

# RS-Abschluss Übungsaufgaben zur Trigonometrie

## Themenerläuterung

In diesem Kapitel bekommst du Zeichnungen von zusammengesetzten Figuren aus Dreiecken, Quadraten, Rechtecken, Parallelogrammen, Trapezen und eventuell Kreisbögen. Einige Streckenlängen und/oder einige Winkel der Figuren werden vorgegeben. Du sollst an Hand dieser Angaben andere Strecken, Winkel und Flächeninhalte von Teilfiguren berechnen.



Die Lösung dieser Aufgaben ist in den meisten Fällen nur über Teildreiecke der Figuren möglich. Dabei handelt es sich um rechtwinklige Dreiecke oder allgemeine Dreiecke. Oftmals musst du diese Dreiecke durch geeignete Hilfslinien bilden, um an die geforderten Ergebnisse zu gelangen. Dabei beachte bitte Folgendes:

Bei **rechtwinkligen** Dreiecken verwendest du die trigonometrischen Funktionen *sin*, *cos* und *tan* sowie den Satz des Pythagoras.

Bei allgemeinen Dreiecken, also Dreiecken, in denen kein rechter Winkel vorhanden ist, benutzt du am schnellsten den Sinussatz bzw. Kosinussatz und für Flächenberechnungen die Formel des trigonometrischen Flächeninhalts (siehe nachfolgend „Die wichtigsten benötigten Formeln“). Beachte auch bitte: Alle erforderlichen Formeln stehen in der Formelsammlung mit Ausnahme des Kosinussatzes. Da die Verwendung des Sinus- und des Kosinussatzes in vielen Fällen den Rechenweg wesentlich vereinfacht, solltest du dir den Kosinussatz gut einprägen. Im nächsten Thema wird der Sinus- und Kosinussatz sowie der trigonometrische Flächeninhalt nochmals ausführlich erläutert.

Bei den einzelnen Aufgaben erhältst du jeweils einen Hinweis/Tipp, ob eine schnellere Lösung mit dem Sinus- bzw. Kosinussatz möglich ist. Die Lösungsteile der Aufgaben sind in diesen Fällen aufgeteilt in die einfache Lösung und in die herkömmliche – als umständlich gekennzeichnet – Lösung.

## Die wichtigsten benötigten Formeln

### 1. Satz des Pythagoras

Ist im rechtwinkligen Dreieck  $c$  die Hypotenuse (= längste Seite) und  $a$  und  $b$  die beiden Katheten, so gilt:

$$c^2 = a^2 + b^2 \quad \text{bzw.} \quad c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$a^2 = c^2 - b^2 \quad \text{bzw.} \quad a = \sqrt{c^2 - b^2}$$

$$b^2 = c^2 - a^2 \quad \text{bzw.} \quad b = \sqrt{c^2 - a^2}$$

### 2. Die trigonometrischen Formeln

$$\sin(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}$$

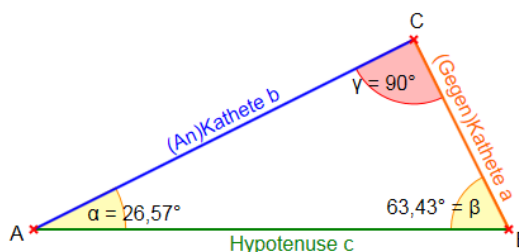
$$\cos(\alpha) = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}$$

$$\tan(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}}$$

Die Hypotenuse ist immer die längste Seite im rechtwinkligen Dreieck und liegt dem rechten Winkel gegenüber.

Die **Gegenkathete** ist die Kathete, die dem Winkel, um den es geht, **gegenüber** liegt.

Die **Ankathete** ist die Kathete, die an dem Winkel, um den es geht, **anliegt**.



# RS-Abschluss Übungsaufgaben zur Trigonometrie

## 3. Die Flächenformeln

Dreieck:  $A = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h_g$  mit  $g$  als Grundseite und  $h_g$  als Höhe auf die Grundseite. Beim rechtwinkligen Dreieck ist die eine Kathete die Grundseite und die andere Kathete die Höhe auf diese Grundseite.

Quadrat:  $A = a^2$  mit  $a$  als der Seitenlänge.

Rechteck:  $A = a \cdot b$  mit  $a$  und  $b$  als die beiden Seitenlängen des Rechtecks.

