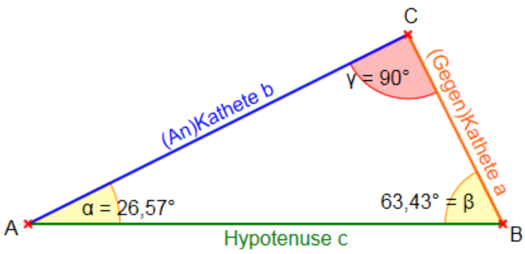
Themenerläuterung

In diesem Kapitel bekommst du Zeichnungen von zusammengesetzten Figuren aus Dreiecken, Quadraten, Rechtecken, Parallelogrammen, Trapezen und eventuell Kreisbögen. Einige Streckenlängen und/oder einige Winkel der Figuren werden vorgegeben. Du sollst an Hand dieser Angaben andere Strecken, Winkel und Flächeninhalte von Teilfiguren berechnen.
Die Lösung dieser Aufgaben ist in den meisten Fällen nur über Teildreiecke der Figuren möglich. Dabei handelt es sich um rechtwinklige Dreiecke oder allgemeine Dreiecke. Oftmals musst du diese Dreiecke durch geeignete Hilfslinien bilden, um an die geforderten Ergebnisse zu gelangen. Dabei beachte bitte Folgendes:
Bei ***rechtwinkligen*** Dreiecken verwendest du die trigonometrischen Funktionen $\boldsymbol{sin}$, $\boldsymbol{cos}$ und $\boldsymbol{tan}$ sowie den Satz des Pythagoras.
Bei allgemeinen Dreiecken, also Dreiecken, in denen kein rechter Winkel vorhanden ist, benutzt du am schnellsten den Sinussatz bzw. Kosinussatz und für Flächenberechnungen die Formel des trigonometrischen Flächeninhalts (siehe nachfolgend „Die wichtigsten benötigten Formeln“). Beachte auch bitte: Alle erforderlichen Formeln stehen in der Formelsammlung mit Ausnahme des Kosinussatzes. Da die Verwendung des Sinus- und des Kosinussatzes in vielen Fällen den Rechenweg wesentlich vereinfacht, solltest du dir den Kosinussatz gut einprägen. Im nächsten Thema wird der Sinus- und Kosinussatz sowie der trigonometrische Flächeninhalt nochmals ausführlich erläutert.
Bei den einzelnen Aufgaben erhältst du jeweils einen Hinweis/Tipp, ob eine schnellere Lösung mit dem Sinus- bzw. Kosinussatz möglich ist. Die Lösungsteile der Aufgaben sind in diesen Fällen aufgeteilt in die einfache Lösung und in die herkömmliche – als umständlich gekennzeichnet – Lösung.

Die wichtigsten benötigten Formeln

1. *Satz des Pythagoras*
   Ist im rechtwinkligen Dreieck c die Hypothenuse (= längste Seite) und a und b die beiden Katheten, so gilt:
$$c^2 = a^2 + b^2 \quad \text{bzw.} \quad c = \sqrt{a^2 + b^2}$$
$$a^2 = c^2 - b^2 \quad \text{bzw.} \quad a = \sqrt{c^2 - b^2}$$
$$b^2 = c^2 - a^2 \quad \text{bzw.} \quad b = \sqrt{c^2 - a^2}$$

2. *Die trigonometrischen Formeln*
$$sin(\alpha) = \frac{Gegenkathete}{Hypothenuse}$$
$$cos(\alpha) = \frac{Ankathete}{Hypothenuse}$$
$$tan(\alpha) = \frac{Gegenkathete}{Ankathete}$$



Die Hypothenuse ist immer die längste Seite im rechtwinkligen Dreieck und liegt dem rechten Winkel gegenüber.
Die **Gegen**kathete ist die Kathete, die dem Winkel, um den es geht, **gegenüber** liegt.
Die **An**kathete ist die Kathete, die an dem Winkel, um den es geht, **anliegt**.

3. *Die Flächenformeln*

Dreieck: $A = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h_g$ mit g als Grundseite und h_g als Höhe auf die Grundseite. Beim rechtwinkligen Dreieck ist die eine Kathete die Grundseite und die andere Kathete die Höhe auf diese Grundseite.

Quadrat: $A = a^2$ mit a als der Seitenlänge.

Rechteck: $A = a \cdot b$ mit a und b als die beiden Seitenlängen des Rechtecks.

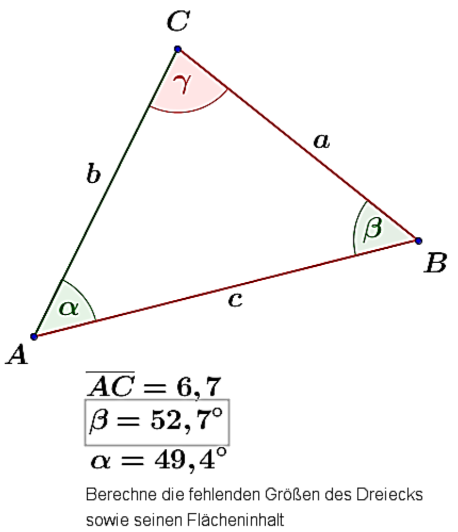
Parallelogramm: $A = a \cdot h_a$ bzw. $b \cdot h_b$ mit a bzw. b als eine der beiden Seiten des Parallelogramms und h_a bzw h_b als Höhe auf die jeweilige Seite.

Trapez: $A = \frac{1}{2}(a + c) \cdot h$ mit a und c als den beiden parallelen Seiten des Trapezes und h als Höhe auf diese Seiten.

Drachen/Raute: $A = \frac{1}{2} \cdot e \cdot f$ mit e und f als den beiden Diagonalen.

4. *Der Sinussatz*

Im allgemeinen Dreieck gilt $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$



Diese allgemeine Form des Sinussatzes lässt sich aber nur sehr schwer merken. Deshalb bilden wir uns eine „Eselsbrücke".

