Aufgabenblatt Ableitungen der Exponentialfunktion

Level 2 – Fortgeschritten – Blatt 1

Dokument mit 28 Aufgaben

Aufgabe A1

Wahr oder falsch?

a) Für $f(x) = e^x$ gilt $f^{(4)\prime}(x) = e^{4x}$

b) Für $f(x) = e^x$ gilt $f^{(9)\prime}(x) = e^x$

c) Für $f(x) = e^{-x}$ gilt $f^{(10)\prime}(x) = -e^{-x}$

d) Für $f(x) = e^{x+1}$ gilt $f^{(10)\prime}(x) = e^{x+1}$

e) Für $f(x) = e^{x-5}$ gilt $f''(x) = (x^2 - 11x + 30) \cdot e^{x-7}$

Aufgabe A2

Bestimme den exakten Wert der Steigung des Graphen von f an der Stelle x_0.

a) $f(x) = e^x + x;\ x_0 = 1$

b) $f(x) = \frac{1}{2}x + e^{-x};\ x_0 = -1$

c) $f(x) = e^{2x} - e^x;\ x_0 = \frac{1}{2}$

d) $f(x) = \frac{1}{4}x^2 + e^{2x};\ x_0 = 0$

e) $f(x) = e^{\sqrt{2x}} + \sqrt{2}e^x;\ x_0 = 2$

f) $f(x) = x \cdot e^x;\ x_0 = 0$

g) $f(x) = x \cdot e^{-x};\ x_0 = -1$

h) $f(x) = 2e^{3x} - x^2;\ x_0 = \frac{2}{3}$

i) $f_t(x) = -te^x + t^2e^{-x};\ x_0 = \frac{1}{4}$

j) $f_t(x) = \frac{t}{\sqrt{3} \cdot e^x};\ x_0 = \sqrt{2}$

k) $f_t(x) = t^2(e^x)^4;\ x_0 = t$

l) $f_t(x) = -\frac{t}{2}\sqrt{e^x};\ x_0 = \frac{t}{2}$

Aufgabe A3

In welchem Punkt hat der Graph von f mit $f(x) = e^x$ dieselbe Steigung wie die erste Winkelhalbierende, die x-Achse bzw. die Gerade mit der Gleichung $y = ex$?

Aufgabe A4

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = e^{-x} - 2$ für $x \in \mathbb{R}$.

a) An welchen Stellen x_0 gilt $f'(x_0) = -e$?

b) Gibt es Stellen mit $f'(x_0) > 0$?

Aufgabe A5

Bestimme jeweils die erste und zweite Ableitung.

a) $f(x) = 2e^{2x} - 1$

b) $f(x) = 2e^{-2x} + 1$

c) $f(x) = x - e^{0,3\pi x}$

d) $f(x) = 4e^{(3x-5)}$

e) $f(x) = \frac{\pi}{e} - e^{\frac{\pi}{e}x}$

f) $f(x) = 2e^{x^2-2x}$

g) $f(x) = -3e^{-2x^2+1}$

h) $f(x) = 4x^2 \cdot e^{\frac{1}{x}}$

Lösung A1

a) Für $f(x) = e^x$ gilt $f^{(4)\prime}(x) = e^{4x}$ ist falsch, denn die 4. Ableitung von e^x bleibt e^x.

b) Für $f(x) = e^x$ gilt $f^{(9)\prime}(x) = e^x$ ist richtig.

c) Für $f(x) = e^{-x}$ gilt $f^{(10)\prime}(x) = -e^{-x}$ ist falsch, denn die 10. Ableitung von e^{-x} ist e^{-x}.

d) Für $f(x) = e^{x+1}$ gilt $f^{(10)\prime}(x) = e^{x+1}$ ist richtig.

e) Für $f(x) = e^{x-5}$ gilt $f''(x) = (x^2 - 11x + 30) \cdot e^{x-7}$ ist falsch, denn die 2. Ableitung von e^{x-5} bleibt e^{x-5}.

Lösung A2

a) $f(x) = e^x + x;\ x_0 = 1$ $\qquad f'(x) = e^x + 1$
$f'(1) = e + 1$

b) $f(x) = \frac{1}{2}x + e^{-x};\ x_0 = -1$ $\qquad f'(x) = \frac{1}{2} - e^{-x}$
$f'(-1) = \frac{1}{2} - e$

c) $f(x) = e^{2x} - e^x;\ x_0 = \frac{1}{2}$ $\qquad f'(x) = 2e^{2x} - e^x$
$f'\left(\frac{1}{2}\right) = 2e - e^{\frac{1}{2}} = 2e - \sqrt{e}$

d) $f(x) = \frac{1}{4}x^2 + e^{2x};\ x_0 = 0$ $\qquad f'(x) = \frac{1}{2}x + 2e^{2x}$
$f'(0) = 2$

e) $f(x) = e^{\sqrt{2x}} + \sqrt{2}e^x;\ x_0 = 2$ $\qquad f'(x) = \frac{e^{\sqrt{2x}}}{\sqrt{2x}} + \sqrt{2}e^x$
$f'(2) = \frac{e^2}{2} + \sqrt{2}e^2 = e^2 \cdot \left(\frac{1}{2} + \sqrt{2}\right)$

f) $f(x) = x \cdot e^x;\ x_0 = 0$ $\qquad f'(x) = e^x + x \cdot e^x = e^x(x+1)$
$f'(0) = 1$

g) $f(x) = x \cdot e^{-x};\ x_0 = -1$ $\qquad f'(x) = e^{-x} - x \cdot e^{-x} = e^{-x}(1-x)$
$f'(-1) = 2e$