Parallelogramm:  $A = a \cdot h_a$  bzw.  $b \cdot h_b$  mit  $a$  bzw.  $b$  als eine der beiden Seiten des Parallelogramms und  $h_a$  bzw.  $h_b$  als Höhe auf die jeweilige Seite.

Trapez:  $A = \frac{1}{2}(a + c) \cdot h$  mit  $a$  und  $c$  als den beiden parallelen Seiten des Trapezes und  $h$  als Höhe auf diese Seiten.

Drachen/Raute:  $A = \frac{1}{2} \cdot e \cdot f$  mit  $e$  und  $f$  als den beiden Diagonalen.

## 4. Der Sinussatz

Im allgemeinen Dreieck gilt  $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$

Diese allgemeine Form des Sinussatzes lässt sich aber nur sehr schwer merken.

Deshalb bilden wir uns eine

„Eselsbrücke“.

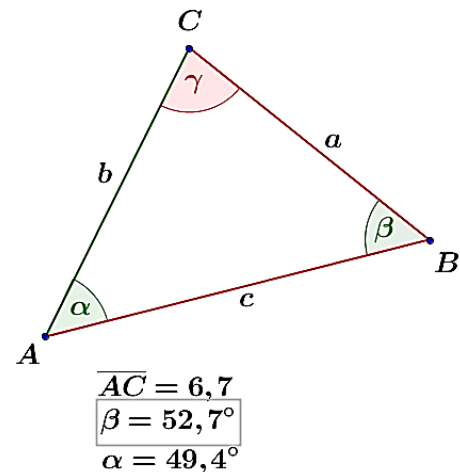
Für die Anwendung des Sinussatzes brauchst du eine bekannte Seite (im Beispiel die Seite  $\overline{AC}$ ) und den dieser Seite gegenüberliegenden bekannten Winkel (im Beispiel ist dies  $\beta$ ), eine zweite unbekannte Seite (im Beispiel die Strecke  $\overline{BC}$ ) und einen dieser Seite gegenüberliegenden bekannten Winkel (im Beispiel  $\alpha$ ). Mit dem Sinussatz kannst du nun die unbekannte Seite direkt ausrechnen, indem du schreibst:

$$\frac{\text{bekannte Seite}}{\sin(\text{gegenüberliegender Winkel})} = \frac{\text{unbekannte Seite}}{\sin(\text{gegenüberliegender Winkel})}$$

$$\begin{aligned} \text{Im Beispiel } \frac{\overline{AC}}{\sin\beta} &= \frac{\overline{BC}}{\sin\alpha} & | \cdot \sin\alpha \\ \overline{BC} &= \frac{\overline{AC}}{\sin\beta} \cdot \sin\alpha & | \text{ Zahlen einsetzen} \\ \overline{BC} &= \frac{6,7}{\sin 52,7^\circ} \cdot \sin 49,4^\circ = 6,4 \end{aligned}$$

Über die Winkelsumme des Dreiecks erhältst du leicht den Winkel  $\gamma$  mit  $\gamma = 180^\circ - 49,4^\circ - 52,7^\circ = 77,9^\circ$ , und schon kannst du mit dem Sinussatz die Strecke  $\overline{AB}$  bestimmen. Jetzt ist wie zuvor  $\overline{AC}$  die bekannte Seite und  $\beta$  der gegenüberliegende bekannte Winkel,  $\overline{AB}$  die unbekannte Seite und  $\gamma$  der gegenüberliegende bekannte Winkel, also

$$\begin{aligned} \frac{\overline{AC}}{\sin\beta} &= \frac{\overline{AB}}{\sin\gamma} & | \cdot \sin\gamma \\ \overline{AB} &= \frac{\overline{AC}}{\sin\beta} \cdot \sin\gamma & | \text{ Zahlen einsetzen} \\ \overline{AB} &= \frac{6,7}{\sin 52,7^\circ} \cdot \sin 77,9^\circ = 8,25 \end{aligned}$$



Berechne die fehlenden Größen des Dreiecks sowie seinen Flächeninhalt

# RS-Abschluss Übungsaufgaben

## zur Trigonometrie

Natürlich kannst du mit dem Sinussatz auch unbekannte Winkel bestimmen. Hierzu haben wir jetzt die bekannte Strecke  $\overline{BC}$  und den bekannten gegenüberliegenden Winkel  $\alpha$ , die bekannte Strecke  $\overline{AC}$  und den unbekannt gegenüberliegenden Winkel  $\beta$ . Wie bilden nun das Verhältnis über den Sinussatz mit

$$\frac{\sin(\text{gegenüberliegender Winkel})}{\text{bekannte Seite}} = \frac{\sin(\text{gegenüberliegender Winkel})}{\text{bekannte Seite}}$$