Für die Anwendung des Sinussatzes brauchst du eine bekannte Seite (im Beispiel die Seite $\overline{AC}$) und den dieser Seite gegenüberliegenden bekannten Winkel (im Beispiel ist dies β), eine zweite unbekannte Seite (im Beispiel die Strecke $\overline{BC}$) und einen dieser Seite gegenüberliegenden bekannten Winkel (im Beispiel α). Mit dem Sinussatz kannst du nun die unbekannte Seite direkt ausrechnen, indem du schreibst:

$$\frac{\textbf{bekannte Seite}}{\sin(\textbf{gegenüberliegender Winkel})} = \frac{\textbf{unbekannte Seite}}{\sin(\textbf{gegenüberliegender Winkel})}$$

Im Beispiel $\frac{\overline{AC}}{\sin\beta} = \frac{\overline{BC}}{\sin\alpha}$ | $\cdot \sin\alpha$

$\overline{BC} = \frac{\overline{AC}}{\sin\beta} \cdot \sin\alpha$ | Zahlen einsetzen

$\overline{BC} = \frac{6{,}7}{\sin 52{,}7°} \cdot \sin 49{,}4° = 6{,}4$

Über die Winkelsumme des Dreiecks erhältst du leicht den Winkel γ mit $\gamma = 180° - 49{,}4° - 52{,}7° = 77{,}9°$, und schon kannst du mit dem Sinussatz die Strecke $\overline{AB}$ bestimmen. Jetzt ist wie zuvor $\overline{AC}$ die bekannte Seite und $\boldsymbol{\beta}$ der gegenüberliegende bekannte Winkel, $\overline{AB}$ die unbekannte Seite und $\boldsymbol{\gamma}$ der gegenüberliegende bekannte Winkel, also

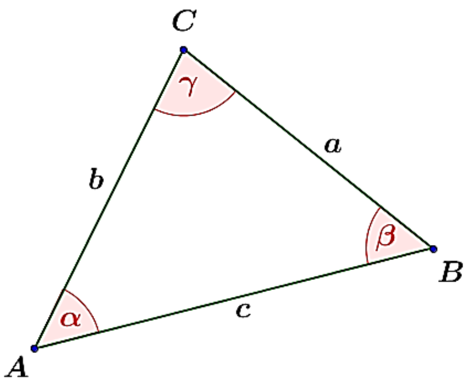
$\frac{\overline{AC}}{\sin\beta} = \frac{\overline{AB}}{\sin\gamma}$ | $\cdot \sin\gamma$

$\overline{AB} = \frac{\overline{AC}}{\sin\beta} \cdot \sin\gamma$ | Zahlen einsetzen

$\overline{BC} = \frac{6{,}7}{\sin 52{,}7°} \cdot \sin 77{,}9° = 8{,}25$

Natürlich kannst du mit dem Sinussatz auch unbekannte Winkel bestimmen. Hierzu haben wir jetzt die bekannte Strecke $\overline{BC}$ und den bekannten gegenüberliegenden Winkel α, die bekannte Strecke $\overline{AC}$ und den unbekannten gegenüberliegenden Winkel β.
Wie bilden nun das Verhältnis über den Sinussatz mit

$$\frac{\sin(\text{gegenüberliegender Winkel})}{\text{bekannte Seite}} = \frac{\sin(\text{gegenüberliegender Winkel})}{\text{bekannte Seite}}$$



$\overline{AC} = 6,7$
$\overline{BC} = 6,4$
$\overline{AB} = 8,25$
Berechne die fehlenden Größen des Dreiecks sowie seinen Flächeninhalt

Im Beispiel:

$$\frac{\sin\alpha}{\overline{BC}} = \frac{\sin\beta}{\overline{AC}} \quad | \quad \cdot \overline{AC}$$

$$\sin\beta = \frac{\sin\alpha}{\overline{BC}} \cdot \overline{AC} \quad | \quad \text{Zahlen einsetzen}$$

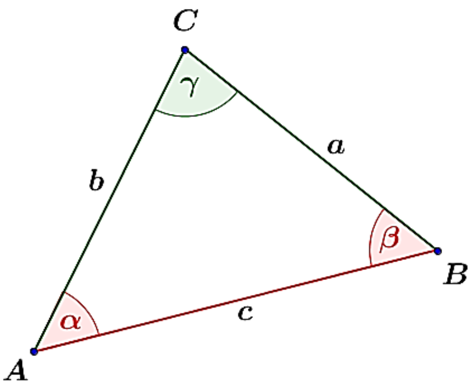
$$\sin\beta = \frac{\sin 49,4°}{6,4} \cdot 6,7 = 0,79486$$

$$\beta = \sin^{-1}(0,79486) = 52,6°$$

5. *Der Kosinussatz*

Im allgemeinen Dreieck gilt $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\gamma$ bzw. $c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\gamma}$

Diese allgemeine Form des Kosinussatzes lässt sich auch nur sehr schwer merken. Deshalb bilden wir uns erneut eine „Eselsbrücke".
Für die Anwendung des Kosinussatzes brauchst du zwei bekannte Seite (im Beispiel die Seiten $\overline{AC}$ und $\overline{BC}$) und den von diesen Seiten eingeschlossenen bekannten Winkel (im Beispiel ist dies γ)
Mit dem Kosinussatz kannst du nun die unbekannte dritte Seite direkt ausrechnen, indem du schreibst:



$\overline{AC} = 6,7$
$\overline{BC} = 6,4$
$\gamma = 77,9°$
Berechne die fehlenden Größen des Dreiecks sowie seinen Flächeninhalt

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 - 2 \cdot \overline{AC} \cdot \overline{BC} \cdot \cos\gamma \quad | \quad \text{Zahlen einsetzen}$$

$$\overline{AB}^2 = 6,7^2 + 6,4^2 - 2 \cdot 6,7 \cdot 6,4 \cdot \cos 77,9°$$

$$= 67,8731 \quad | \quad \sqrt{\ }$$

$$AB = \sqrt{64,8731} = 8,24$$

Die restlichen Werte des Dreiecks können nun mühelos über den Sinussatz ermittelt werden.

