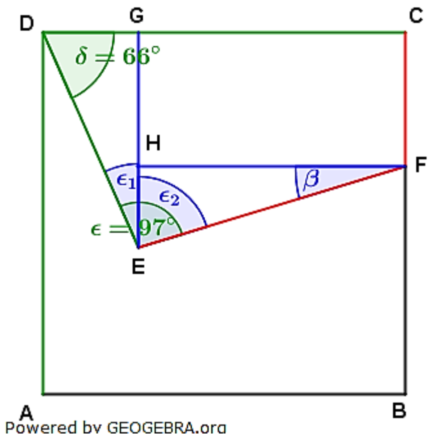
Lösung W1a/2010

Lösungslogik

Berechnung von ϵ_1 als Ergänzungswinkel im Dreieck EDG.
Berechnung von ϵ_2 aus der Differenz von ϵ und ϵ_1.
Berechnung von β als Ergänzungswinkel im Dreieck EFH.
Berechnung von $\overline{DG}$ über den $cos\delta$.
Berechnung von $\overline{EG}$ über den Satz des Pythagoras.
Berechnung von $\overline{EH}$ über den $tan\beta$.
Berechnung von $\overline{EF}$ über den Satz des Pythagoras.
Berechnung von $\overline{CF}$ aus der Differenz von $\overline{EG}$ und $\overline{EH}$.
Berechnung von u_{DEFC}.



Klausuraufschrieb

ϵ_1: $\epsilon_1 = 90° - \delta = 90° - 66° = 24°$
ϵ_2: $\epsilon_2 = \epsilon - \epsilon_1 = 97° - 24° = 73°$
β: $\beta = 90° - \epsilon_2 = 90° - 73° = 17°$

$\overline{DG}$: $cos\delta = \frac{\overline{DG}}{\overline{DE}}$ | $\cdot \overline{ED}$
$\overline{DG} = \overline{DE} \cdot cos\delta = 4{,}1 \cdot cos66° = 1{,}67$

$\overline{EG}$: $\overline{EG} = \sqrt{\overline{ED}^2 - \overline{DG}^2} = \sqrt{4,1^2 - 1{,}67^2}$ | Satz des Pythagoras
$\overline{EG} = \sqrt{14{,}0211} = 3{,}74$

$\overline{EH}$: $tan\beta = \frac{\overline{EH}}{\overline{DC}-\overline{DG}}$ | $\cdot (\overline{DC} - \overline{DG})$
$\overline{EH} = (\overline{DC} - \overline{DG}) \cdot tan\beta = (6{,}3 - 1{,}67) \cdot tan17° = 1{,}42$

$\overline{EF}$: $\overline{EF} = \sqrt{(\overline{DC} - \overline{DG})^2 + \overline{EH}^2} = \sqrt{(6{,}3 - 1{,}67)^2 + 1{,}42^2}$
$\overline{EF} = \sqrt{23{,}435} = 4{,}84$ | Satz des Pythagoras

$\overline{CF}$: $\overline{CF} = \overline{EG} - \overline{EH} = 3{,}74 - 1{,}42 = 2{,}32$

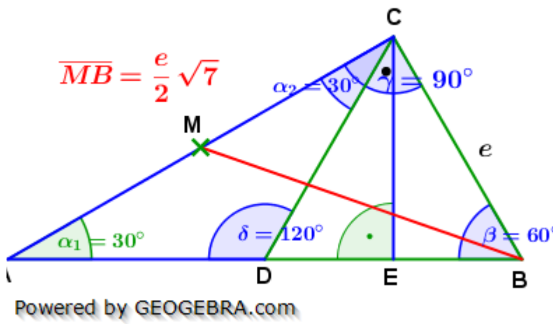
u_{DEFC}: $u_{DEFC} = \overline{DE} + \overline{DC} + \overline{CF} + \overline{EF} = 4{,}1 + 6{,}3 + 2{,}32 + 4{,}84 = 17{,}56$

Der Umfang des Vierecks $DEFC$ beträgt $17{,}6\ cm$.

