

Lösung B1a/2024

Lösungslogik

Winkel φ

Wegen der schräg liegenden Raute und dem Winkel $\epsilon = 20^\circ$ ist auch der Winkel $\epsilon' = 20^\circ$.
Über die Winkelsumme im Dreieck EFH ergibt sich damit φ zu 70° .

Umfang des Vierecks $AEFD$:

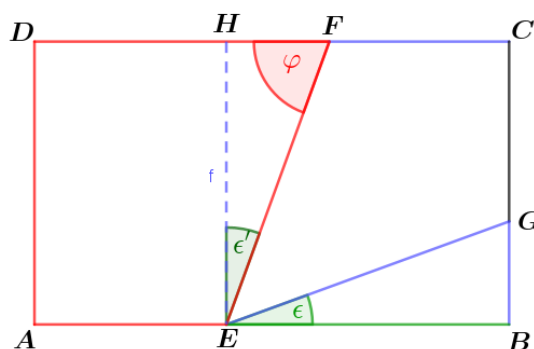
Berechnung der Strecke $\overline{AE}$ über die Differenz aus $\overline{AB}$ und $\overline{EB}$.

Berechnung der Strecke $\overline{EF}$ über die Strecke $\overline{EG}$, diese über den $\cos(\epsilon)$.

Berechnung der Strecke $\overline{AD}$ über die Strecke $\overline{EH}$, diese über den $\sin(\varphi)$.

Berechnung der Strecke $\overline{HF}$ über den Satz des Pythagoras im Dreieck EHF .

Berechnung der Strecke $\overline{DF}$ über die Summe der Strecken $\overline{AE}$ und $\overline{HF}$.



Powered by GEOGEBRA.org

Klausuraufschrieb

Winkel φ :

$$\epsilon' = \epsilon$$

$$\varphi = 180^\circ - 90^\circ - \epsilon' = 70^\circ$$

Umfang Viereck u_{AEFD} :

$$u_{AEFD} = \overline{AE} + \overline{EF} + \overline{DF} + \overline{AD}$$

$$\overline{AE}: \overline{AE} = \overline{AB} - \overline{EB}$$

$$\overline{AE} = 9,4 - 5,6 = 3,8$$

$$\overline{EF}: \overline{EF} = \overline{EG}$$

$$\cos(\epsilon) = \frac{\overline{EB}}{\overline{EG}}$$

$$\overline{EG} = \frac{\overline{EB}}{\cos(\epsilon)} = \frac{5,6}{\cos(20^\circ)} = 5,96$$

$$\overline{EF} = 5,96$$

$$\overline{AD}: \overline{AD} = \overline{EH}$$

$$\sin(\varphi) = \frac{\overline{EH}}{\overline{EF}}$$

$$\overline{EH} = \overline{EF} \cdot \sin(\varphi) = 5,96 \cdot \sin(70^\circ) = 5,60$$

$$\overline{AD} = 5,6$$

$$\overline{HF}: \overline{EF}^2 = \overline{EH}^2 + \overline{HF}^2$$

| Satz des Pythagoras

$$\overline{HF} = \sqrt{\overline{EF}^2 - \overline{EH}^2} = \sqrt{5,96^2 - 5,6^2} = 2,04$$

$$\overline{DF}: \overline{DF} = \overline{AE} + \overline{HF} = 3,8 + 2,04 = 5,84$$

$$u_{AEFD} = \overline{AE} + \overline{EF} + \overline{DF} + \overline{AD} = 3,8 + 5,96 + 5,84 + 5,6 = 21,2 \text{ cm}$$

Lösung B1b/2024

Lösungslogik

Funktionsgleichung von p_1 :

Aufstellen der Scheitelpunktgleichung mit $S_1(1|1)$.

Funktionsgleichung p_2 :

Bestimmung der Symmetrieachse zwischen den beiden Nullstellen

Aufstellen der Scheitelpunktgleichung mit unbekanntem y_{S_2} .