Natürlich kannst du mit dem Kosinussatz auch unbekannte Winkel bestimmen. Hierzu müssen alle drei Seiten des Dreiecks bekannt sein.
Wir entscheiden uns zur Berechnung des Winkels γ und bilden:

$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 - 2 \cdot \overline{AC} \cdot \overline{BC} \cdot cos\gamma$ | Zahlen einsetzen

$8,25^2 = 6,7^2 + 6,4^2 - 2 \cdot 6,7 \cdot 6,4 \cdot cos\gamma$

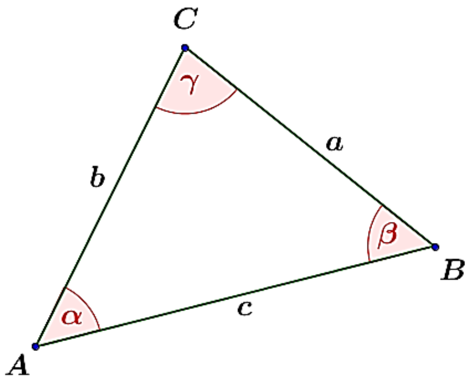
$68,06 = 85,85 - 85,76 \cdot cos\gamma$ | $-85,85$

$-17,79 = -85,76 \cdot cos\gamma$ | $:-85,76$

$cos\gamma = 0,20744$

$\gamma = cos^{-1}(0,20744) = 78\,°$

Die restlichen Werte des Dreiecks lassen sich dann wieder einfach über den Sinussatz berechnen.



$\overline{AC} = 6,7$
$\overline{BC} = 6,4$
$\overline{AB} = 8,25$

Berechne die fehlenden Größen des Dreiecks sowie seinen Flächeninhalt

6. *Trigonometrischer Flächeninhalt*

Im allgemeinen Dreieck gilt für dessen Flächeninhalt:

$A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot sin\gamma$

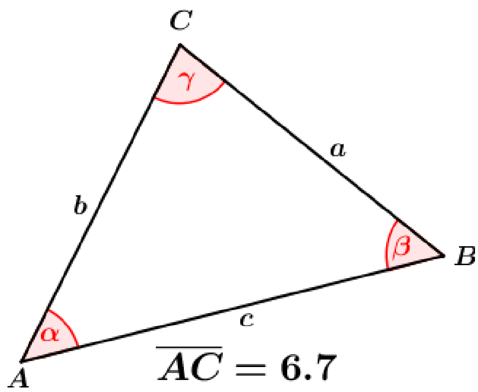
$A = \frac{1}{2} \cdot c \cdot b \cdot sin\alpha$

$A = \frac{1}{2} \cdot c \cdot a \cdot sin\beta$

Auch diese Formel ist nicht sehr einprägsam und wir bilden wieder eine „Eselsbrücke".
Du benötigst zur Flächenberechnung mithilfe des trigonometrischen Flächeninhaltes zwei bekannte Seiten (im Beispiel etwa $\overline{AC}$ und $\overline{BC}$) und den von diesen Seiten eingeschlossenen, bekannten Winkel (im Beispiel ist dies γ).

$A = \frac{1}{2} \cdot \overline{AC} \cdot \overline{BC} \cdot sin\gamma$

$A = \frac{1}{2} \cdot 6,7 \cdot 6,4 \cdot sin77,9° = 20,96\ FE$



$\overline{AC} = 6.7$
$\overline{BC} = 6.4$
$\gamma = 77.9°$

7. *Besondere Werte für* $\boldsymbol{sin}$, $\boldsymbol{cos}$ und $\boldsymbol{tan}$

In bestimmten Aufgaben sollst du den Nachweis eines Flächeninhalts, des Umfangs einer Figur, der Länge einer Strecke oder gar dem Wert eines $\boldsymbol{sin}$, $\boldsymbol{cos}$ bzw. $\boldsymbol{tan}$ führen in Abhängigkeit einer sogenannten „Formvariablen". Diese Formvariable wird mit dem Buchstaben "e" bezeichnet. In diesen Aufgaben wird verlangt, dass du den Nachweis ohne gerundete Werte führen sollst. Dies bedeutet für dich, dass du keinen Taschenrechner verwenden kannst und die Aufgabe manuell lösen musst.

In diesen Aufgaben handelt es sich stets nur um Winkel der Größe 30°, 45°, 60° bzw. 90°. Für diese Winkelgrößen gibt es besondere Werte, die in nachstehender Tabelle aufgeführt sind. Diese Tabelle findest du auch in deiner Formelsammlung.

α	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$120°$	$135°$	$150°$	$180°$
$sin\alpha$	0	$0{,}5$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$0{,}5$	0
$cos\alpha$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$0{,}5$	0	$-0{,}5$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	-1
$tan\alpha$	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	$--$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{3}\sqrt{3}$	0

Da bei diesen Winkelwerten Wurzeln vorkommen – es kommt hier nur die $\sqrt{2}$ bzw. $\sqrt{3}$ vor – kann es vorkommen, dass du zum Erreichen der korrekten Lösung der Aufgabe oftmals den Nenner eines Bruchs rational machen musst, weshalb dies hier nochmals aufgeführt wird.
Angenommen, du erhältst in einer Rechnung ein Zwischenergebnis wie etwa $\frac{3}{\sqrt{3}}$. Das geforderte Ergebnis laut Aufgabe soll aber $\sqrt{3}$ sein. Du musst jetzt erkennen, dass man eine Wurzel im Nenner eines Bruchs nicht stehenlassen darf, die Wurzel im Nenner muss verschwinden. Dies wird als „Rationalmachen eines Nenners" verstanden, was so erfolgt, dass du den Bruch mit der Wurzel im Nenner um diesen Wert erweitern musst. Für unser Beispiel $\frac{3}{\sqrt{3}}$ bedeutet dies:

$\frac{3}{\sqrt{3}}$ | Erweitern mit $\sqrt{3}$

$\frac{3\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}$ | Wurzel im Nenner auflösen

$\frac{3\cdot\sqrt{3}}{3}$ | und kürzen

$\frac{\cancel{3}\cdot\sqrt{3}}{\cancel{3}} = \sqrt{3}$

Wie du siehst, ist also $\frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$.

Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

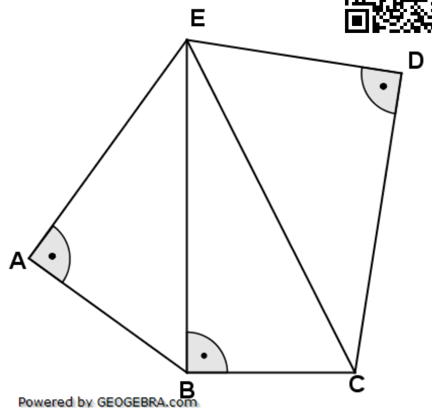
Übungsaufgaben im Stil der Abschlussprüfung

Aufgabe A1

Gegeben ist das Fünfeck $ABCDE$ mit:

$\overline{AE} = 6{,}1\ cm$
$\overline{DE} = 4{,}9\ cm$
Winkel $EBA = 54{,}2°$
Winkel $AEC = 62{,}5°$

Berechnen Sie die Länge $\overline{CD}$.



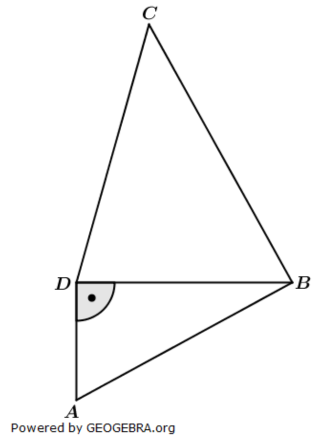
Aufgabe A2

Gegeben ist das Viereck $ABCD$ mit:

$\overline{AD} = 12{,}4\ cm$
$A_{ABD} = 138{,}9\ cm^2$
$\overline{BC} = 30{,}4\ cm$
Winkel $CBD = 60{,}8°$

Berechnen Sie den Winkel $BDC\ \ (\delta_1)$

Tipp: Kosinussatz und Sinussatz führen zur schnellsten Lösung $\delta_1 \approx 74°$.

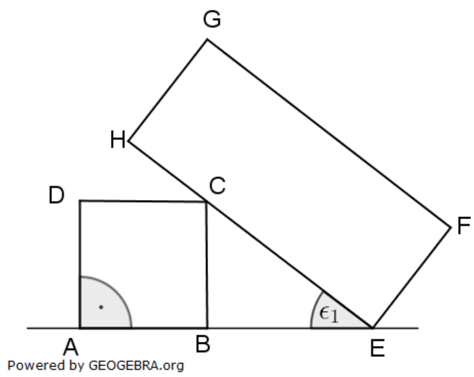


Aufgabe A3

Gegeben sind das Quadrat $ABCD$ und das Rechteck $EFGH$.
Die Ecke C des Quadrats liegt auf $\overline{HE}$.
Ecke G des Rechtecks liegt auf $\overline{BC}$.
Ecke B liegt auf $\overline{AE}$.
Es gilt:

$\overline{AB} = 4{,}9\ cm$
$\overline{GH} = \overline{AB}$
$\epsilon_1 = 37{,}7°$

Berechnen Sie den Abstand des Punktes G von $\overline{AE}$.
Ermitteln Sie den prozentualen Anteil der Fläche von Trapez $CEFG$ an der Fläche des Rechtecks $EFGH$.



Lösung: $\overline{BG} = 11{,}1\ cm$; $CEFG{:}EFGH = 84\ \%$

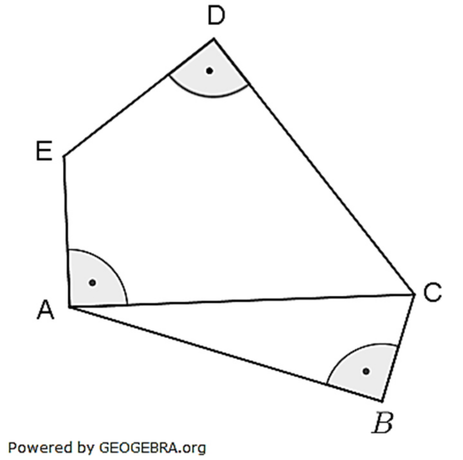
Aufgabe A4

Im Fünfeck $ABCDE$ gilt:

$\overline{AB} = 11{,}6\ cm$
Winkel $ACB = 71{,}2°$
$\overline{AE} = 5{,}4\ cm$
Winkel $AED = 125{,}8°$

Berechnen Sie den Umfang des Fünfecks $ABCDE$.

Lösung: $u_{ABCDE} = 39{,}3\ cm$



Aufgabe A5

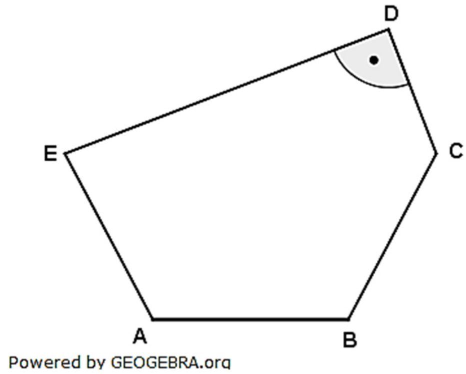
Das Fünfeck $ABCDE$ besteht aus dem gleichschenkligen Trapez $ABCE$ und dem rechtwinkligen Dreieck CBA.