Lösung W1b/2010

Lösungslogik

Das Dreieck DBC ist gleichseitig, somit sind alle Winkel $60°$ groß. Dadurch ergibt sich der Winkel ADC als Ergänzungswinkel zu $180°$ mit $\delta = 120°$.
Wegen $\delta = 120°$ ist $\alpha_2 = 30°$ und damit wiederum $\gamma = 90°$. Das Dreieck MBC ist also rechtwinklig und die Strecke $\overline{MB}$ ist dessen Hypothenuse.
Berechnung von $\overline{CE}$ als Höhe eines gleichseitigen Dreiecks mit der Seitenlänge e.
Berechnung von $\overline{AC}$ über den $sin30°$.



Berechnung von $\overline{MC}$.
Berechnung von $\overline{MB}$ über den Satz des Pythagoras.

Klausuraufschrieb

β: $\beta = 60°$ wegen gleichseitigem Dreieck DBC

δ : $\delta = 180° - 60° = 120°$

α_2 : $\alpha_2 = 180° - 120° - 30° = 30°$

γ : $\gamma = 30° + 60° = 90°$ das Dreieck MBC ist rechtwinklig

$\overline{CE}$: $\overline{CE} = \sqrt{\overline{CB}^2 - \left(\frac{\overline{CB}}{2}\right)^2} = \sqrt{e^2 - \frac{e^2}{4}} = \sqrt{\frac{3}{4}e^2}$ | Satz des Pythagoras

$\overline{CE} = \frac{e}{2}\sqrt{3}$

$\overline{AC}$: $sin30° = \frac{\overline{CE}}{\overline{AC}}$ | $\cdot \overline{AC}$; $: sin30°$

$\overline{AC} = \frac{\overline{CE}}{sin30°} = \frac{\frac{e}{2}\sqrt{3}}{\frac{1}{2}} = e\sqrt{3}$

$\overline{MC}$: $\overline{MC} = 0{,}5 \cdot \overline{AC} = \frac{1}{2}e\sqrt{3}$

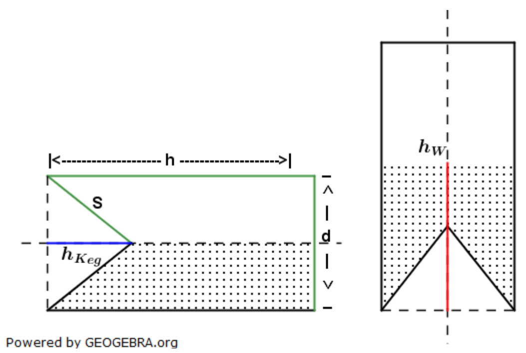
$\overline{MB}$: $\overline{MB} = \sqrt{\overline{MC}^2 + \overline{BC}^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}e\sqrt{3}\right)^2 + e^2} = \sqrt{\frac{3}{4}e^2 + e^2}$ | Satz des Pythagoras

$\overline{MB} = \sqrt{\frac{7}{4}e^2} = \frac{e}{2}\sqrt{7}$ **q.e.d.**

Lösung W2a/2010

Lösungslogik

Berechnung von h_{Keg} der kegelförmigen Vertiefung über den Satz des Pythagoras.
Berechnung der Volumens V_{Zyl} des Zylinders.
Berechnung der Volumens V_{Keg} der kegelförmigen Vertiefung.
Berechnung des Volumens des Körpers $V_{Körper}$ aus der Differenz von V_{Zyl} und V_{Keg}.
Halbierung von $V_{Körper}$.
Berechnung der Höhe h_W des Wasserstandes im senkrecht aufgestellten Zylinder über die Volumenformel des Körpers.



Klausuraufschrieb

k_{Keg}: $h_{Keg} = \sqrt{s^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2} = \sqrt{8^2 - 5^2}$ | Satz des Pythagoras

$h_{Keg} = \sqrt{39} = 6{,}24$

V_{Zyl}: $V_{Zyl} = \pi r^2 \cdot h = \pi \cdot \left(\frac{d}{2}\right)^2 \cdot h = \pi \cdot 5^2 \cdot 20 = 1570{,}80$

V_{Keg}: $V_{Keg} = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot h_{keg} = \frac{1}{3}\pi \cdot \left(\frac{d}{2}\right)^2 \cdot h_{Keg} = \frac{1}{3}\pi \cdot 5^2 \cdot 6{,}24 = 163{,}40$