Funktionsgleichung von g :

Steigung der Geraden m über die beiden Punkte A und S_1 ermitteln.

Punktprobe mit A oder S_1 zur Ermittlung von c .

Abstand von S_1 und S_2 :

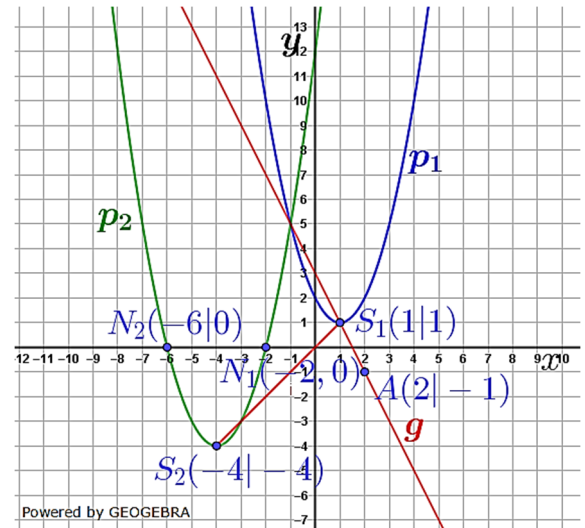
Berechnung über den Satz des Pythagoras.

Überprüfung von Milos Behauptung:

Bestimmung des Schnittpunktes zwischen p_1 und p_2 .

Bestimmung des Schnittpunktes zwischen g und p_1 .

Wenn in beiden Fällen derselbe Punkt herauskommt, hat Tilo Recht.



Klausuraufschrieb

Funktionsgleichung p_1 :

Scheitelpunktgleichung:

$$y = (x - x_S)^2 + y_S$$

Scheitel $S_1(1|1)$ einsetzen:

$$y = (x - 1)^2 + 1$$

Funktionsgleichung p_2 :

Symmetrieachse zwischen $N_1(-6|0)$ und $N_2(-2|0)$ ist $x = -4$.

$$S_2(-4|y_{S_2})$$

Scheitelpunktgleichung:

$$y = (x + 4)^2 + y_{S_2}$$

Punktprobe mit z. B. $N_2(-2|0)$:

$$0 = (-2 + 4)^2 + y_{S_2}$$

$$0 = 4 + y_{S_2}$$

$$y_{S_2} = -4$$

$$y = (x + 4)^2 - 4$$

Funktionsgleichung von g :

$$g: y = mx + c$$

$$m: m = \frac{y_A - y_{S_1}}{x_A - x_{S_1}} = \frac{-1 - 1}{2 - 1} = -2$$

$$y = -2x + c$$

Punktprobe mit $S_1(1|1)$:

$$1 = -2 + c$$

$$c = 3$$

$$g: y = -2x + 3$$

Abstand von S_1 und S_2 :

$$d(S_1; S_2) = \sqrt{(x_{S_1} - x_{S_2})^2 + (y_{S_1} - y_{S_2})^2} = \sqrt{(1 - (-4))^2 + (1 - (-4))^2} = \sqrt{50} \approx 7,1 \text{ LE}$$

Überprüfung von Milos Behauptung:

$p_1 \cap p_2$:

$$(x - 1)^2 + 1 = (x + 4)^2 - 4$$

$$x^2 - 2x + 1 + 1 = x^2 + 8x + 16 - 4$$

$$x^2 - 2x + 2 = x^2 + 8x + 12$$

$$| \quad -x^2; +2x; -12$$

$$10x = -10$$

$$x_S = -1$$

$$y_S = (-1 - 1)^2 + 1 = 5$$

$$S_{p_1 p_2}(-1|5)$$

$p_1 \cap g$:

$$(x - 1)^2 + 1 = -2x + 3$$

$$x^2 - 2x + 2 = -2x + 3$$

$$x^2 = 1$$

$$x_{1,2} = \pm 1$$

Hier ist nur $x_2 = -1$ von Interesse.

$$x_2 = -1$$

$$y_2 = -2 \cdot (-1) + 3 = 5$$

$$S_{p_1 g}(-1|5) = S_{p_1 p_2}(-1|5)$$

Tilo hat Recht.