Es gilt:

$\overline{AB} = 5{,}4\ cm$
Winkel $CBA = 118°$
$\overline{CD} = 3{,}7\ cm$
Der Abstand von $\overline{AB}$ zu $\overline{CE}$ beträgt $4{,}6\ cm$.

Berechnen Sie die Fläche des Fünfecks $ABCDE$.

Lösung: $A_{ABCDE} = 53{,}9\ cm^2$



Aufgabe A6

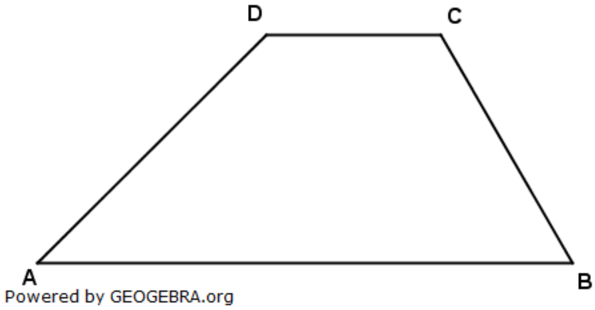
Gegeben ist das Trapez $ABCD$ mit den parallel liegenden Seiten AB und CD.

Es gilt:

$\overline{BC} = 2e$
$\overline{AB} = e \cdot (4 + \sqrt{3})$
Winkel $CBA = 60°$
Winkel $ADC = 135°$

Zeigen Sie ohne Verwendung gerundeter Werte, dass für den Flächeninhalt des Trapezes gilt:

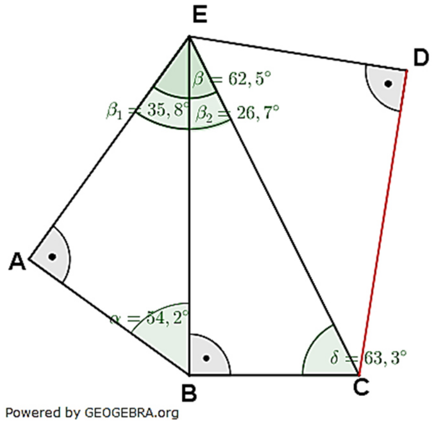
$A = \frac{e^2}{2}(7\sqrt{3} + 3)$.



Hinweis zu den Lösungen
In den Graphiken stellen **grüne** Linien, Werte und Flächen vorgegebene Werte, **rote** Linien, Werte und Flächen gesuchte Werte und **blaue** Linien, Werte und Flächen zu ermittelnde Zwischenwerte zur Erreichung der Endergebnisse dar.

Lösung A1

Detaillierte Lösung:
Lösungsschritte:

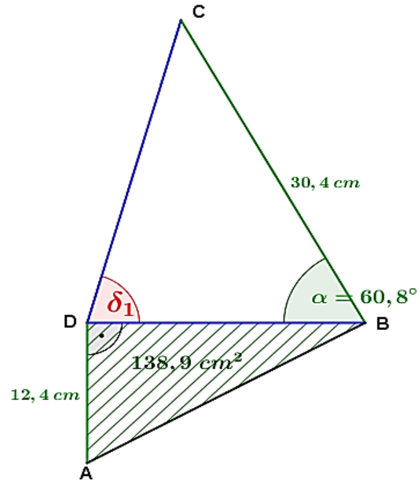


1. Markiere zunächst alle gegebenen Werte in der Zeichnung mit grüner Farbe. Gib den Winkeln Namen.
2. Markiere die gesuchten Werte mit roter Farbe.
3. Bestimme soweit wie möglich alle sich ergebenden anderen Winkel und gib ihnen Namen. In dieser Aufgabe:
   $\beta_1 = 90° - \alpha = 90° - 54{,}2° = 35{,}8°$
   $\beta_2 = \beta - \beta_1 = 62{,}5° - 35{,}8° = 26{,}7°$
   $\gamma = 90° - \beta_2 = 90° - 26{,}7° = 63{,}3°$
4. Überlege jetzt, auf welchen Wegen du an die gesuchte Strecke herankommst. Bei dieser Aufgabe musst du zunächst die Strecke $\overline{BE}$ und dann die Strecke $\overline{EC}$ bestimmen, damit du mit dem Satz des Pythagoras an die gesuchte Strecke $\overline{CD}$ herankommst.
5. Berechnung von $\overline{BE}$:
   $sin\alpha = \frac{\overline{AE}}{\overline{BE}}$
   $sin54{,}2° = \frac{6{,}1}{\overline{BE}}$ | $\cdot \overline{BE}$
   $\overline{BE} \cdot sin54{,}2° = 6{,}1$ | $: sin54{,}2°$
   $\overline{BE} = \frac{6{,}1}{sin54{,}2°} = 7{,}521$
6. Berechnung von $\overline{EC}$:
   $sin\gamma = \frac{\overline{BE}}{\overline{EC}}$
   $sin63{,}3° = \frac{7{,}521}{\overline{EC}}$ | $\cdot \overline{EC}$
   $\overline{EC} \cdot sin63{,}3° = 7{,}521$ | $: sin63{,}3°$
   $\overline{EC} = \frac{7{,}521}{sin63{,}3°} = 8{,}419$
7. Berechnung von $\overline{CD}$ mit dem Satz des Pythagoras:
   $\overline{EC}^2 = \overline{ED}^2 + \overline{CD}^2$
   $\overline{CD}^2 = \overline{EC}^2 - \overline{ED}^2$ | Satz des Pythagoras
   $\overline{CD}^2 = 8{,}419^2 - 4{,}9^2 = 46{,}87$ | $\sqrt{}$
   $\overline{CD} = 6{,}85$
   Die Strecke $\overline{CD}$ ist $6{,}85\ cm$ lang.