$V_{Körper}$: $V_{Körper} = V_{Zyl} - V_{Keg} = 1570{,}80 - 163{,}40 = 1407{,}40$

V_{Wasser}: $V_{Wasser} = \frac{1}{2} \cdot V_{Körper} = 0{,}5 \cdot 1407{,}40 = 703{,}70$

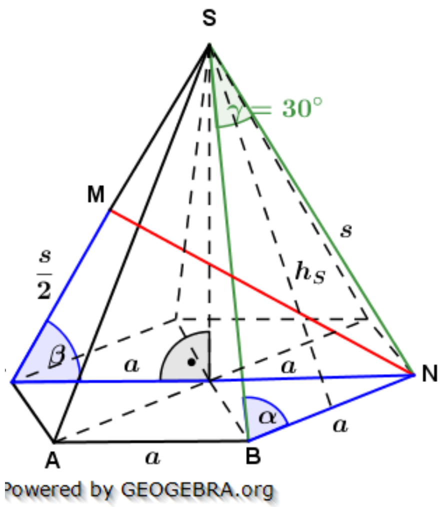
h_W: $V_{Wasser} = \pi r^2 \cdot h_W - V_{Keg}$ | $+V_{Keg}$; $: (\pi r^2)$

$h_W = \frac{V_{Wasser} + V_{Keg}}{\pi \cdot r^2} = \frac{703{,}70 + 163{,}40}{\pi \cdot 5^2} = 11{,}04$

Im aufgestellten Behälter steht das Wasser $11\ cm$ hoch.

Lösung W2b/2010

Lösungslogik



Die Abwicklung in der Skizze der Aufgabenstellung zeigt die sechs Seitendreiecke der Pyramide. Daraus ergibt sich der Spitzenwinkel γ. Wegen der angegebenen waagrechten Strecke von $70\ cm$ ist die Seitenkante s der Pyramide $35\ cm$ lang und daraus $\frac{s}{2}$.
Berechnung des Basiswinkels α der Seitendreiecke über die Winkelsumme im Dreieck.
Berechnung von $\frac{a}{2}$ über den $\cos\alpha$ und daraus der Seitenkante a.
Die Grundfläche einer regelmäßigen sechsseitigen Pyramide lässt sich in sechs gleichseitige Dreiecke mit der Seitenlänge a aufteilen.
Berechnung von $\overline{FN}$ aus zweimal der Strecke a.
Berechnung des Winkels β über den $\cos$.
Berechnung der Strecke $\overline{MN}$ über den Kosinussatz.

Klausuraufschrieb

γ: $\quad \gamma = \frac{180°}{6} = 30°$

s: $\quad s = \frac{70}{2} = 35$ daraus $\frac{s}{2} = 17{,}5$

α: $\quad \alpha = \frac{180° - \gamma}{2} = \frac{180° - 30°}{2} = 75°$

$\frac{a}{2}$: $\quad \cos\alpha = \frac{\frac{a}{2}}{s} \quad | \cdot s$

$\frac{a}{2} = s \cdot \cos\alpha = 35 \cdot \cos 75° = 9{,}06$ daraus $a = 18{,}12$

$\overline{FN}$: $\quad \overline{FN} = 2 \cdot a = 2 \cdot 18{,}12 = 36{,}24$

β: $\quad \cos\beta = \frac{a}{s} = \frac{18{,}12}{35} = 0{,}51771$

$\beta = \cos^{-1}(0{,}51771) = 58{,}82°$

$\overline{MN}$: $\quad \overline{MN}^2 = \left(\frac{s}{2}\right)^2 + \overline{FN}^2 - 2 \cdot \frac{s}{2} \cdot \overline{FN} \cdot \cos\beta \quad |$ Kosinussatz

$= 17{,}5^2 + 36{,}24^{2^2} - 2 \cdot 17{,}5 \cdot 36{,}24 \cdot \cos 58{,}82° = 962{,}90$

$\overline{MN} = \sqrt{962{,}90} = 31{,}03$

Die Strecke $\overline{MN}$ ist $31\ cm$ lang.

