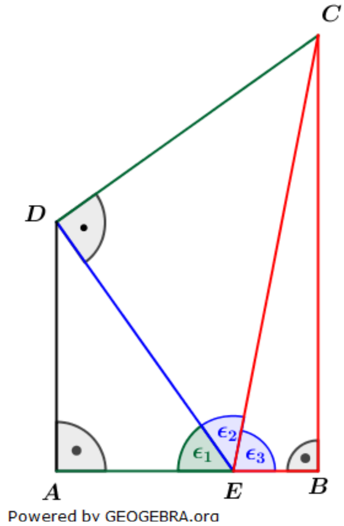
Aufgabe P1/2014

Lösungslogik

Umfang ist Summe der Strecken $\overline{EB}$, $\overline{BC}$ und $\overline{CE}$.
Berechnung von $\overline{CE}$ im Dreieck CED über den Satz des Pythagoras, hierzu zunächst $\overline{ED}$ im Dreieck AED über $cos\epsilon_1$.
Berechnung von $\overline{BC}$ über $sin\epsilon_3$. Hierzu zunächst ϵ_2 über $sin\epsilon_2$.
Berechnung von $\overline{EB}$ über Satz des Pythagoras im Dreieck BCE.



Klausuraufschrieb

$u = \overline{EB} + \overline{BC} + \overline{CE}$

$\overline{CE}$: $\quad \overline{CE} = \sqrt{\overline{CD}^2 + \overline{ED}^2}$

$\overline{ED}$: $\quad \cos\epsilon_1 = \frac{\overline{AE}}{\overline{ED}} \quad | \quad \cdot\overline{ED};\ : cos\epsilon_1$

$\overline{ED} = \frac{\overline{AE}}{\cos\epsilon_1} = \frac{3{,}2}{cos54{,}6°} = 5{,}5240$

$\overline{CE} = \sqrt{5{,}8^2 + 5{,}524^2} = 8{,}0$

ϵ_2: $\quad sin\,\epsilon_2 = \frac{\overline{CD}}{\overline{CE}} = \frac{5{,}8}{8{,}0} = 0{,}725 \implies$

$\epsilon_2 = \sin^{-1} 0{,}725 = 46{,}47\,°$

ϵ_2: $\quad \epsilon_3 = 180° - \epsilon_1 - \epsilon_2 = 78{,}93\,°$

$\overline{BC}$: $\quad sin\epsilon_3 = \frac{\overline{BC}}{\overline{CE}} \quad | \quad \cdot\overline{CE}$

$\overline{BC} = \overline{CE} \cdot sin78{,}93\,° = 7{,}85$

$\overline{EB}$: $\quad \overline{EB} = \sqrt{\overline{CE}^2 - \overline{BC}^2} = \sqrt{8^2 - 7{,}85^2} = 1{,}54$

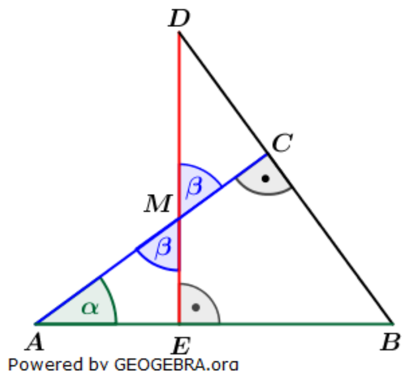
u: $\quad u = \overline{EB} + \overline{BC} + \overline{CE} = 1{,}54 + 7{,}85 + 8{,}0 = 17{,}39\ cm$

Der Umfang des Dreiecks BCE *beträgt* $17{,}4\ cm$.

Lösung P2/2014

Lösungslogik

Berechnung von β als Ergänzungswinkel zu $90°$ im Dreieck AEM.
Berechnung von $\overline{AC}$ im Dreieck ABC über $cos\alpha$.
$\overline{AM}$ und $\overline{MC}$ sind jeweils $\frac{1}{2} \cdot \overline{AC}$.
Berechnung von $\overline{EM}$ über $sin\alpha$. Berechnung von $\overline{MD}$ über $cos\beta$.
$\overline{ED} = \overline{EM} + \overline{MD}$.