Lösung B2a/2024

Lösungslogik

Schnittpunkte von g mit den Achsen:

Schnittpunkt x -Achse über $y = 0$.

Schnittpunkt y -Achse über $x = 0$.

Funktionsgleichung p sowie

Scheitelpunktgleichung:

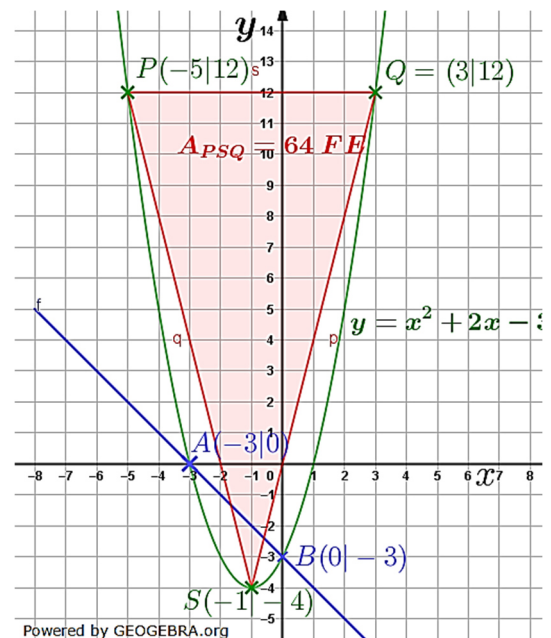
Allgemeine Gleichung der Normalparabel:

$y = x^2 + bx + c$. Aufstellung eines Gleichungssystems zur Berechnung von b und c mithilfe von Punktproben mit den Punkten A und B .

Danach Umstellung der allgemeinen Gleichung in die Scheitelpunktgleichung mit Hilfe der quadratischen Ergänzung zur Bestimmung des Scheitelpunktes.

Berechnung des Flächeninhaltes des Dreiecks PSQ :

Fläche eines Dreiecks über $A_{PSQ} = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h_g$ mit der Grundseite g als Abstand der beiden Punkte P und Q sowie h_g als Abstand der Grundseite zum Scheitelpunkt S der Parabel.



Klausuraufschrieb

Schnittpunkte von g mit den Achsen:

Schnittpunkt mit der x -Achse:

$$0 = -x - 3 \quad | \quad +x$$

$$x_A = -3$$

$$A(-3|0)$$

Schnittpunkt mit der y -Achse:

$$y = -3 \cdot 0 - 3$$

$$y_A = -3$$

$$B(0|-3)$$

Funktionsgleichung p :

$$p: y = x^2 + bx + c$$

Aufstellung Gleichungssystem

$$(1) \quad (-3)^2 + b \cdot (-3) + c = 0 \quad | \quad \text{Punktprobe mit A}$$

$$(2) \quad 0^2 + b \cdot 0 + c = -3 \quad | \quad \text{Punktprobe mit B}$$

$$c = -3$$

$$c \rightarrow (1)$$

$$(1) \quad 9 - 3b - 3 = 0$$

$$6 - 3b = 0 \quad | \quad -6$$

$$-3b = -6 \quad | \quad :(-3)$$

$$b = 2$$

$$p: y = x^2 + 2x - 3$$

Umstellung nach Scheitelpunktform:

$$y = x^2 + 2x + 1 - 1 - 3 \quad | \quad \text{quadratische Ergänzung}$$

$$y = (x + 1)^2 - 4 \quad | \quad \text{Einpacken Binom}$$

$$S(-1|-4)$$

Flächeninhalt Dreieck PSQ :