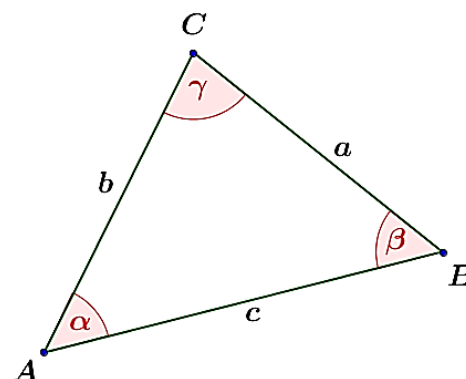
Im Beispiel:

$$\frac{\sin \alpha}{\overline{BC}} = \frac{\sin \beta}{\overline{AC}} \quad | \quad \cdot \overline{AC}$$

$$\sin \beta = \frac{\sin \alpha}{\overline{BC}} \cdot \overline{AC} \quad | \quad \text{Zahlen einsetzen}$$

$$\sin \beta = \frac{\sin 49,4^\circ}{6,4} \cdot 6,7 = 0,79486$$

$$\beta = \sin^{-1}(0,79486) = 52,6^\circ$$



$$\overline{AC} = 6,7$$

$$\overline{BC} = 6,4$$

$$\overline{AB} = 8,25$$

Berechne die fehlenden Größen des Dreiecks sowie seinen Flächeninhalt

### 5. Der Kosinussatz

Im allgemeinen Dreieck gilt  $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \gamma$  bzw.  $c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \gamma}$

Diese allgemeine Form des Kosinussatzes lässt sich auch nur sehr schwer merken. Deshalb bilden wir uns erneut eine „Eselsbrücke“.

Für die Anwendung des Kosinussatzes brauchst du zwei bekannte Seite (im Beispiel die Seiten  $\overline{AC}$  und  $\overline{BC}$ ) und den von diesen Seiten eingeschlossenen bekannten Winkel (im Beispiel ist dies  $\gamma$ ) Mit dem Kosinussatz kannst du nun die unbekannte dritte Seite direkt ausrechnen, indem du schreibst:

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 - 2 \cdot \overline{AC} \cdot \overline{BC} \cdot \cos \gamma$$

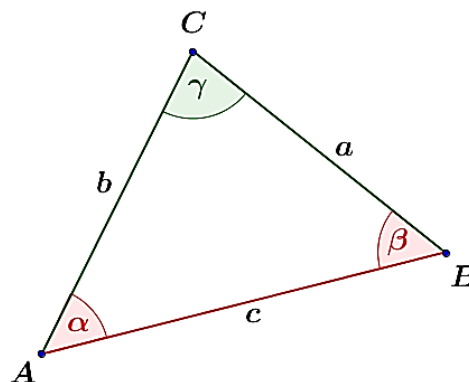
$$\quad | \quad \text{Zahlen einsetzen}$$

$$\overline{AB}^2 = 6,7^2 + 6,4^2 - 2 \cdot 6,7 \cdot 6,4 \cdot \cos 77,9^\circ$$

$$= 67,8731 \quad | \quad \sqrt{\quad}$$

$$\overline{AB} = \sqrt{67,8731} = 8,24$$

Die restlichen Werte des Dreiecks können nun mühelos über den Sinussatz ermittelt werden.



$$\overline{AC} = 6,7$$

$$\overline{BC} = 6,4$$

$$\gamma = 77,9^\circ$$

Berechne die fehlenden Größen des Dreiecks sowie seinen Flächeninhalt

# RS-Abschluss Übungsaufgaben

## zur Trigonometrie

Natürlich kannst du mit dem Kosinussatz auch unbekannte Winkel bestimmen. Hierzu müssen alle drei Seiten des Dreiecks bekannt sein.

