,}9$ ist N das Schaubild der Funktion h, weil N bei $x_1 \approx 0{,}1$ einen Hochpunkt und bei $x_1 \approx 4{,}9$ einen Tiefpunkt hat.
Somit ist L das Schaubild der Funktion H weil L bei $x_1 \approx 0{,}1$ und bei $x_1 \approx 4{,}9$ jeweils einen Wendepunkt hat.

1.2.2 Durch Abzählen von Kästchen unter N im Intervall $I = [-1; 1{,}5]$ erhält man in etwa $1{,}8\,FE$.

1.3 $\overline{G}$:
$g(x) = f(-x) = 1 - e^{x}$
$f'(x) = e^{-x}$; $\quad g'(x) = -e^{x}$
$f(x) \cap g(x)$
$1 - e^{-x} = 1 - e^{x}$
$e^{x} = e^{-x} \Longrightarrow \; x = 0$
$f'(0) = e^{-0} = 1$; $\quad g'(0) = -e^{0} = -1$
Wegen $f'(0) \cdot g'(0) = -1$ schneiden sich G und $\overline{G}$ in $S(0|0)$ senkrecht.

Abituraufgaben BG Teil 2 bis 4 (mit Hilfsmittel) Mustersatz 7

Lösung A2

2.1 Die Konstante a bestimmt die Maximal- bzw. Minimaltemperatur in München. Sie entspricht dem Ausschlag der Temperatur nach oben bzw. unten vom Mittelwert aus gesehen. Die Konstante d stellt den jährlichen Temperatur-Mittelwert von München dar.

Aus der Tabelle ermitteln wir:

$g(x)_{max} = 17{,}5$ für $x = 6{,}5$; $\quad g(x)_{min} = -2{,}1$ für $x = 0{,}5$

$a = \frac{g(x)_{max} - g(x)_{min}}{2} = \frac{17{,}5-(-2{,}1)}{2} = 9{,}8$

$d = \frac{g(x)_{max} + g(x)_{min}}{2} = \frac{17{,}5-2{,}1}{2} = 7{,}7$

Periode $p = 12 \Longrightarrow \; b = \frac{2\pi}{p} = \frac{2\pi}{12} = \frac{\pi}{6}$

Ermittlung von c:

Die vorgegebene Funktion ist eine Sinuskurve. Der Nulldurchgang der Funktion durch die Mittellinie liegt zwischen Hoch- und Tiefpunkt in der Mitte. Die ist in unserem Falle bei $x = 3{,}5$; $\; g(3{,}5) = 8$

Punktprobe mit $P(3{,}5|8)$

$8 = 9{,}8 \sin\left(\frac{\pi}{6}(3{,}5 + c)\right) + 7{,}7$

$\frac{0{,}3}{9{,}8} = sin\left(\frac{\pi}{6}(3{,}5 + c)\right) = 0{,}0306$

$arcsin(0{,}0306) = \frac{\pi}{6}(3{,}5 + c)$

$\frac{\pi}{6}(3{,}5 + c) = 0{,}0306$

$c_1 = \frac{6 \cdot 0{,}0306}{\pi} - 3{,}5 = -3{,}44$

Mit $c_1 = -3{,}44$ ist die Sinuskurve um $3{,}44$ Einheiten nach rechts verschoben.

$g(x) = 9{,}8\, sin\left(\frac{\pi}{6}(x - 3{,}44)\right) + 7{,}7$

2.2.1 $\overline{T_{4;9}} = \frac{1}{9-4}\int_4^9 (9{,}7 \sin\left(\frac{\pi}{12}(x - 9{,}4)\right) + 14{,}8\, dx$

2.2.2 Stärkste Zunahme im Wendepunkt mit positiver Steigung. Die Sinuskurve hat die Periode $p = 24$ und ist in x-Richtung um $9{,}4$ Stunden nach rechts verschoben. An dieser Stelle befindet sich auch der Wendepunkt mit positiver Steigung.

Die stärkste Zunahme der Temperatur findet etwa um $9{:}24$ Uhr statt.