$$A_{PSQ} = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h_g$$

$$g = x_Q - x_P$$

Koordinaten x_Q und x_P über die Parabel bestimmen:

$$12 = x^2 + 2x - 3 \quad | \quad -12$$

$$x^2 + 2x - 15 = 0$$

$$x_{QP} = -1 \pm \sqrt{1 + 15} = -1 \pm 4 \quad | \quad p/q\text{-Formel}$$

$$x_Q = 3; \quad x_P = -5$$

$$g = 3 - (-5) = 8$$

$$h_g = y_Q - y_S = 12 - (-4) = 16$$

$$A_{PSQ} = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 16 = 64 \text{ FE}$$

Der Flächeninhalt des Dreiecks PSQ beträgt 64 FE.

Lösung B2b/2024

Lösungslogik

Flächeninhalt des Kegels mit Halbkugel:

Kegelmantel:

$$M_{Keg} = \pi \cdot r_{Keg} \cdot s$$

Wir benötigen zunächst den Radius des Kegels über den

$$\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) = \frac{r_{Keg}}{s_{Keg}}$$

Die Oberfläche der Halbkugel errechnet sich aus $O_{Kug} = \frac{1}{2} \cdot 4\pi r^2$.

Flächeninhalt der Pyramide:

$$O_{Pyr} = G + M_{Pyr}$$

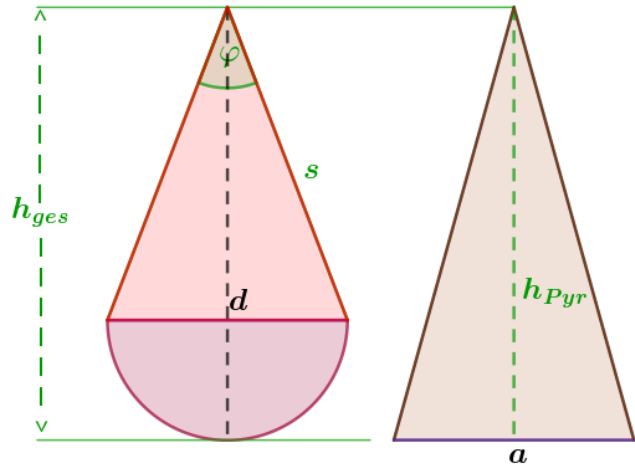
Die Grundfläche ist ein Quadrat mit der Seitenkante $a = d_{Keg} = 2 \cdot r_{Keg}$.

Der Pyramidenmantel errechnet sich aus $M_{Pyr} = 2 \cdot a \cdot h_s$

Zur Bestimmung von h_s benötigen wir noch die Höhe der Pyramide h_{pyr} .

Diese setzt sich zusammen aus $h_{pyr} = h_{ges} = h_{Keg} + r_{Kug} = h_{Keg} + r_{Keg}$.

Die Höhe des Kegels ermitteln wir über den Satz des Pythagoras aus s und r_{Keg} .



Powered by GEOGEBRA.org

Flächenunterschied zwischen zusammengesetztem Körper und Pyramide:

Der Unterschied bestimmt sich aus der Differenz der Oberflächen von zusammengesetztem Körper und Pyramide.

Klausuraufschrieb

Flächeninhalt des Kegels mit Halbkugel:

Kegelmantel:

$$M_{Keg} = \pi \cdot r_{Keg} \cdot s$$

$$r_{Keg} : \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) = \frac{r_{keg}}{s} \quad | \quad \cdot s$$

$$r_{Keg} = s \cdot \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) = 14,4 \cdot \sin(21^\circ) = 5,16 \text{ cm}$$

$$M_{Keg} = \pi \cdot 5,16 \cdot 14,4 = 233,43 \text{ cm}^2$$

Flächeninhalt der Halbkugel:

$$O_{Kug} = \frac{1}{2} \cdot 4\pi r^2 = 2 \cdot \pi \cdot 5,16^2 = 167,29 \text{ cm}^2$$