Lösung W3a/2010

Lösungslogik

Aufstellung der Geradengleichungen g_1 und g_2.
Schnittpunktberechnung von P durch Gleichsetzung.
Aufstellung der Parabelgleichung p durch die Punkte P und Q.
Umstellung der allgemeinen Parabelgleichung in die Scheitelpunktgleichung.

Klausuraufschrieb

Geradengleichung g_1:

g_1: $y = mx + b$

$m = 0{,}5;\ b = 7$ | aus Zeichnung abgelesen

$y = 0{,}5x + 7$

Geradengleichung g_2:

g_2: $y = m(x - x_0)$

$m = 2;\ x_0 = 4$ | aus Zeichnung

$y = 2(x - 4)$

Schnittpunkt von g_1 mit g_2:

$g_1 \cap g_2$: | Schnittpunkt durch Gleichsetzung

$0{,}5x + 7 = 2x - 8$ | $-0{,}5x\ - 7$

$1{,}5x = 15$ | $:1{,}5$

$x = 10$

$x \longrightarrow g_1$

$y = 0{,}5 \cdot 10 + 7 = 12$

Die Koordinaten des Schnittpunktes sind $P(10|12)$.

Funktionsgleichung von p durch P und Q:

p: $y = x^2 + px + q$

(1) $12 = 10^2 + 10p + q$ | Punktprobe mit $P(10|12)$

(2) $-4 = 2^2 + 2p + q$ | Punktprobe mit $Q(2|-4)$

(1)-(2) $16 = 96 + 8p$ | $-96;\ :8$

$p = -10$

$p \longrightarrow (2)$

$-4 = 4 - 20 + q$

$q = 12$

p: $y = x^2 - 10x + 12$ | allgemeine Parabelgleichung

$y = (x - 5)^2 - 13$ | Scheitelpunktgleichung

Der Scheitel der Parabel hat die Koordinaten $S(5|-13)$.

Lösung W3b/2010

Lösungslogik

Berechnung der Schnittpunkte durch Gleichsetzung.
Bestimmung der Scheitelpunkte von p_1 und p_2.
Verdeutlichung der Situation durch ein Schaubild.
Berechnung der Fläche des Vierecks S_1PS_2Q.

Klausuraufschrieb

p_1: $y=-\frac{1}{2}x^2+5$

p_2: $y=x^2-1$

Schnittpunkte von p_1 mit p_2:

$p_1 \cap p_2$:	|	Schnittpunkte durch Gleichsetzung
$-\frac{1}{2}x^2+5=x^2-1$	|	$+\frac{1}{2}x^2;\ -5$
$1{,}5x^2=6$	|	$:1{,}5$

$x^2=4$

$x_{1,2}=\pm 2$

$y_1=2^2-1=3$

$y_2=(-2)^2-1=3$

Die Schnittpunkte von p_1 mit p_2 sind $P(-2|3)$ und $Q(2|3)$.

Scheitelpunkte von p_1 und p_2:

S_1: $S_1(0|5)$ (in x–Richtung unverschoben)

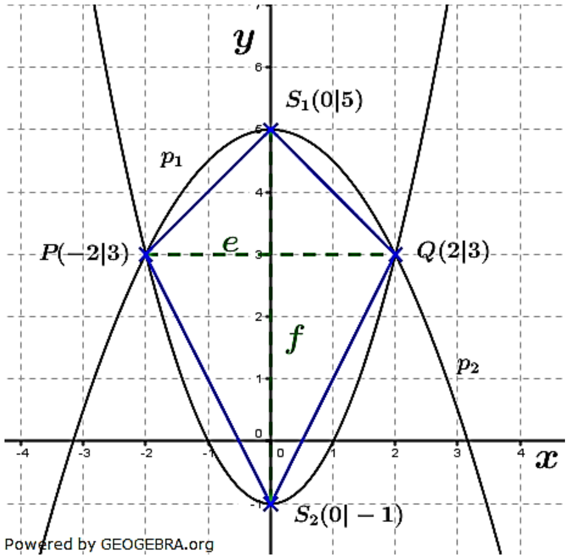
S_2: $S_2(0|-1)$ (in x–Richtung unverschoben)

Fläche Viereck S_1PS_2Q:

$A_{S_1PS_2Q}$: $A_{S_1PS_2Q}=\frac{1}{2}\cdot e\cdot f$

$e=4;\ f=6$

$A_{S_1PS_2Q}=\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 6=12\,FE$



Das Viereck hat eine Fläche von $12\,FE$.