Wir entscheiden uns zur Berechnung des Winkels  $\gamma$  und bilden:

$$\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 - 2 \cdot \overline{AC} \cdot \overline{BC} \cdot \cos\gamma$$

| Zahlen einsetzen

$$8,25^2 = 6,7^2 + 6,4^2 - 2 \cdot 6,7 \cdot 6,4 \cdot \cos\gamma$$

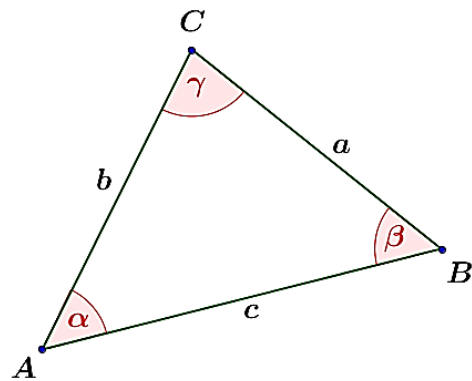
$$68,06 = 85,85 - 85,76 \cdot \cos\gamma \quad | -85,85$$

$$-17,79 = -85,76 \cdot \cos\gamma \quad | : -85,76$$

$$\cos\gamma = 0,20744$$

$$\gamma = \cos^{-1}(0,20744) = 78^\circ$$

Die restlichen Werte des Dreiecks lassen sich dann wieder einfach über den Sinussatz berechnen.



$$\overline{AC} = 6,7$$

$$\overline{BC} = 6,4$$

$$\overline{AB} = 8,25$$

Berechne die fehlenden Größen des Dreiecks sowie seinen Flächeninhalt

### 6. Trigonometrischer Flächeninhalt

Im allgemeinen Dreieck gilt für dessen Flächeninhalt:

$$A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin\gamma$$

$$A = \frac{1}{2} \cdot c \cdot b \cdot \sin\alpha$$

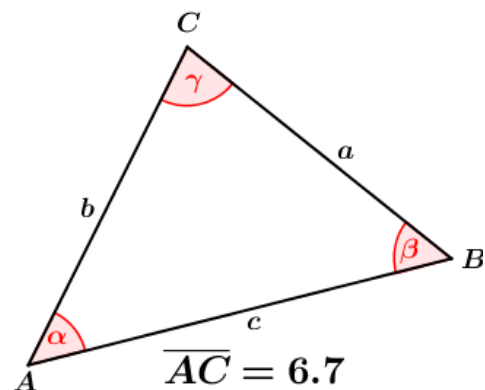
$$A = \frac{1}{2} \cdot c \cdot a \cdot \sin\beta$$

Auch diese Formel ist nicht sehr einprägsam und wir bilden wieder eine „Eselsbrücke“.

Du benötigst zur Flächenberechnung mithilfe des trigonometrischen Flächeninhaltes zwei bekannte Seiten (im Beispiel etwa  $\overline{AC}$  und  $\overline{BC}$ ) und den von diesen Seiten eingeschlossenen, bekannten Winkel (im Beispiel ist dies  $\gamma$ ).

$$A = \frac{1}{2} \cdot \overline{AC} \cdot \overline{BC} \cdot \sin\gamma$$

$$A = \frac{1}{2} \cdot 6,7 \cdot 6,4 \cdot \sin 77,9^\circ = 20,96 \text{ FE}$$



$$\overline{AC} = 6,7$$

$$\overline{BC} = 6,4$$

$$\gamma = 77,9^\circ$$

### 7. Besondere Werte für sin, cos und tan

In bestimmten Aufgaben sollst du den Nachweis eines Flächeninhalts, des Umfangs einer Figur, der Länge einer Strecke oder gar dem Wert eines **sin**, **cos** bzw. **tan** führen in Abhängigkeit einer sogenannten „Formvariablen“.

Diese Formvariable wird mit dem Buchstaben "e" bezeichnet. In diesen Aufgaben wird verlangt, dass du den Nachweis ohne gerundete Werte führen sollst. Dies bedeutet für dich, dass du keinen Taschenrechner verwenden kannst und die Aufgabe manuell lösen musst.

# RS-Abschluss Übungsaufgaben

## zur Trigonometrie

In diesen Aufgaben handelt es sich stets nur um Winkel der Größe  $30^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $60^\circ$  bzw.  $90^\circ$ . Für diese Winkelgrößen gibt es besondere Werte, die in nachstehender Tabelle aufgeführt sind. Diese Tabelle findest du auch in deiner Formelsammlung.

$\alpha$	$0^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$90^\circ$	$120^\circ$	$135^\circ$	$150^\circ$	$180^\circ$
$\sin\alpha$	0	0,5	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	0,5	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	0,5	0	-0,5	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	-1
$\tan\alpha$	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	--	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{3}\sqrt{3}$	0

Da bei diesen Winkelwerten Wurzeln vorkommen – es kommt hier nur die  $\sqrt{2}$  bzw.  $\sqrt{3}$  vor – kann es vorkommen, dass du zum Erreichen der korrekten Lösung der Aufgabe oftmals den Nenner eines Bruchs rational machen musst, weshalb dies hier nochmals aufgeführt wird.