Lösung A2

<u>Lösungslogik</u> (einfach)

Berechnung der Strecke $\overline{DB}$ als Höhe des Dreiecks ABD mit gegebener Fläche A_{ABD} und der Grundseite $\overline{DA}$.
Berechnung der Strecke $\overline{DC}$ über den Kosinussatz.
Berechnung der Winkels δ_1 über den Sinussatz.



Klausuraufschrieb

$\overline{DB}$: $A_{ABD} = \frac{1}{2} \cdot \overline{DA} \cdot \overline{DB}$ | $\cdot 2$
$2A_{ABD} = \overline{DA} \cdot \overline{DB}$ | $: \overline{DA}$
$\overline{DB} = \frac{2A_{ABD}}{\overline{DA}}$
$\overline{DB} = \frac{2 \cdot 138{,}9}{12{,}4} = 22{,}4\ cm$

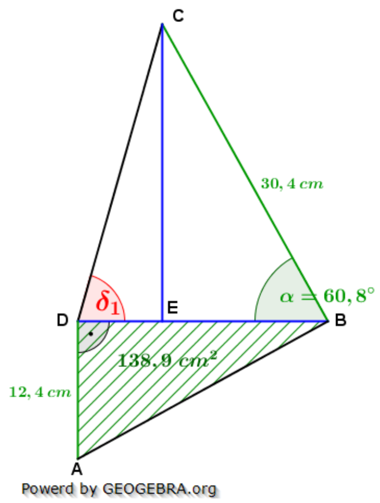
$\overline{DC}$: $\overline{DC}^2 = \overline{DB}^2 + \overline{BC}^2 - 2 \cdot \overline{DB} \cdot \overline{BC} \cdot cos\alpha$ | Kosinussatz
$\overline{DC}^2 = 22,4^2 + 30,4^2 - 2 \cdot 22{,}4 \cdot 30{,}4 \cdot cos60{,}8°$
$\overline{DC}^2 = 761{,}50$ | $\sqrt{\ }$
$\overline{DC} = 27{,}6$

δ_1: $\frac{sin\delta_1}{\overline{BC}} = \frac{sin\alpha}{\overline{DC}}$ | Sinussatz
$sin\delta_1 = \frac{sin\alpha}{\overline{DC}} \cdot \overline{BC}$ | $\cdot \overline{BC}$
$sin\delta_1 = \frac{sin60{,}8°}{27{,}6} \cdot 30{,}4 = 0{,}9615$
$\delta_1 = sin^{-1}(0{,}9615) = 74{,}05°$

Der Winkel δ_1 beträgt etwa 74°.

<u>Lösungslogik</u> (umständlich)

Berechnung der Strecke $\overline{DB}$ als Höhe des Dreiecks ABD mit gegebener Fläche A_{ABD} und der Grundseite $\overline{DA}$.
Berechnung der Höhe $\overline{CE}$ im Dreieck über den $sin\alpha$.
Berechnung der Strecke $\overline{BE}$ über den Satz des Pythagoras.
Berechnung der Strecke $\overline{DE}$ als Differenz von $\overline{DB}$ und $\overline{BE}$.
Berechnung von δ_1 über den tan.



<u>Klausuraufschrieb</u>

$\overline{DB}$: $A_{ABD} = \frac{1}{2} \cdot \overline{DA} \cdot \overline{DB}$ | $\cdot 2$
$2A_{ABD} = \overline{DA} \cdot \overline{DB}$ | $: \overline{DA}$
$\overline{DB} = \frac{2A_{ABD}}{\overline{DA}}$
$\overline{DB} = \frac{2 \cdot 138{,}9}{12{,}4} = 22{,}4\ cm$

$\overline{CE}$: $sin\alpha = \frac{\overline{CE}}{\overline{BC}}$ | $\cdot \overline{BC}$
$\overline{CE} = \overline{BC} \cdot sin\alpha = 30{,}4 \cdot sin60{,}8° = 26{,}5368$

$\overline{BE}$: $\overline{BC}^2 = \overline{CE}^2 + \overline{BE}^2$

$\overline{BE}^2 = \overline{BC}^2 - \overline{CE}^2$ | Satz des Pythagoras

$\overline{BE}^2 = 30{,}4^2 - 26{,}5368^2 = 219{,}9582$

$\overline{BE} = \sqrt{219{,}9582} = 14{,}831$

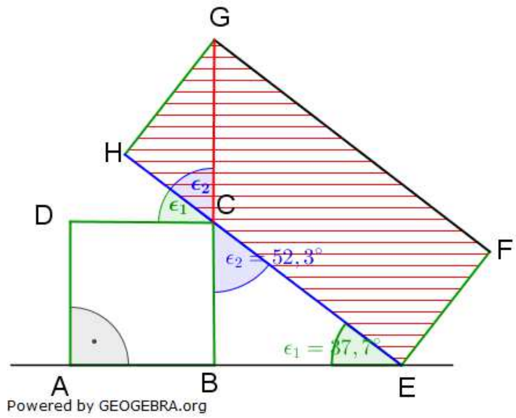
$\overline{DE}$: $\overline{DE} = \overline{DB} - \overline{BE} = 22{,}4 - 14{,}831 = 7{,}569$

δ_1: $tan\delta_1 = \frac{\overline{CE}}{\overline{DE}} = \frac{26{,}5368}{7{,}569} = 3{,}506$

$\delta_1 = \tan^{-1}(3{,}506) = 74{,}08°$

Der Winkel δ_1 beträgt etwa $74°$.

Lösung A3



<u>Lösungslogik</u>

Berechnung von ϵ_2.
Berechnung von $\overline{CG}$.
Berechnung Abstand $\overline{BG}$.
Berechnung von $\overline{HC}$.
Berechnung von $\overline{CE}$.
Berechnung von A_{EFGH}.
Berechnung von A_{CEFG}.
Berechnung von $A_{CEFG}:A_{EFGH}$.