Begründung für Drachenviereck:

p_1 und p_2 sind in x–Richtung nicht verschoben. Dadurch ist die y–Achse Symmetrieachse und die Strecke $\overline{S_1S_2}=f$ eine Diagonale des Vierecks. Infolge der Symmetrie sind die Strecken $\overline{PS_1}$ und $\overline{QS_1}$ sowie $\overline{PS_2}$ und $\overline{QS_2}$ gleich lang. Weiterhin ist $\overline{PQ}=e$ senkrecht f die andere Diagonale des Vierecks. Das Viereck ist also ein Drachenviereck.

Lösung W4a/2010

Lösungslogik

Aufstellung der Einzelwahrscheinlichkeit für die verschiedenen Zahlen über die angegebenen Mittelpunktswinkel.
Berechnung der Wahrscheinlichkeiten $P(A)$ und $P(B)$ und Vergleich.
Neuberechnung der Wahrscheinlichkeit für die Zahlen 4 und 5 über die neuen Mittelpunktswinkel.
Berechnung der Wahrscheinlichkeiten $P(A)$ und $P(B)$ und Vergleich.

Klausuraufschrieb

$P(1) = \frac{1}{4}$ $\quad P(2) = \frac{135}{360} = \frac{3}{8}$ $\quad P(3) = \frac{3}{8}$

$P(4) = \frac{1}{6}$ $\quad P(5) = \frac{1}{3}$ $\quad P(6) = \frac{1}{2}$

$P(A) = \{(3;5),(2;6),(3;6)\}$

$P(B) = 1 - P(A)$

$P(3;5) = \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{3}$ $\quad P(2;6) = \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{2}$ $\quad P(3;6) = \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{6}$

$P(A) = P(3;5) + P(2;6) + P(3;6) = \frac{3}{24} + \frac{3}{16} + \frac{3}{16} = \frac{1}{2} = 50\ \%$

$P(B) = 1 - P(A) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = 50\%$

Es ist gleichgültig, für welche Gewinnsituation man sich entscheidet.

Geänderter Mittelpunktswinkel für die 4 und die 5.

$P(4) = \frac{1}{4}$ $\quad P(5) = \frac{1}{4}$

$P(3;5) = \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{4}$

$P(A) = P(3;5) + P(2;6) + P(3;6) = \frac{3}{32} + \frac{3}{16} + \frac{3}{16} = \frac{15}{32} \approx 46{,}9\ \%$

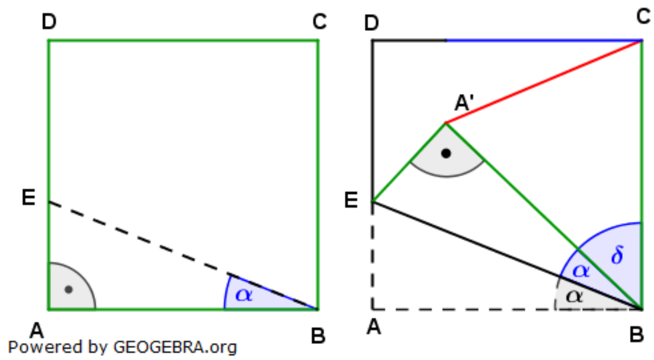
$P(B) = 1 - P(A) = 1 - \frac{15}{32} = \frac{17}{32} \approx 53{,}1\ \%$

Man wird sich jetzt für Gewinnsituation B entscheiden.

Lösung W4b/2010

Lösungslogik (einfach)

Berechnung von α über den tan.
Berechnung von δ als Ergänzungswinkel zu $90°$.
Berechnung von $\overline{A'C}$ über den Kosinussatz.