Angenommen, du erhältst in einer Rechnung ein Zwischenergebnis wie etwa  $\frac{3}{\sqrt{3}}$ . Das geforderte Ergebnis laut Aufgabe soll aber  $\sqrt{3}$  sein. Du musst jetzt erkennen, dass man eine Wurzel im Nenner eines Bruchs nicht stehenlassen darf, die Wurzel im Nenner muss verschwinden. Dies wird als „Rationalmachen eines Nenners“ verstanden, was so erfolgt, dass du den Bruch mit der Wurzel im Nenner um diesen Wert erweitern musst. Für unser

Beispiel  $\frac{3}{\sqrt{3}}$  bedeutet dies:

$$\begin{array}{l} \frac{3}{\sqrt{3}} \\ \frac{3 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} \\ \frac{3 \cdot \sqrt{3}}{3} \\ \frac{3 \cdot \sqrt{3}}{3} = \sqrt{3} \end{array} \quad \begin{array}{l} | \text{ Erweitern mit } \sqrt{3} \\ | \text{ Wurzel im Nenner auflösen} \\ | \text{ und kürzen} \end{array}$$

Wie du siehst, ist also  $\frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$ .

### Übungsaufgaben im Stil der Abschlussprüfung



#### Aufgabe A1

Gegeben ist das Fünfeck  $ABCDE$  mit:

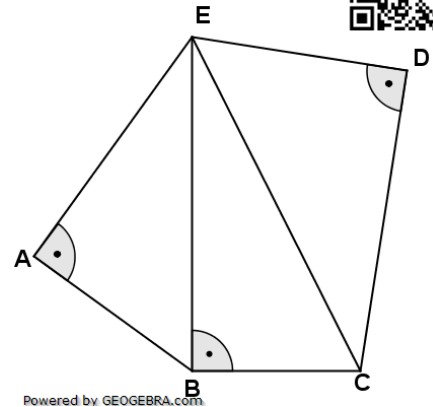
$$\overline{AE} = 6,1 \text{ cm}$$

$$\overline{DE} = 4,9 \text{ cm}$$

$$\text{Winkel } EBA = 54,2^\circ$$

$$\text{Winkel } AEC = 62,5^\circ$$

Berechnen Sie die Länge  $\overline{CD}$ .



#### Aufgabe A2

Gegeben ist das Viereck  $ABCD$  mit:

$$\overline{AD} = 12,4 \text{ cm}$$

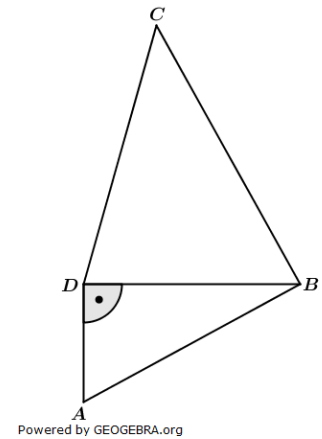
$$A_{ABD} = 138,9 \text{ cm}^2$$

$$\overline{BC} = 30,4 \text{ cm}$$

$$\text{Winkel } CBD = 60,8^\circ$$

Berechnen Sie den Winkel  $BDC$  ( $\delta_1$ )

**Tipp:** Kosinussatz und Sinussatz führen zur schnellsten Lösung  $\delta_1 \approx 74^\circ$ .



#### Aufgabe A3

Gegeben sind das Quadrat  $ABCD$  und das Rechteck  $EFGH$ .

Die Ecke  $C$  des Quadrats liegt auf  $\overline{HE}$ .

Ecke  $G$  des Rechtecks liegt auf  $\overline{BC}$ .

Ecke  $B$  liegt auf  $\overline{AE}$ .

Es gilt:

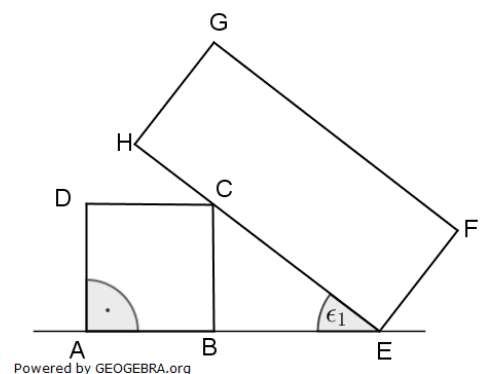
$$\overline{AB} = 4,9 \text{ cm}$$

$$\overline{GH} = \overline{AB}$$

$$\epsilon_1 = 37,7^\circ$$

Berechnen Sie den Abstand des Punktes  $G$  von  $\overline{AE}$ .