<u>Klausuraufschrieb</u>

ϵ_2: $\epsilon_2 = 90° - \epsilon_1 = 90° - 37{,}7°$

$\epsilon_2 = 52{,}3°$

$\overline{CG}$: $sin\epsilon_2 = \frac{\overline{HG}}{\overline{CG}}$ | $\cdot \overline{CG}$

$\overline{CG} \cdot sin\epsilon_2 = \overline{HG}$ | $: sin\epsilon_2$

$\overline{CG} = \frac{\overline{HG}}{sin\epsilon_2} = \frac{4{,}9}{sin52{,}3°} = 6{,}19$

$\overline{BG}$: $\overline{BG} = \overline{CG} + \overline{BC} = 6{,}19 + 4{,}9 = 11{,}09$

Der Abstand des Punktes G von $\overline{AE}$ beträgt etwa $11{,}1\ cm$.

$\overline{HC}$: $\overline{HC}^2 = \overline{CG}^2 - \overline{GH}^2 = 6{,}19^2 - 4{,}9^2 = 14{,}31$

$HC = \sqrt{14{,}31} = 3{,}78\ cm$

$\overline{CE}$: $sin\epsilon_1 = \frac{\overline{BC}}{\overline{CE}}$ | $\cdot \overline{CE}$

$\overline{CE} \cdot sin\epsilon_1 = \overline{BC}$ | $: sin\epsilon_1$

$\overline{CE} = \frac{\overline{BC}}{sin\epsilon_1} = \frac{4{,}9}{sin37{,}7°} = 8{,}01$

A_{EFGH}: $A_{EFGH} = \overline{HG} \cdot (\overline{HC} + \overline{CE}) = 4{,}9 \cdot (3{,}78 + 8{,}01) = 57{,}77\ cm^2$

A_{CEFG}: $A_{CEFG} = \frac{1}{2} \cdot (\overline{GF} + \overline{CE}) \cdot \overline{HG} = \frac{1}{2} \cdot (3{,}78 + 8{,}01 + 8{,}01) \cdot 4{,}9$

$A_{CEFG} = 48{,}51\ cm^2$

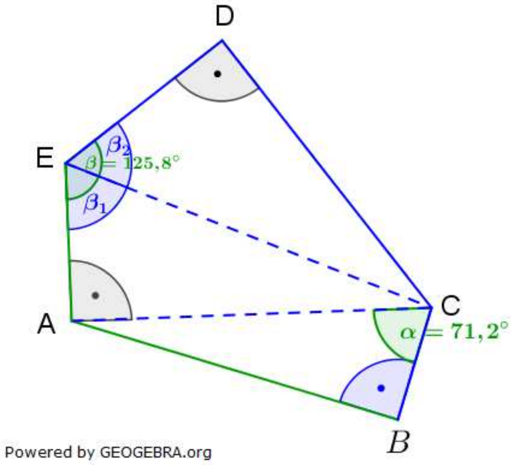
$\frac{A_{CEFG}}{A_{EFGH}}$: $\frac{A_{CEFG}}{A_{EFGH}} = \frac{48{,}51}{57{,}77} = 0{,}8397 \approx 84\ \%$

Das Trapez $CEFG$ hat etwa $84\ \%$ des Flächeninhalts des Rechtecks $EFGH$.

Lösung A4

Lösungslogik

Berechnung von $\overline{BC}$.
Berechnung von $\overline{AC}$.
Berechnung von β_1.
Berechnung von β_2.
Berechnung von $\overline{EC}$.
Berechnung von $\overline{ED}$.
Berechnung von $\overline{DC}$.
Berechnung von U_{ABCDE}.



Klausuraufschrieb

$\overline{BC}$: $\quad tan\alpha = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} \quad | \quad \cdot \overline{BC}$

$\overline{BC} \cdot tan\alpha = \overline{AB} \quad | \quad : tan\alpha$

$\overline{BC} = \frac{\overline{AB}}{tan\alpha} = \frac{11{,}6}{tan 71{,}2°} = 3{,}95\ cm$

$\overline{AC}$: $\quad \overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 \quad |$ Satz des Pythagoras

$\overline{AC}^2 = 11,6^2 + 3{,}95^2 = 150{,}16$

$\overline{AC} = \sqrt{150{,}16} = 12{,}25$

β_1: $\quad tan\beta_1 = \frac{\overline{AC}}{\overline{AE}} = \frac{12{,}25}{5{,}4} = 2{,}2685$

$\beta_1 = tan^{-1}(2{,}2685) = 66{,}21°$

β_2: $\quad \beta_2 = \beta - \beta_1 = 125{,}8° - 66{,}21° \approx 59{,}6°$

$\overline{EC}$: $\quad \overline{EC}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{AE}^2 = 12{,}25^2 + 5,4^2 \quad |$ Satz des Pythagoras

$\overline{EC} = \sqrt{179{,}2225} = 13{,}39\ cm$

$\overline{ED}$: $\quad cos\beta_2 = \frac{\overline{ED}}{\overline{EC}} \quad | \quad \cdot \overline{EC}$

$\overline{ED} = \overline{EC} \cdot cos\beta_2 = 13{,}39 \cdot cos 59{,}6° = 6{,}78\ cm$

$\overline{DC}$: $\quad \overline{DC}^2 = \overline{EC}^2 - \overline{ED}^2 = 13{,}39^2 - 6{,}78^2 \quad |$ Satz des Pythagoras

$\overline{DC} = \sqrt{133{,}3237} = 11{,}55\ cm$

u_{ABCDE}: $\quad u_{ABCDE} = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{DE} + \overline{AE}$

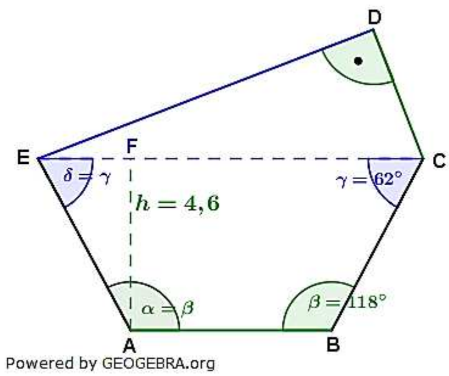
$u_{ABCDE} = 11{,}6 + 3{,}95 + 11{,}55 + 6{,}78 + 5{,}4 = 39{,}28$

Der Umfang des Fünfecks $ABCDE$ beträgt etwa $39{,}3\ cm$.