Abituraufgaben BG Teil 2 bis 4 (mit Hilfsmittel) Mustersatz 7

Lösung A3

3.1 $h(7) = 10^5 \cdot e^{0,02 \cdot 7} = 1,15027 \cdot 10^5$

Im Jahr 2020 *kann mit einem Holzbestand von etwa* $115027\, m^3$ *gerechnet werden.*

$150000 > 10^5 \cdot e^{0,02 \cdot t}$

$1,5 > e^{0,02t}$ | ln

$0,02t = ln(1,5)$

$t = \frac{ln(1,5)}{0,02} = 20,27$

Im Verlaufe des $20.$ *Jahres nach Beobachtungsbeginn wird der Bestand erstmals größer als* $150000\, m^3$ *sein.*

3.2 $h(0) = 100000; \quad h(1) = 100000 \cdot e^{0,02}$

$\frac{h(1)}{h(0)} = e^{0,02} = 1,0202$

Der Holzbestand nimmt um etwa $2,02\,\%$ im Verlauf des ersten Jahres zu.

3.3 $h'(t) = 2500$

$2500 = 0,02 \cdot 10^5 \cdot e^{0,02t}$

$1,25 = e^{0,02t}$ | ln

$0,02t = \ln(1,25)$

$t = \frac{\ln(1,25)}{0,02} = 11,157$

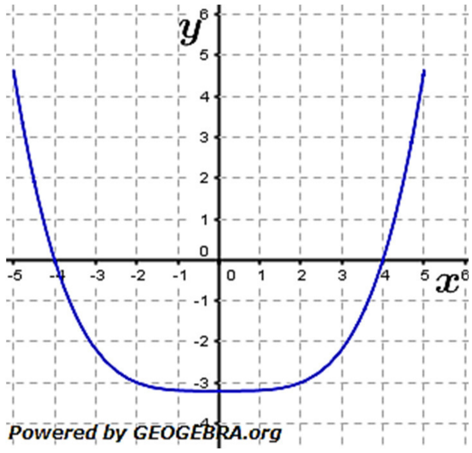
Nach ca. $11,16$ *Jahren wird die momentane Änderungsrate* $2500\, m^3$ *pro Jahr betragen.*

3.4 Fragestellung ist der mittlere Holzbestand im Zeitraum vom 3. bis 7. Jahr. Die gegebene Funktion ist die Bestandsfunktion. Somit ist die Fläche unter der Ableitungsfunktion im genannten Zeitraum die Bestandsveränderung. Die Multiplikation der Bestandsveränderung mit $\frac{1}{4}$ führt zur mittleren Bestandsveränderung vom 3. bis 7. Jahr.

Da h eine Stammfunktion von h' ist, ist der Ansatz von Timo gleichbedeutend mit dem Ansatz von Tom.

Lösung A4

4.1 Kanalquerschnitt:



4.2 Nullstellen der Randkurve sind

$x_1 = -4$ und $x_2 = 4$.

Tangente an f in $N_2(4|0)$:

$t_2(x) = f'(4) \cdot (x - 4)$

$f'(x) = 0{,}05x^3$

$f'(4) = 3{,}2$

$t_2(x) = 3{,}2 \cdot (x - 4) = 3{,}2x - 12{,}8$

Aus Symmetriegründen betrachten wir nur die rechte Seite. Für diese gilt nun:

$t_2(x) = 1{,}8 = 3{,}2x - 12{,}8$

$3{,}2x = 14{,}6$

$x = 4{,}56$

Oberkante Pegel rechts bei $1{,}8\,m$ Wasserstand ist $P(4{,}56|1{,}8)$

Die obere Gesamtbreite des Kanals ist somit $b = 2 \cdot 4{,}56 = 9{,}12\,m$.

4.3 $Q = A \cdot v$ (Fläche mal Strömungsgeschwindigkeit)

$Q = 1{,}3 \cdot |\int_{-4}^{4}(0{,}0125x^4 - 3{,}2)| = 1{,}3 \cdot |[0{,}0025x^5 - 3{,}2x]_{-4}^{4}| = 1{,}3 \cdot |(-20{,}48)|$

$Q = 26{,}624\,m^3/s$

Pro Sekunde fließen etwa $26{,}6\,m^3$ Wasser durch den Kanalquerschnitt.

Teil3 - Stochastik

Lösung A1

1.1 Es sei Mondlampe $= m$, keine Mondlampe $= \overline{m}$ dann gilt:

$p_{m_A} = 0{,}04;\ \ p_{m_B} = 0{,}07;\ \ p_{m_V} = 0{,}1;\ p_A = 0{,}5;\ \ p_B = 0{,}3;\ \ p_C = 0{,}2$

E: Gekaufte Lampe ist Mondlampe

F: Gekaufte Lampe ist keine Mondlampe und nicht von Hersteller C.