Klausuraufschrieb

$\overline{DE} = \overline{EM} + \overline{MD}$

β: $\beta = 90° - \alpha = 90° - 36{,}2° = 53{,}8°$

$\overline{AC}$: $\cos\alpha = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$ | $\cdot \overline{AB}$

$\overline{AC} = \overline{AB} \cdot \cos\alpha = 6{,}2 \cdot \cos 36{,}2° = 5{,}00$

$\overline{AM}$: $\overline{AM} = \overline{MC} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AC} = 2{,}5$

$\overline{EM}$: $\sin\alpha = \frac{\overline{EM}}{\overline{AM}}$ | $\cdot \overline{EM}$

$\overline{EM} = \overline{AM} \cdot \sin\alpha = 2{,}5 \cdot \sin 36{,}2° = 1{,}4765$

$\overline{MD}$: $\cos\beta = \frac{\overline{MC}}{\overline{MD}}$ | $\cdot \overline{MD};\ : \cos\beta$

$\overline{MD} = \frac{\overline{MC}}{\cos\beta} = \frac{2{,}5}{\cos 53{,}8°} = 4{,}2329$

$\overline{DE} = 1{,}4765 + 4{,}2329 = 5{,}7094$

Die Strecke $\overline{DE}$ ist $5{,}7\ cm$ lang.

Lösung P3/2014

Lösungslogik

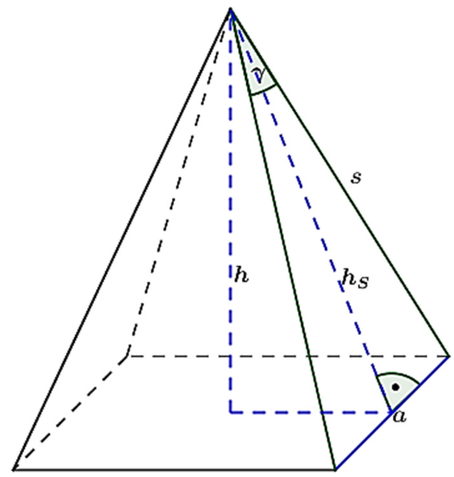
Wir benötigen zunächst das Volumen der Pyramide mit $V_{Pyr} = \frac{1}{3}a^2 \cdot h$, um das so erhaltene Volumen mit dem Volumen der Kugel $V_{Kug} = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3$ gleichsetzen zu können.

Berechnung von a der Pyramide aus s und $\frac{\gamma}{2}$ über den sin.

Berechnung von h_S der Pyramide über den Satz des Pythagoras aus s und $\frac{a}{2}$.

Berechnung der Höhe der Pyramide h über den Satz des Pythagoras aus h_s und $\frac{a}{2}$.

Berechnung von V_{Pyr} und Gleichsetzung mit V_{Kug}. Die Auflösung der Gleichung nach r ergibt den Radius der Kugel.



Powered by GEOGEBRA.org

Klausuraufschrieb

a: $\frac{\frac{a}{2}}{s} = \sin\left(\frac{\gamma}{2}\right) \Longrightarrow \quad a = 2s \cdot \sin\left(\frac{\gamma}{2}\right)$

$a = 2 \cdot 11{,}2 \cdot \sin(17{,}0°) = 6{,}55$

h_S: $h_s = \sqrt{s^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{11{,}2^2 - 3{,}275^2}$ | Satz des Pythagoras

$h_s = 10{,}71$

h: $h\sqrt{= h_s^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{10{,}71^2 - 3{,}275^2}$ | Satz des Pythagoras

$h = 10{,}20$

V_{Pyr}: $V_{Pyr} = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 6{,}55^2 \cdot 10{,}20 = 145{,}87$

r_{Kug}: $V_{Pyr} = V_{Kug} = 145{,}87 = \frac{4}{3}\pi r^3$

$r^3 = \frac{3\cdot 145{,}87}{4\pi} = 34{,}82 \quad | \quad \sqrt[3]{\ }$

$r = \sqrt[3]{34{,}82} = 3{,}26$

Der Radius der Kugel mit gleichem Volumen wie die Pyramide beträgt ca. $3{,}3\ cm$.

Lösung P4/2014

Lösungslogik

Aufstellung der Funktionsgleichung g.
Aufstellung der Funktionsgleichung p.
Schnittpunktberechnung von g mit p.