h) $f(x) = 2e^{3x} - x^2;\ x_0 = \frac{2}{3}$ $\qquad f'(x) = 6e^{3x} - 2x$
$f'\left(\frac{2}{3}\right) = 6e^2 - \frac{4}{3}$

i) $f_t(x) = -te^x + t^2e^{-x};\ x_0 = \frac{1}{4}$ $\qquad f'(x) = -te^x - t^2e^{-x}$
$f_t{}'\left(\frac{1}{4}\right) = -te^{\frac{1}{4}} - t^2e^{-\frac{1}{4}} = -t\left(\sqrt[4]{e} + \frac{t}{\sqrt[4]{e}}\right) = -t\left(\frac{\sqrt{e}+t}{\sqrt[4]{e}}\right)$

j) $f_t(x) = \frac{t}{\sqrt{3} \cdot e^x};\ x_0 = \sqrt{2}$ $\qquad f_t{}'(x) = -\frac{t}{\sqrt{3} \cdot e^x}$
$f_t{}'(\sqrt{2}) = -\frac{t}{\sqrt{3} \cdot e^{\sqrt{2}}} = -\frac{\sqrt{3}t}{3e^{\sqrt{2}}}$

k) $f_t(x) = t^2(e^x)^4;\ x_0 = t$ $\qquad f_t{}'(x) = 4t^2 \cdot e^{4x}$
$f_t{}'(t) = 4t^2e^{4t}$

l) $f_t(x) = -\frac{t}{2}\sqrt{e^x} = -\frac{t}{2} \cdot e^{\frac{1}{2}x};\ x_0 = \frac{t}{2}$ $\qquad f_t{}'(x) = -\frac{t}{4} \cdot e^{\frac{1}{2}x}$
$f_t{}'\left(\frac{t}{2}\right) = -\frac{t}{4} \cdot e^t$

Lösung A3

$f(x) = e^x; \quad f'(x) = e^x$

1. Winkelhalbierende: $y = x$ hat die Steigung $m = 1$:

$f'(x) = 1 = e^x \quad \Rightarrow \quad x_1 = 0$

f hat in $x_1 = 0$ dieselbe Steigung wie die erste Winkelhalbierende.

Die x-Achse selbst hat die Steigung $m = 0$:

$f'(x) = 0 = e^x \quad \Rightarrow$ keine Lösung, denn e^x kann nie Null werden.

f hat an keiner Stelle dieselbe Steigung wie die x-Achse.

Die Gerade $y = ex$ hat die Steigung $m = e$:

$f'(x) = e = e^x \quad \Rightarrow \quad x_0 = 1$

f hat in $x_0 = 1$ dieselbe Steigung wie die Gerade mit $y = ex$.

Lösung A4

$f(x) = e^{-x} - 2; \quad f'(x) = -e^{-x}$

a) $-e^{-x} = -e; \Rightarrow \; x_0 = -1$

b) Es gibt keiner Stellen $f'(x_0) > 0$, da $\mathbb{W}$ von $e^{-x} > 0$, somit stets $-e^{-x} < 0$.

Lösung A5

a) $f(x) = 2e^{2x} - 1$ $\quad f'(x) = 4e^{2x}$ $\quad f''(x) = 8e^{2x}$

b) $f(x) = 2e^{-2x} + 1$ $\quad f'^{(x)} = -4e^{-2x}$ $\quad f''(x) = 8e^{-2x}$

c) $f(x) = x - e^{0,3\pi x}$ $\quad f'(x) = 1 - 0,3\pi e^{0,3\pi x}$ $\quad f''(x) = -0,09\pi^2 e^{0,3\pi x}$

d) $f(x) = 4e^{(3x-5)}$ $\quad f'(x) = 12e^{(3x-5)}$ $\quad f''(x) = 36e^{(3x-5)}$

e) $f(x) = \frac{\pi}{e} - e^{\frac{\pi}{e}x}$ $\quad f'(x) = -\frac{\pi}{e} e^{\frac{\pi}{e}x}$ $\quad f''(x) = -\frac{\pi^2}{e^2} e^{\frac{\pi}{e}x}$

f) $f(x) = 2e^{x^2-2x}$ $\quad f'(x) = 2(2x-2)e^{x^2-2x}$ $\quad f''(x) = 2(2x-2)^2 e^{x^2-2x}$

g) $f(x) = -3e^{-2x^2+1}$ $\quad f'(x) = 12xe^{-2x^2+1}$

$u = 12x \qquad u' = 12$

$v = e^{-2x^2+1} \qquad v' = -4x \cdot e^{-2x^2+1}$

$f''(x) = 12 \cdot e^{-2x^2+1} - 48x^2 e^{-2x^2+1} = 12e^{-2x^2+1}(1 - 4x^2)$

h) $f(x) = 4x^2 \cdot e^{\frac{1}{x}}$

$u = 4x^2 \qquad u' = 8x$

$v = e^{\frac{1}{x}} \qquad v' = -\frac{1}{x^2} \cdot e^{\frac{1}{x}}$

$f'(x) = 8x \cdot e^{\frac{1}{x}} - 4x^2 \cdot \frac{1}{x^2} \cdot e^{\frac{1}{x}} = 4e^{\frac{1}{x}}(2x - 1)$

$u = 4e^{\frac{1}{x}} \qquad u' = -\frac{4}{x^2} \cdot e^{\frac{1}{x}}$

$v = 2x - 1 \qquad v' = 2$

$f''(x) = -\frac{4}{x^2} \cdot e^{\frac{1}{x}} \cdot (2x - 1) + 8e^{\frac{1}{x}} = 4e^{\frac{1}{x}}\left(2 + \frac{1-2x}{x^2}\right)$