$\Omega_E = \{p_A p_{m_A}; p_B p_{m_b} p_C p_{m_C}\}$

$P(E) = 0{,}04 \cdot 0{,}5 + 0{,}07 \cdot 0{,}3 + 0{,}1 \cdot 0{,}2 = 0{,}061 = 6{,}1\,\%$

$\Omega_F = \{p_A p_{\overline{m_A}}; p_B p_{\overline{m_b}}\}$

$P(F) = 0{,}96 \cdot 0{,}5 + 0{,}93 \cdot 0{,}3 = 0{,}759 = 75{,}9\,\%$

1.2 Fragestellung der bedingten Wahrscheinlichkeit, da bekannt ist, dass die Lampe eine Mondlampe ist.

A: Lampe stammt von Hersteller A (gesuchte Wahrscheinlichkeit).

B: Lampe ist Mondlampe (Vorwissen); $P(B) = 0{,}061$

$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0{,}5 \cdot 0{,}04}{0{,}61} = 0{,}3279$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von $32{,}8\,\%$ ist die Mondlampe von Hersteller A.

Abituraufgaben BG Teil 2 bis 4 (mit Hilfsmittel) Mustersatz 7

1.3 Die Zufallsvariable X gibt die Anzahl der Mondlampen an.
Binomialverteilung (alle Lampen sind von Hersteller A) mit $n = 50$; $p = 0{,}04$.
$B_{50;0,04}(X \leq 3) = 0{,}8609 = 86{,}1\,\%$ (WTR)
$B_{50;0,04}(X = 2) = 0{,}2736 = 27{,}4\,\%$ (WTR)
$B_{50;0,04}(1 \leq X \leq 4) = B_{50;0,04}(X \leq 4) - B_{50;0,04}(X = 0) = 0{,}951 - 0{,}132 = 0{,}821$ (WTR)

1.4 Die Zufallsvariable Y gibt die Anzahl der Mondlampen an.
Binomialverteilung (alle Lampen sind von Hersteller B) mit $n = 50$; $p = 0{,}07$ und $X > \mu$ mit $\mu = n \cdot p = 50 \cdot 0{,}07 = 3{,}5$.
$B_{50;0,07}(Y \geq 4) = 1 - B_{50;0,07}(Y \leq 3) = 1 - 0{,}5327 = 0{,}4673$ (WTR)

Lösung A2

2.1 $p_r = 0{,}50$; $p_b = 0{,}3$; $p_{gr} = 0{,}15$; $p_{ge} = 0{,}04$; $p_{gold} = 0{,}01$;
A: Keine Ente mit roter Markierung
$\Omega_A = \{p_{\bar{r}} p_{\bar{r}} p_{\bar{r}}\}$
$P(A) = \frac{50}{100} \cdot \frac{49}{99} \cdot \frac{48}{98} = \frac{4}{33}$
B: Drei gleichfarbige Enten.
$\Omega_B = \{rrr; bbb; grgrgr; gegege\}$
$P(B) = \frac{50}{100} \cdot \frac{49}{99} \cdot \frac{48}{98} + \frac{30}{100} \cdot \frac{29}{99} \cdot \frac{28}{98} + \frac{15}{100} \cdot \frac{14}{99} \cdot \frac{13}{98} + \frac{4}{100} \cdot \frac{3}{99} \cdot \frac{2}{98} = 0{,}149$
$\Omega_C = \{rbgr; rgrb; grrb; grbr; brgr; bgrr\}$
$P(C) = 3! \cdot \frac{50}{100} \cdot \frac{30}{99} \cdot \frac{15}{98} = 6 \cdot \frac{50}{100} \cdot \frac{30}{99} \cdot \frac{15}{98} = 0{,}139$

2.2 $P(Gold\ 1.Zug) = \frac{50}{100}$
$P(Gold\ 2.Zug) = \frac{99}{100} \cdot \frac{1}{99} = \frac{1}{100}$
$P(Gold\ 3.Zug) = \frac{99}{100} \cdot \frac{98}{99} \cdot \frac{1}{98} = \frac{1}{100}$

2.3 Gefragt ist der Erwartungswert für die Punktanzahl für den ersten Zug.
Die Zufallsvariable X gibt die Anzahl erreichbarer Punkte an.

x_i	10	20	50	100	500
$P(X = x_i)$	$\frac{50}{100}$	$\frac{30}{100}$	$\frac{15}{100}$	$\frac{4}{100}$	$\frac{1}{100}$
$x_i \cdot P(X = x_i)$	5	6	7,5	4	5

$E(x) = \sum_{i=1}^{5} x_i \cdot P(X = x_i) = 5 + 6 + 7{,}5 + 4 + 5 = 27{,}5$
Ein Spieler kann im Durchschnitt beim ersten Angeln mit 27,5 Punkten rechnen.

