Lösung P6/2004

Lösungslogik

Das Volumen der Kugel ist gegeben. Wir benötigen somit das Volumen des Zylinders, um den Volumenunterschied zu berechnen.
Berechnung des Radius r der Kugel und des Zylinders über das gegebene Kugelvolumen mithilfe der Volumenformel der Kugel.
Berechnung der Oberfläche der Kugel über die Oberflächenformel.
Gleichsetzung der Oberfläche der Kugel mit der Mantelfläche des Zylinders.
Berechnen der Höhe des Zylinders über die Mantelfläche.
Berechnung des Volumens des Zylinders.
Differenzbildung zwischen Kugelvolumen und Zylindervolumen.

Klausuraufschrieb

r: $V_{Kugel} = 268 = \frac{4}{3}\pi r^3$ | $\cdot 3;\ : 4\pi$
$r^3 = \frac{268 \cdot 3}{4\pi} = 63{,}98$ | $\sqrt[3]{\ }$
$r = 4{,}00$
O_{Kugel}: $O = 4\pi r^2 = 4\pi \cdot 4^2 = 201{,}062$
h_{Zyl}: $M_{Zyl} = 2\pi r \cdot h_{Zyl} = O_{Kugel} = 201{,}062$
$201{,}062 = 2\pi r \cdot h_{Zyl} = 8\pi \cdot h_{Zyl}$ | $: 8\pi$
$h_{Zyl} = \frac{201{,}062}{8\pi} = 8$
V_{Zyl}: $V_{Zyl} = \pi r^2 \cdot h = \pi \cdot 4^2 \cdot 8 = 402{,}124$
ΔV: $\Delta V = V_{Zyl} - V_{Kugel} = 402{,}124 - 268 = 134{,}124$
Die Differenz der beiden Rauminhalte beträgt $134\ cm^3$.

Lösung P2/2007

Lösungslogik

Berechnung von r des Grundkreises des Kegels über den $sin\frac{\gamma}{2}$.
Berechnung von h des Kegels über den Satz des Pythagoras.
Berechnung des Volumens des Kegels.
Gleichsetzung des Kegelvolumens mit dem Kugelvolumen.
Berechnung des Radius r_{Kug} der Kugel über die Volumenformel der Kugel.

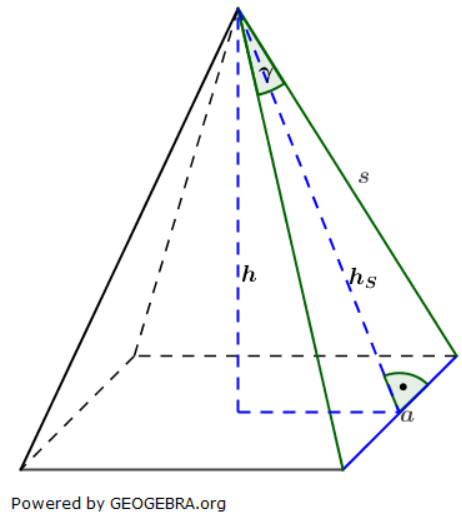
Klausuraufschrieb

r_{Keg}: $sin\frac{\gamma}{2} = \frac{r_{Keg}}{s}$ | $\cdot s$
$r_{Keg} = s \cdot sin\frac{\gamma}{2} = 6{,}2 \cdot sin24° = 2{,}52$
h_{Keg}: $h_{Keg} = \sqrt{s^2 - r_{Keg}^2} = \sqrt{6{,}2^2 - 2{,}52^2}$ | Satz des Pythagoras
$h_{Keg} = \sqrt{32{,}0896} = 5{,}66$
V_{Keg}: $V_{Keg} = \frac{1}{3}\pi r_{Keg}^2 \cdot h_{keg} = \frac{1}{3}\pi \cdot 2{,}52^2 \cdot 5{,}66 = 37{,}64$
V_{Kug}: $V_{Kug} = V_{Keg} = \frac{4}{3}\pi r_{Kug}^3$ | $\cdot \frac{3}{4};\ : \pi$
$r_{Kug}^3 = \frac{\frac{3}{4} \cdot V_{Keg}}{\pi} = \frac{0{,}75 \cdot 37{,}64}{\pi} = 8{,}986$ | $\sqrt[3]{\ }$
$r_{Kug} = 2{,}079$
Der Radius der Kugel mit gleichem Volumen wie der Kegel beträgt $2{,}1\ cm$.