Klausuraufschrieb

Geradengleichung g *durch* R *mit* $m = -2$*:*

g: $y = -2x + b$

$-4 = -2 \cdot 2{,}5 + b \quad | \quad$ Punktprobe mit $R(2{,}5|-4)$

$b = 1 \implies y = -2x + 1$

Funktionsgleichung von p*:*

p: $y = (x - x_1)\cdot(x - x_2) \quad | \quad$ Nullstellen bei -2 und 4

$y = (x+2)(x-4) = x^2 - 2x - 8$

Schnittpunkte von p *mit* g*:*

$p \cap g$: $\quad | \quad$ Schnittpunkte durch Gleichsetzung

$-2x + 1 = x^2 - 2x - 8 \quad | \quad +2x;\ +8$

$x^2 = 9 \implies x_1 = -3;\quad x_2 = 3$

$y_1 = (-3)^2 - 2\cdot(-3) - 8 = 7 \implies P_1(-3|7)$

$y_2 = 3^2 - 2\cdot 3 - 8 = -5 \implies P_2(3|-5)$

Lösung P5/2014

$$\frac{x}{x+4} = \frac{3x+28}{x^2+4x} + \frac{1}{x}$$

Nenner 1:		$x + 4$
Nenner 2:	$x^2 + 4x$	$x(x+4)$
Nenner 3:		x
Hauptnenner:		$x(x+4)$

$x_1 = 0;\ x + 4 = 0 \implies x_2 = -4$

$\mathbb{D} = \mathbb{R}\backslash\{-4; 0\}$

$\frac{x\cdot x(x+4)}{x+4} = \frac{(3x+28)x(x+4)}{x^2+4x} + \frac{x(x+4)}{x}$

$\frac{x\cdot x\cancel{(x+4)}}{\cancel{x+4}} = \frac{(3x+28)\cancel{x(x+4)}}{\cancel{x^2+4x}} + \frac{\cancel{x}(x+4)}{\cancel{x}}$

$x^2 = 3x + 28 + x + 4 \quad | \quad -4x; -32$

$x^2 - 4x - 32 = 0 \quad | \quad p/q$-Formel

$x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4+32} = 2 \pm 6$

$x_1 = 8;\ x_2 = -4$

Wegen $x_2 = -4 \notin \mathbb{D}$ ist $\mathbb{L} = \{8\}$ die einzigste Lösung.

Lösung P6/2014

Lösungslogik

Wir ermitteln zunächst den Rangplatz des Zentralwertes sowie den Rangplatz des unteren Quartils. Am Boxplot können wir dann ablesen, welche Punktzahl bei Rangplatz 5 und 9 einzutragen ist.
Der Boxplot endet bei 20 Punkten, somit wissen wir, welcher Wert auf Rangplatz 17 einzutragen ist. Das arithmetische Mittel beträgt 10 Punkte bei 17 Rangplätzen. Also müssen insgesamt 170 Punkte vergeben worden sein.
Die Summe aller Punkte einschließlich der bereits eingetragenen Rangplätze 5, 9 und 17 ergibt 153 Punkte. Somit fehlen noch 17 Punkte, die auf die Rangplätze 3 und 14 zu verteilen sind. Dies bedeutet 3 Punkte für Rangplatz 3 und 14 Punkte für Rangplatz 14.
Der Zentralwert liegt bei 12 Punkten auf Rangplatz 9. Somit haben 9 Schülerinnen und Schüler mehr Punkte als der Durchschnitt mit nur 10 Punkten. 9 von 17 Schülerinnen und Schüler ist jedoch mehr als $50\,\%$.

Klausuraufschrieb

a) $n = 17$ $\quad \frac{17}{2} = 8{,}5 \Rightarrow$ Rangplatz 9, aus Boxplot 12 Punkte abgelesen.
q_u: $\quad \frac{17}{4} = 4{,}25 \Rightarrow$ Rangplatz 5, aus Boxplot 6 Punkte abgelesen.
Maximalwert 20 Punkte.
Rangplatz 17 mit 20 Punkten belegt, $\Rightarrow$ Rangplatz 17 hat 20 Punkte.
Mittelwert $\overline{m} = 10$ ergibt $\overline{m} \cdot 17 = 170$ vergebene Gesamtpunkte. Summe aller Punkte ohne Rangplatz 3 und 14 ist 153 Punkte. Somit fehlen noch 17 Punkte, was 3 Punkte für Rangplatz 3 und 14 Punkte für Rangplatz 14 bedeutet (alternativ 2 Punkte für Rangplatz 3 und 15 Punkte für Rangplatz 14 oder 1 Punkt für Rangplatz 3 und 16 Punkte für Rangplatz 14).