$$O_{Körper} = M_{Keg} + O_{Kug} = 233,43 + 167,29 = 400,72 \text{ cm}^2$$

Oberfläche der Pyramide:

$$O_{Pyr} = G + M_{Pyr} = a^2 + 2a \cdot h_s$$

$$a = d_{Keg} = 2 \cdot r_{Keg} = 10,32 \text{ cm}$$

$$G = a^2 = 10,32^2 = 106,5 \text{ cm}^2$$

$$h_s: h_s^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + h_{Pyr}^2 \quad | \quad \text{Satz des Pythagoras}$$

$$h_s = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + h_{Pyr}^2}$$

$$h_{Pyr} = h_{ges}$$

$$h_{ges} = h_{Keg} + r_{Kug}$$

$$h_{Keg}: h_{Keg}^2 = s^2 - r_{Keg}^2 \quad | \quad \text{Satz des Pythagoras}$$

$$h_{Keg} = \sqrt{s^2 - r_{Keg}^2} = \sqrt{14,4^2 - 5,16^2} = 13,44 \text{ cm}$$

$$h_{Pyr}: h_{Pyr} = h_{Keg} + r_{Keg} = 13,44 + 5,16 = 18,6 \text{ cm}$$

$$h_s: h_s = \sqrt{5,16^2 + 18,6^2} = 19,30 \text{ cm}$$

$$M_{Pyr}: M_{Pyr} = 2 \cdot a \cdot h_s = 2 \cdot 10,32 \cdot 19,30 = 398,35 \text{ cm}^2$$

$$O_{Pyr} = 106,5 + 398,35 = 504,85 \text{ cm}^2$$

Flächenunterschied zwischen zusammengesetztem Körper und Pyramide:

$$\Delta O = O_{Pyr} - O_{Körper} = 504,85 - 400,7 = 104,15 \text{ cm}^2$$

Der Oberflächenunterschied zwischen zusammengesetztem Körper und Pyramide beträgt $104,15 \text{ cm}^2$

Lösung B3a/2024

Lösungslogik

Wahrscheinlichkeit für Ereignis „zweimal Muschel“

Bestimmung der Wahrscheinlichkeiten für Muschel, Seestern und Fisch. Seestern und Fische zusammen sind dann „keine Muschel“.

Es handelt sich um Ziehen ohne Zurücklegen. Die Wahrscheinlichkeit für zweimal Seestern ist dann $P(\text{Seestern})_{1.\text{Zug}} \cdot P(\text{Seestern})_{2.\text{Zug}}$.

Erwartungswert:

Aufstellen der Wahrscheinlichkeiten für „Zweimal Muschel“, „Zweimal Seestern“ und „Muschel und Seestern“.

Berechnung des Erwartungswertes über eine Tabelle.

Neuer Gewinn für zweimal Muschel als faires Spiel:.

Neuberechnung des Gewinns für „Zweimal Muschel“ mit $E(X) = 0$ über eine Tabelle.

Klausuraufschrieb

Wahrscheinlichkeiten:

Es handelt sich um Ziehen ohne Zurücklegen.

$$P\left(\begin{smallmatrix} \text{Muschel} \\ \text{Muschel} \end{smallmatrix}\right) = \frac{2}{10}; \quad P(\star) = \frac{3}{10}; \quad P\left(\begin{smallmatrix} \text{Muschel} \\ \text{Fisch} \end{smallmatrix}\right) = \frac{5}{10}, \text{ aber nur im ersten Zug.}$$

Wahrscheinlichkeit für Ereignis „zweimal Muschel“

$$P\left(\begin{smallmatrix} \text{Muschel} \\ \text{Muschel} \end{smallmatrix}\right) = \frac{2}{10} \cdot \frac{1}{9} = \frac{2}{90} = 0,022$$

Die Wahrscheinlichkeit „zweimal Muschel“ zu angeln beträgt 0,022.