Lösung P3/2014

<u>Lösungslogik</u>

Wir benötigen zunächst das Volumen der Pyramide mit $V_{Pyr} = \frac{1}{3}a^2 \cdot h$, um das so erhaltene Volumen mit dem Volumen der Kugel $V_{Kug} = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3$ gleichsetzen zu können.
Berechnung von a der Pyramide aus s und $\frac{\gamma}{2}$ über den sin.
Berechnung von h_s der Pyramide über den Satz des Pythagoras aus s und $\frac{a}{2}$.
Berechnung der Höhe der Pyramide h über den Satz des Pythagoras aus h_s und $\frac{a}{2}$.
Berechnung von V_{Pyr} und Gleichsetzung mit V_{Kug}. Die Auflösung der Gleichung nach r ergibt den Radius der Kugel.



<u>Klausuraufschrieb</u>

a: $\quad \frac{\frac{a}{2}}{s} = sin\left(\frac{\gamma}{2}\right) \Rightarrow \quad a = 2s \cdot sin\left(\frac{\gamma}{2}\right)$

$\qquad a = 2 \cdot 11{,}2 \cdot sin(17{,}0°) = 6{,}55$

h_S: $\quad h_s = \sqrt{s^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{11,2^2 - 3{,}275^2}$ | Satz des Pythagoras

$\qquad h_s = 10{,}71$

h: $\quad h = \sqrt{h_S^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{10,71^2 - 3{,}275^2}$ | Satz des Pythagoras

$\qquad h = 10{,}20$

V_{Pyr}: $\quad V_{Pyr} = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 6{,}55^2 \cdot 10{,}20 = 145{,}87$

r_{Kug}: $\quad V_{Pyr} = V_{Kug} = 145{,}87 = \frac{4}{3}\pi r^3$

$\qquad r^3 = \frac{3 \cdot 145{,}87}{4\pi} = 34{,}82$ | $\sqrt[3]{\ }$

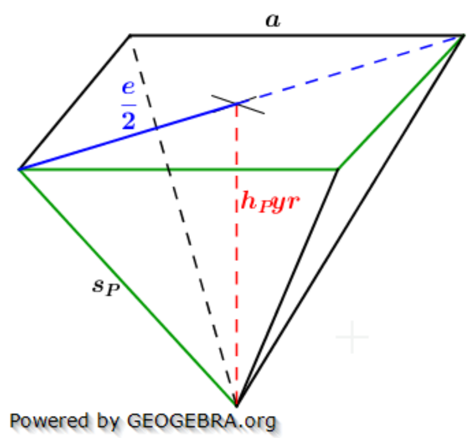
$\qquad r = \sqrt[3]{34{,}82} = 3{,}26$

Der Radius der Kugel mit gleichem Volumen wie die Pyramide beträgt ca. $3{,}3\ cm$.

Lösung P3/2015

<u>Lösungslogik</u>

Wir benötigen zunächst das Volumen des Kreiskegels mit $V_{Keg} = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{d_k}{2}\right)^2 \cdot h_K$. Da das Wasser nur das halbe Kegelvolumen einnimmt somit $\frac{1}{2} \cdot V_{Keg}$.
Danach benötigen wir das Volumen der Pyramide mit $V_{Pyr} = \frac{1}{3}a^2 \cdot h_{Pyr}$. Da h_{Pyr} nicht gegeben ist, müssen wir es mit dem Satz des Pythagoras berechnen mithilfe der Strecken s_P und der halben Diagonalen $\frac{e}{2}$ der Grundfläche.