2.4 Die Zufallsvariable X gibt die Anzahl der goldenen Enten an.
n=gesucht, $p = 0{,}01$ für goldene Ente und $P(X \geq 1) > 0{,}8$.

$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \left(\frac{99}{100} \cdot \frac{98}{99} \cdot \frac{97}{98}\right)^n$

$1 - \left(\frac{97}{100}\right)^n > 0{,}8$

$\left(\frac{97}{100}\right)^n < 0{,}2 \qquad | \quad ln$

$n \cdot ln(\frac{97}{100}) = ln(0{,}2)$

$n > \frac{ln(0{,}2)}{ln(\frac{97}{100})} = 52{,}8$

Marina hat mindestens 53 *Spiele beobachtet.*

Teil4 – Vektorgeometrie / Matrizen und Prozesse

Lösung A1

1.1 Koordinatengleichung von E:

$k \cdot \overrightarrow{n_E} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -6 \\ -3 \end{pmatrix} = -3 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{n_E} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$E\colon\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 = d$

$2 \cdot 3 + 2 \cdot (-3) + 8 = d \Longrightarrow \quad d = 8$

$E\colon\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 8$

$\overrightarrow{n_E} \circ \overrightarrow{rv_g} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} = 2 + 2 - 4 = 0$

E und g sind parallel.

Punktprobe mit Aufpunkt von g in Ebene E:

$2 \cdot (-1) + 2 \cdot 5 + 0 \stackrel{?}{=} 8$

$8 = 8$

Die Gerade g verläuft in E.

1.2 $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix}$

Wegen $|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{BC}| \wedge |\overrightarrow{AB}| \neq |\overrightarrow{AC}|$ ist das Dreieck ABC gleichschenklig.

$\sphericalangle_{ACB}$:

$\cos(\sphericalangle_{ACB}) = \frac{|\overrightarrow{AC} \circ \overrightarrow{BC}|}{|\overrightarrow{AC}| \cdot |\overrightarrow{BC}|} = \frac{\left|\begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix}\right|} = \frac{64}{\sqrt{16+64} \cdot \sqrt{16+64}} = \frac{64}{80}$

$\sphericalangle_{ACB} = \arccos\left(\frac{4}{5}\right) = 36{,}87\,°$

Abituraufgaben BG Teil 2 bis 4 (mit Hilfsmittel) Mustersatz 7

1.3 Punkt D für Raute:

$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{CB} = \begin{pmatrix}4\\0\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\4\\-8\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\4\\-8\end{pmatrix}$$

Wegen der Raute, ist der Mittelpunkt des Kreises identisch mit dem Mittelpunkt der Raute. Dieser liegt in der Mitte der Strecke AB.

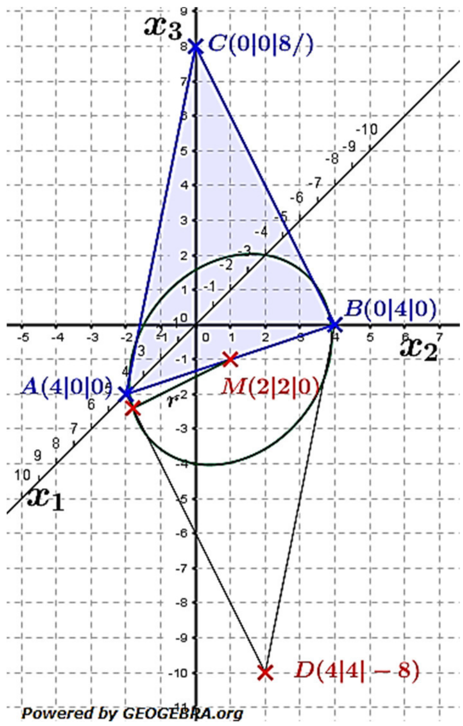
$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) = \begin{pmatrix}2\\2\\0\end{pmatrix}$$

Der Radius ist gleich dem Abstand des Punktes M zur z.B. Geraden durch A und D.

$$r = \frac{|\overrightarrow{AM} \times \overrightarrow{AD}|}{|\overrightarrow{AD}|} = \frac{\left|\begin{pmatrix}-2\\2\\0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}0\\4\\-8\end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix}0\\4\\-8\end{pmatrix}\right|} = \frac{\left|\begin{pmatrix}-16\\-16\\-8\end{pmatrix}\right|}{\sqrt{80}} = \frac{\sqrt{576}}{\sqrt{80}} = \sqrt{7{,}2}$$

$r = 2{,}68$

Der Radius des Innkreises ist $2{,}68\ LE$ groß.