Erwartungswert:

$$P\left(\begin{smallmatrix} \text{Muschel} \\ \text{Muschel} \end{smallmatrix}\right) = \frac{2}{90}; \quad P(\star\star) = \frac{6}{90}; \quad P\left(\left(\begin{smallmatrix} \text{Muschel} \\ \star \end{smallmatrix}\right); \left(\begin{smallmatrix} \star \\ \text{Muschel} \end{smallmatrix}\right)\right) = 2 \cdot \frac{2}{10} \cdot \frac{3}{9} = \frac{12}{90}$$

Gewinnplan

	$P\left(\begin{smallmatrix} \text{Muschel} \\ \text{Muschel} \end{smallmatrix}\right)$	$P(\star\star)$	$P\left(\left(\begin{smallmatrix} \text{Muschel} \\ \star \end{smallmatrix}\right); \left(\begin{smallmatrix} \star \\ \text{Muschel} \end{smallmatrix}\right)\right)$
Gewinn/Einsatz (X_i)	9,00 €	4,00 €	2,50 €
$p(X_i)$	$\frac{2}{90}$	$\frac{6}{90}$	$\frac{12}{90}$
$X_i \cdot p(X_i)$	0,20 €	0,27 €	0,33 €
EX	0,2 € + 0,27 € + 0,33 € – 1,00 = –0,20 €		

Die Klasse 10a kann mit einer Einnahme von 0,20 € pro Spiel rechnen.

Neuer Gewinnplan:

	$P\left(\begin{smallmatrix} \text{Muschel} \\ \text{Muschel} \end{smallmatrix}\right)$	$P(\star\star)$	$P\left(\left(\begin{smallmatrix} \text{Muschel} \\ \star \end{smallmatrix}\right); \left(\begin{smallmatrix} \star \\ \text{Muschel} \end{smallmatrix}\right)\right)$
Gewinn/Einsatz (X_i)	a	4,00 €	2,50 €
$p(X_i)$	$\frac{2}{90}$	$\frac{6}{90}$	$\frac{12}{90}$
$X_i \cdot p(X_i)$	$0,022a$	0,27 €	0,33 €
EX	$0,02a + 0,27 € + 0,33 € - 1,00 € = E(X)$		

Mit $E(X) = 0$ (für faires Spiel) erhalten wir:

$$0,02a = 1,00 € - 0,27 € - 0,33 €$$

$$0,022a = 0,4 € \quad | \quad : 0,02$$

$$a = 18 €$$

Der Gewinn für „zweimal Muschel“ muss auf 18,00 € angehoben werden, damit das Spiel fair ist.

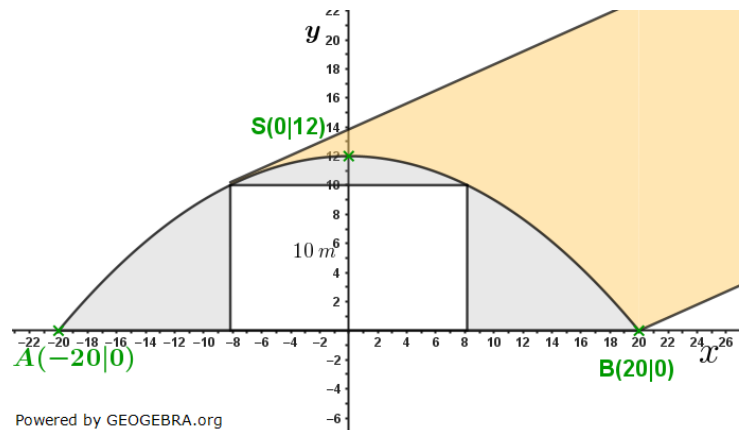
Lösung B3b/2024

Lösungslogik

Gleichung der Parabel:

Aufgrund der gegebenen Parabelgleichung liegt die y -Achse in der Hallenmitte. Mit der gegebenen Hallenhöhe 12 m ist damit der Parameter $c = 12$.