Vollständig ausgefüllte Rangliste:

Platz	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
Punkte	1	1	3	5	6	7	7	9	12	12	12	13	14	14	16	17	20

b) $z = 12 > \overline{m}$ ab Rangplatz 9. Somit 9 Schülerinnen und Schüler besser $\overline{m}$.
9 Schülerinnen und Schüler sind mehr als $50\,\%$ *von* 17. *Pauline hat recht.*

Lösung P7/2014

a) *Anzahl kontrollierter Zweiräder:*
Der Grafik entnimmst du, dass $17{,}5\,\%$ von 640 kontrollierten Fahrzeugen Zweiräder waren.
$P = G \cdot p = 640 \cdot 0{,}175 = 112$ Zweiräder.
Es wurden 112 *Zweiräder kontrolliert.*

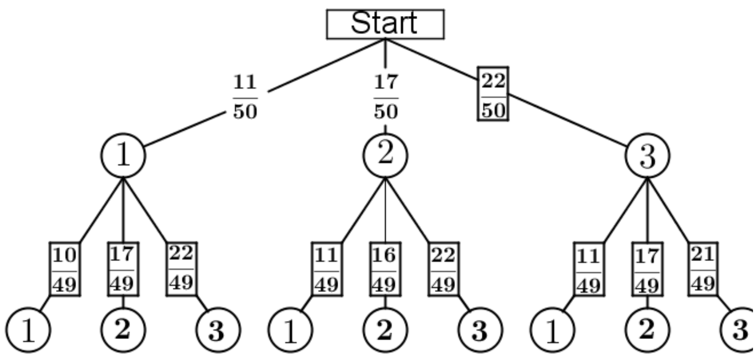
b) *Anzahl PKW-Fahrer mit zeitweiligem Fahrverbot:*
Jeder Achte PKW von $75\,\%$ von 640 kontrollierten Fahrzeugen haben die Höchstgeschwindigkeit überschritten. $5\,\%$ von diesen müssen mit einem Fahrverbot rechnen.
$$P = \frac{1}{8} \cdot 640 \cdot 0{,}75 \cdot 0{,}05 = 3$$
3 *PKW-Fahrer müssen mit einem zeitweiligen Fahrverbot rechnen.*

Lösung P8/2014

Lösungslogik

Die Quersumme der Bruchzahlen im ersten Zug muss 1 ergeben, somit für eine 3 im ersten Zug $\frac{22}{50}$. Da ohne Zurücklegen gezogen wird, befinden sich nur noch 49 Kugeln in der Urne, sodass wir es im zweiten Zug mit $\frac{21}{49}$ zu tun haben.
Wurde im ersten Zug eine 1 gezogen, befinden sich noch 10 Kugeln mit einer 1, aber weiterhin 17 Kugeln mit einer 2 und 22 Kugeln mit einer 3 in der Urne.
Wurde im ersten Zug eine 2 gezogen, befinden sich noch 16 Kugeln mit einer 2, aber weiterhin 11 Kugeln mit einer 1 und 22 Kugeln mit einer 3 in der Urne.
Wurde im ersten Zug eine 3 gezogen, befinden sich noch 21 Kugeln mit einer 3, aber weiterhin 11 Kugeln mit einer 1 und 17 Kugeln mit einer 2 in der Urne.
Hieraus ergeben sich die einzelnen Wahrscheinlichkeiten für den zweiten Zug gemäß Grafik.
Die Wahrscheinlichkeit für zwei Kugeln, die mit der gleichen Zahl beschriftet sind, ist die Wahrscheinlichkeit der Einzelereignisse $P(1;1)$, $P(2;2)$ und $P(3;3)$.
Die Wahrscheinlichkeit, dass die erste gezogene Zahl größer ist als die Zweite, ist die Wahrscheinlichkeit der Einzelereignisse $P(2;1)$, $P(3;1)$ und $P(3;2)$.

Klausuraufschrieb



$P(1;1) = \frac{11}{50} \cdot \frac{10}{49} = \frac{110}{2450}$

$P(2;2) = \frac{17}{50} \cdot \frac{16}{49} = \frac{272}{2450}$

$P(3;3) = \frac{22}{50} \cdot \frac{21}{49} = \frac{462}{2450}$

$P\{(1;1),(2;2),(3;3)\} = \frac{110+272+462}{2450} = \frac{844}{2450} \approx 34{,}4\ \%$

$P(2;1) = \frac{17}{50} \cdot \frac{11}{49} = \frac{187}{2450}$

$P(3;1) = \frac{22}{50} \cdot \frac{11}{49} = \frac{242}{2450}$

$P(3;2) = \frac{22}{50} \cdot \frac{17}{49} = \frac{374}{2450}$

$P\{(2;1),(3;1),(3;2)\} = \frac{187+242+374}{2450} = \frac{803}{2450} \approx 32{,}8\ \%$