Lösung A1

1.1 *Stochastische Übergangsmatrix:*

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix}0{,}75 & 0{,}2 & 0{,}57\\ 0{,}1 & 0{,}6 & 0{,}28\\ 0{,}15 & 0{,}2 & 0{,}15\end{pmatrix}$$

1.2 *Vervollständigung von $\boldsymbol{A^2}$:*

$$\begin{pmatrix}0{,}75 & 0{,}2 & 0{,}57\\ 0{,}1 & 0{,}6 & 0{,}28\\ 0{,}15 & 0{,}2 & 0{,}15\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}0{,}75 & 0{,}2 & 0{,}57\\ 0{,}1 & 0{,}6 & 0{,}28\\ 0{,}15 & 0{,}2 & 0{,}15\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0{,}668 & 0{,}384 & 0{,}569\\ 0{,}177 & 0{,}436 & 0{,}267\\ 0{,}155 & 0{,}18 & 0{,}164\end{pmatrix}$$

Beispiel für die Berechnung der Spalte zwei von $\boldsymbol{A^2}$:

$$a_{12}^2 = (0{,}75 \quad 0{,}2 \quad 0{,}57) \cdot \begin{pmatrix}0{,}2\\0{,}6\\0{,}2\end{pmatrix} = 0{,}75 \cdot 0{,}2 + 0{,}2 \cdot 0{,}6 + 0{,}57 \cdot 0{,}2 = 0{,}384$$

$$a_{22}^2 = (0{,}1 \quad 0{,}6 \quad 0{,}28) \cdot \begin{pmatrix}0{,}2\\0{,}6\\0{,}2\end{pmatrix} = 0{,}1 \cdot 0{,}2 + 0{,}6 \cdot 0{,}6 + 0{,}28 \cdot 0{,}2 = 0{,}436$$

$$a_{32}^2 = 1 - a_{12}^2 - a_{32}^2 = 1 - 0{,}384 - 0{,}436 = 0{,}18$$

Interpretation:
Dritte Zeile erste Spalte: $0{,}155$
$15{,}5\,\%$ der Kunden, die heute in Gruppe E sind, gehören in zwei Jahren zur Gruppe K.
Zweite Zeile zweite Spalte: $0{,}436$
$43{,}6\,\%$ der Kunden, die heute in Gruppe M sind, gehören in zwei Jahren wieder zur Gruppe M.

1.3 Für $q = 0{,}6$ erhalten wir: $\boldsymbol{A}^* = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 & 0{,}6 \\ 0{,}1 & 0{,}6 & 0{,}35 \\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}05 \end{pmatrix}$

Für eine stabile Verteilung gilt: $\boldsymbol{A}^* \cdot \vec{x} = \vec{x}$ mit $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3100 \\ 1300 \\ 600 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 & 0{,}6 \\ 0{,}1 & 0{,}6 & 0{,}35 \\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}05 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3100 \\ 1300 \\ 600 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3100 \\ 1300 \\ 600 \end{pmatrix}$$

Auf den rechnerischen Nachweis wird hier verzichtet.

1.4 Aus dem Aufgabentext lesen wir ab:

$$\vec{x}_{2016} = \begin{pmatrix} 3100 \\ 1300 \\ 600 \end{pmatrix}; \quad \vec{x}_{2017} = \begin{pmatrix} x \\ 1342 \\ z \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}^* \cdot \vec{x}_{2016} = \vec{x}_{2017}$$

$$\begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 & q \\ 0{,}1 & 0{,}6 & 0{,}95 - q \\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}05 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3100 \\ 1300 \\ 600 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 1342 \\ z \end{pmatrix}$$

Die Multiplikation von Zeile zwei mit $\vec{x}_{2016}$ ergibt:

$$0{,}1 \cdot 3100 + 0{,}6 \cdot 1300 + (0{,}95 - q) \cdot 600 = 1342$$

$$-600q + 1660 = 1342$$

$$q = 0{,}53$$

Verteilung für 2017:

$$\begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}2 & 0{,}53 \\ 0{,}1 & 0{,}6 & 0{,}42 \\ 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}05 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3100 \\ 1300 \\ 600 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3058 \\ 1342 \\ 600 \end{pmatrix}$$

Hinweis zur Berechnung von Zeile 3 Spalte 1 des Ergebnisvektors:

$$z = 5000 - x - y = 5000 - 3058 - 1342 = 600$$