Ermitteln Sie den prozentualen Anteil der Fläche von Trapez  $CEFG$  an der Fläche des Rechtecks  $EFGH$ .



Lösung:  $\overline{BG} = 11,1 \text{ cm}$ ;  $CEFG : EFGH = 84 \%$

# RS-Abschluss Übungsaufgaben zur Trigonometrie

## Aufgabe A4

Im Fünfeck  $ABCDE$  gilt:

$$\overline{AB} = 11,6 \text{ cm}$$

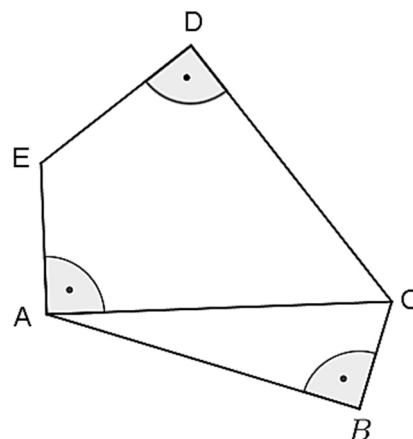
$$\text{Winkel } ACB = 71,2^\circ$$

$$\overline{AE} = 5,4 \text{ cm}$$

$$\text{Winkel } AED = 125,8^\circ$$

Berechnen Sie den Umfang des Fünfecks  $ABCDE$ .

$$\text{Lösung: } u_{ABCDE} = 39,3 \text{ cm}$$



Powered by GEOGEBRA.org

## Aufgabe A5

Das Fünfeck  $ABCDE$  besteht aus dem gleichschenkligen Trapez  $ABCE$  und dem rechtwinkligen Dreieck  $CBA$ .

Es gilt:

$$\overline{AB} = 5,4 \text{ cm}$$

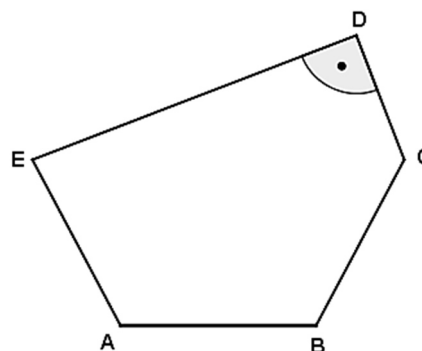
$$\text{Winkel } CBA = 118^\circ$$

$$\overline{CD} = 3,7 \text{ cm}$$

Der Abstand von  $\overline{AB}$  zu  $\overline{CE}$  beträgt  $4,6 \text{ cm}$ .

Berechnen Sie die Fläche des Fünfecks  $ABCDE$ .

$$\text{Lösung: } A_{ABCDE} = 53,9 \text{ cm}^2$$



Powered by GEOGEBRA.org

## Aufgabe A6

Gegeben ist das Trapez  $ABCD$  mit den parallel liegenden Seiten  $AB$  und  $CD$ .

Es gilt:

$$\overline{BC} = 2e$$

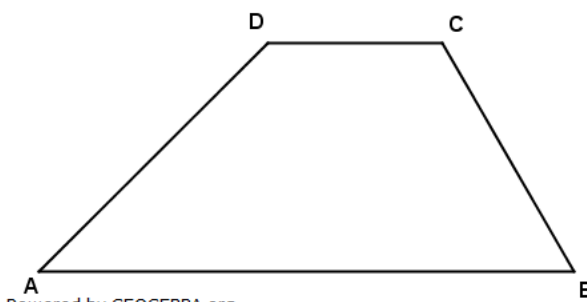
$$\overline{AB} = e \cdot (4 + \sqrt{3})$$

$$\text{Winkel } CBA = 60^\circ$$

$$\text{Winkel } ADC = 135^\circ$$

Zeigen Sie ohne Verwendung gerundeter Werte, dass für den Flächeninhalt des Trapezes gilt:

$$A = \frac{e^2}{2} (7\sqrt{3} + 3).$$



Powered by GEOGEBRA.org