Klausuraufschrieb

α: $\quad tan\alpha = \frac{\overline{AE}}{\overline{AB}} = \frac{4}{10} = 0{,}4$

$\alpha = tan^{-1}(0{,}4) = 21{,}8°$

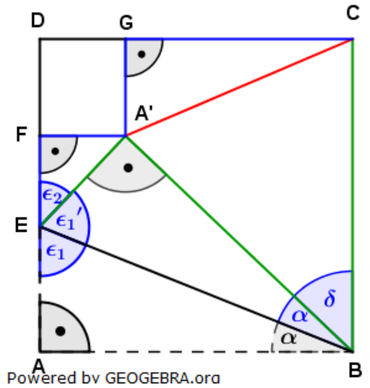
δ: $\quad \delta = 90° - 2 \cdot \alpha = 90° - 43{,}6° = 46{,}4°$

$\overline{A'C}$: $\quad \overline{A'C}^2 = \overline{A'B}^2 + \overline{BC}^2 - 2 \cdot \overline{A'B} \cdot \overline{BC} \cdot cos\delta \quad |$ Kosinussatz

$\overline{A'C}^2 = 10^2 + 10^2 - 2 \cdot 10 \cdot 10 \cdot cos46{,}4° = 62{,}0761 \quad | \quad \sqrt{\ }$

$\overline{A'C} = 7{,}87$

Die Strecke $\overline{A'C}$ ist $7{,}9\ cm$ lang.



Lösungslogik (umständlich)
Berechnung von ϵ_1 über den tan. Durch das Umklappen ist $\epsilon_1 = \epsilon_1{}'$.
Berechnung von ϵ_2 über $180° - 2 \cdot \epsilon_1$.
Berechnung von $\overline{A'F}$ über den $sin\epsilon_2$, $\overline{DG}$ ist gleich lang wie $\overline{A'F}$.
Berechnung von $\overline{FE}$ über den Satz des Pythagoras.
Berechnung von $\overline{DF}$ über $\overline{DA} - (\overline{AE} + \overline{FE})$, die Strecke $\overline{GA'}$ ist gleich lang wie $\overline{DF}$.
Berechnung von $\overline{A'C}$ über den Satz des Pythagoras.

Klausuraufschrieb

ϵ_1: $\quad tan\epsilon_1 = \frac{\overline{AB}}{\overline{AE}} = \frac{10{,}0}{4{,}0}$

$\epsilon_1 = tan^{-1}\left(\frac{5}{2}\right) = 68{,}2°$

ϵ_2: $\quad \epsilon_1' = \epsilon_1 \Longrightarrow \quad \epsilon_2 = 180° - 2 \cdot \epsilon_1$

$\epsilon_2 = 180° - 136{,}4° = 43{,}6°$

$\overline{A'F}$: $\quad sin\epsilon_2 = \frac{\overline{A'F}}{\overline{EA'}} \qquad | \quad \cdot \overline{EA'}$

$\overline{A'F} = \overline{EA'} \cdot sin\epsilon_2 = 4{,}0 \cdot sin(43{,}6°) = 2{,}76$

$\overline{GD}$: $\quad \overline{GD} = \overline{A'F} = 2{,}76$

$\overline{CG}$: $\quad \overline{CG} = \overline{CD} - \overline{GD} = 10 - 2{,}76 = 7{,}24$

$\overline{FE}$: $\quad \overline{FE} = \sqrt{\overline{A'E}^2 - \overline{A'F}^2} = \sqrt{4^2 - 2{,}76^2} \qquad |$ Satz des Pythagoras

$\overline{FE} = \sqrt{8{,}3824} = 2{,}8952$

$\overline{DF}$: $\quad \overline{DF} = \overline{DA} - \left(\overline{AE} + \overline{FE}\right) = 10 - (4 + 2{,}8952) = 3{,}1048$

$\overline{GA'} = \overline{DF} = 3{,}1048$

$\overline{A'C}$: $\quad \overline{A'C} = \sqrt{\overline{GA'}^2 + \overline{CG}^2} = \sqrt{3{,}1048^2 + 7{,}24^2} \quad |$ Satz des Pythagoras

$\overline{A'C} = \sqrt{62{,}0574} = 7{,}8777$

Die Strecke $\overline{A'C}$ ist $7{,}9\ cm$ lang.