Lösung A5

Lösungslogik

Das Viereck $ABCE$ ist ein gleichschenkliges Trapez mit einem Basiswinkel $\beta = 118°$. Somit gilt: $\gamma = \frac{360° - 2 \cdot 118°}{2}$ und $\delta = \gamma$.
Berechnung von $\overline{EF}$ über den $tan\delta$.
Berechnung von $\overline{EC}$.
Berechnung von $\overline{ED}$ mit dem Satz des Pythagoras.
Berechnung der Fläche des Dreiecks ECB.
Berechnung der Fläche des Trapezes $ABCE$.
Berechnung der Fläche des Fünfecks $ABCDE$ als Summe aus Fläche Dreieck und Fläche Trapez.



<u>Klausuraufschrieb</u>

γ: $\quad \gamma = \frac{360°-2\cdot 118°}{2} = 62°$

$\delta = \gamma = 62°$.

$\overline{EF}$: $\quad tan\delta = \frac{h}{\overline{EF}} \qquad | \qquad \cdot \overline{EF};\ : tan\delta$

$\overline{EF} = \frac{h}{tan\delta} = \frac{4{,}6}{tan62°} = 2{,}45$

$\overline{EC}$: $\quad \overline{EC} = \overline{AB} + 2 \cdot \overline{EF} = 5{,}4 + 2 \cdot 2{,}45 = 10{,}3$

$\overline{ED}$: $\quad \overline{ED} = \sqrt{\overline{EC}^2 - \overline{DC}^2} = \sqrt{10{,}3^2 - 3{,}7^2} \qquad |$ Satz des Pythagoras

$\overline{ED} = \sqrt{92{,}4} = 9{,}61$

A_{ECB}: $\quad A_{ECB} = \frac{1}{2} \cdot \overline{CD} \cdot \overline{ED} = \frac{1}{2} \cdot 3{,}7 \cdot 9{,}61 = 17{,}78\ cm^2$

A_{ABCE}: $\quad A_{ABCE} = \frac{1}{2} \cdot \left(\overline{AB} + \overline{EC}\right) \cdot h = \frac{1}{2} \cdot (5{,}4 + 10{,}3) \cdot 4{,}6 = 36{,}11\ cm^2$

A_{ABCDE}: $\quad A_{ABCDE} = A_{ECB} + A_{ABCE} = 17{,}78 + 36{,}11 = 53{,}89\ cm^2$

Das Fünfeck $ABCDE$ hat einen Flächeninhalt von etwa $53{,}9\ cm^2$.

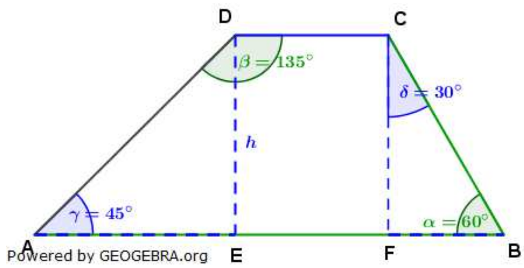
Lösung A6

<u>Lösungslogik</u>

Die Fläche des Trapezes $ABCD$ bestimmt sich aus

$$A_{ABCD} = \frac{\overline{AB} + \overline{DC}}{2} \cdot h.$$

Berechnung der Winkel γ und δ.
Berechnung von h über $sin\alpha$.
Berechnung von $\overline{FB}$ mit dem Satz des Pythagoras.
Das Dreieck AED ist gleichschenklig, also ist $\overline{AE} = h$.
Berechnung $\overline{DC}$ aus $\overline{AB} - \overline{AE} - \overline{FB}$.
Berechnung der Fläche des Trapezes $ABCD$.



<u>Klausuraufschrieb</u>

γ: $\quad \gamma = \beta - 90° = 45°$

δ: $\quad \delta = 90° - \alpha = 30°$

h: $\quad sin\alpha = \frac{h}{\overline{BC}} \qquad | \qquad \cdot \overline{BC}$

$h = \overline{BC} \cdot sin\alpha = 2e \cdot sin60° = 2e \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} = e\sqrt{3}$

$\overline{FB}$: $\quad \overline{FB} = \sqrt{\overline{BC}^2 - h^2} = \sqrt{(2e)^2 - \left(e\sqrt{3}\right)^2} \qquad |$ Satz des Pythagoras

$\overline{FB} = \sqrt{4e^2 - 3e^2} = \sqrt{e^2} = e$

$\overline{AE}$: $\quad \overline{AE} = h = e\sqrt{3}$

$\overline{DC}$: $\quad \overline{DC} = \overline{AB} - \overline{AE} - \overline{FB} = e\left(4 + \sqrt{3}\right) - e\sqrt{3} - e = 4e + e\sqrt{3} - e\sqrt{3} - e = 3e$

A_{ABCD}: $\quad A_{ABCD} = \frac{e\left(4+\sqrt{3}\right)+3e}{2} \cdot e\sqrt{3} = \frac{4e+e\sqrt{3}+3e}{2} \cdot e\sqrt{3}$

$= \frac{\left(7e+e\sqrt{3}\right)\cdot e\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}\left(7e^2\sqrt{3} + 3e^2\right) = \frac{e^2}{2}\left(7\sqrt{3} + 3\right)$

$A_{ABCD} = \frac{e^2}{2} \cdot \left(7\sqrt{3} + 3\right)$ **q.e.d.**