Klausuraufschrieb

V_{Keg}: $V_{Keg} = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{d_k}{2}\right)^2 \cdot h_K = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{20}{2}\right)^2 \cdot 30 = 3141{,}59$

V_{Wasser}: $V_{Wasser} = \frac{1}{2}V_{Keg} = 1570{,}8$

$\frac{e}{2}$: $\frac{e}{2} = \frac{1}{2}a \cdot \sqrt{2} = \frac{1}{2} \cdot 16 \cdot \sqrt{2} = 11{,}3137$

h_{Pyr}: $h_{Pyr} = \sqrt{s_P^2 - \left(\frac{e}{2}\right)^2} = \sqrt{24^2 - 11{,}3137^2}$ | Satz des Pythagoras

$h_{Pyr} = \sqrt{448{,}00} = 21{,}166$

V_{Pyr}: $V_{Pyr} = \frac{1}{3}a^2 \cdot h_{Pyr} = \frac{1}{3} \cdot 16^2 \cdot 21{,}166 = 1806{,}2$

Das Pyramidenvolumen ist größer als das mit Wasser gefüllte Kegelvolumen. Somit läuft das Wasser beim Umfüllen nicht über.

Lösung P3/2016

Lösungslogik

Wir benötigen zunächst den Radius des Kreiskegels mit $M_{Keg} = \pi \cdot r_{Keg} \cdot s$, Mantel M_{Keg} und Länger der Seitenkante s sind gegeben. Danach berechnen wir die Höhe des Kreiskegels über den Satz des Pythagoras. Jetzt steht der Berechnung des Volumens nichts mehr im Wege mit $V_{Keg} = \frac{1}{3}\pi \cdot r_{Keg}^2 \cdot h_{keg}$.

Da Durchmesser und Mantelfläche von Zylinder und Kegel gleich groß sind, gilt $r_{Zyl} = r_{Keg}$ und $M_{Zyl} = M_{Keg}$. Hierüber berechnen wir die Höhe des Zylinders über $M_{Zyl} = 2\pi \cdot r_{Zyl} \cdot h_{Zyl}$. Nach ermittelter Höhenberechnung gilt dann für das Volumen des Zylinders $V_{Zyl} = \pi \cdot r_{Zyl}^2 \cdot h_{Zyl}$.

Die Differenz aus V_{Zyl} und V_{Keg} führt dann zum Endergebnis.

Klausuraufschrieb

r_{Keg}: $M_{Keg} = \pi \cdot r_{Keg} \cdot s$ | $:\pi;\ :s$

$r_{Keg} = \frac{M_{Keg}}{\pi \cdot s} = \frac{340}{\pi \cdot 18} = 6{,}01$

h_{Keg}: $h_{Keg} = \sqrt{s^2 - r_{Keg}^2} = \sqrt{18^2 - 6{,}01^2}$ | Satz des Pythagoras

$h_{Keg} = \sqrt{287{,}88} = 16{,}97$

V_{Keg}: $V_{Keg} = \frac{1}{3}\pi \cdot r_{Keg}^2 \cdot h_{keg} = \frac{1}{3}\pi \cdot 6{,}01^2 \cdot 16{,}97 = 641{,}89$

h_{Zyl}: $M_{Keg} = M_{Zyl} = 2\pi \cdot r_{Zyl} \cdot h_{Zyl}$ | $:(2\pi \cdot r_{Zyl})$

$h_{Zyl} = \frac{M_{Zyl}}{2\pi \cdot r_{Zyl}} = \frac{340}{2\pi \cdot 6{,}01} = 9{,}00$

V_{Zyl}: $V_{Zyl} = \pi \cdot r_{Zyl}^2 \cdot h_{Zyl} = \pi \cdot 6{,}01^2 \cdot 9 = 1021{,}27$

ΔV: $\Delta V = V_{Zyl} - V_{Keg} = 1021{,}27 - 641{,}89 = 379{,}38$

Der Volumenunterschied zwischen Kegel und Zylinder beträgt $379{,}4\ cm^3$.