Zur Bestimmung von a machen wir dann eine Punktprobe mit der Nullstelle $B(20|0)$.



Berechnung der Fensterfläche nach Vorschlag 1:

Die Fensterhöhe mit 10 m angegeben. Die beiden oberen Eckpunkte des Fensters liegen auf der Parabel. Der Abstand der x -Werte dieser beiden Punkte ergibt die Breite des Fensters.

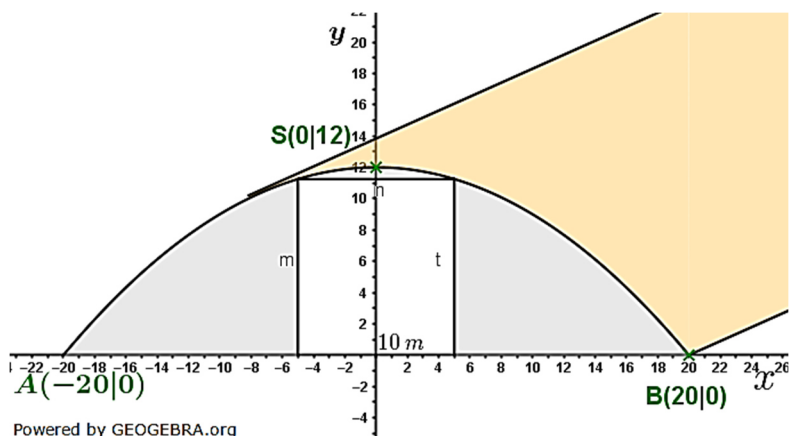
Wir setzen den y -Wert der Parabelgleichung auf 10 und lösen die Gleichung nach x auf.

Berechnung der Fensterfläche nach Vorschlag 2:

Die Fensterbreite ist nun 10 m. Das Fenster hat die Form eines Rechtecks.

Die beiden oberen Eckpunkte liegen auf der Parabel. Der y -Wert an der Stelle $x = 5$ bildet die Höhe des Rechtecks.

Wir setzen den x -Wert der Parabelgleichung auf 5 und lösen die Gleichung nach y auf.



Größere Fensterfläche

Je nach Ergebnis von Vorschlag 1 und Vorschlag 2.

Klausuraufschrift

Gleichung einer zugehörigen Parabel

p: $y = ax^2 + c$

In y-Richtung verschobene Parabel. $c = 12$ ist die Höhe der Halle.

$$y = ax^2 + 12$$

a: $0 = a \cdot 20^2 + 12$ | Punktprobe mit $B(20|0)$

$$400a = -12$$
 | : 400

$$a = -0,03$$

$$y = -0,03x^2 + 112$$

Berechnung der Fensterfläche nach Vorschlag 1:

$A_{\text{Fenster}} = a \cdot h$ mit $h = 10$ m (gegeben).

$$10 = -0,03x^2 + 12$$
 | -12

$$-2 = -0,03x^2$$
 | $: (-0,03)$

$$x^2 = 66,67$$
 | $\sqrt{}$

$$x_{1,2} = \pm 8,16$$

$$a = 2 \cdot x_1 = 16,33 \text{ m}$$

$$A_{\text{Fenster}} = 16,33 \cdot 10 = 163,3 \text{ m}^2.$$

Berechnung der Fensterfläche nach Vorschlag 2:

$A_{\text{Fenster}} = a \cdot h$ mit $a = 10$ m (gegeben).

$$y = -0,03 \cdot 5^2 + 12$$

$$y = 11,25$$

$$h_{\text{Fenster}} = y = 11,25$$

$$A_{\text{Fenster}} = 10 \cdot 11,25 = 112,5 \text{ m}^2.$$

Vorschlag 1 mit $163,3 \text{ m}^2$ ergibt die größere Fensterfläche.