

Aufgabenblatt Ableitungen**der Exponentialfunktion**

Level 3 – Expert – Blatt 1

Dokument mit 15 Aufgaben

Aufgabe A1

Bestimme die erste Ableitung und vereinfache so weit wie möglich.

a) $f(x) = -e^{-2x} \cdot \sin(e^x)$

b) $f(x) = \frac{\cos(2x+4)}{2e^x}$

c) $f(x) = x^{e^2}$

d) $f(x) = x^{e^2} \cdot (x - 1)$

e) $f(x) = 5^{2x}$

f) $f_a(x) = 5a^{-x}$

g) $f_a(x) = a^x \cdot e^{2x}$

h) $f_a(x) = (4a^x + 5) \cdot \frac{1}{x}$

**Aufgabe A2**a) Zeige, dass die n -te Ableitung der Funktion f mit $f(x) = e^x \cdot (x + 1)$ lautet:

$$f^{(n)}(x) = e^x(x + n + 1)$$

b) Zeige, dass die n -te Ableitung der Funktion f mit $f(x) = e^{-x} \cdot (x - 1)$ lautet:

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n \cdot e^{-x}(x - (n + 1))$$

Aufgabe A3

Bestimme die 1. und 2. Ableitung der folgenden Funktionsgleichungen:

a) $f(x) = \left(\frac{1}{5}x^3 + 4\right)^2 \cdot e^{2x}$

b) $f(x) = (3x + e^{-x})^2$

c) $f(x) = 4(x^3 + \frac{1}{e^{(x-1)^2}})^2$

d) $f(x) = (x^2 - 4) \cdot e^{3x+3}$

e) $f(x) = \left(2x - e^x \cdot \frac{1}{2^x}\right)^2$

Aufgabenblatt Ableitungen der Exponentialfunktion

Differenzialrechnung

Lösungen

Level 3 – Expert – Blatt 2

Lösung A1

a) $f(x) = -e^{-2x} \cdot \sin(e^x)$

$$u = -e^{-2x}$$

$$v = \sin(e^x)$$

$$u' = 2e^{-2x}$$

$$v' = e^x \cdot \cos(e^x)$$

$$f'(x) = 2e^{-2x} \cdot \sin(e^x) - e^{-2x} \cdot e^x \cdot \cos(e^x) = e^{-2x} \cdot (2 \sin(e^x) - e^x \cdot \cos(e^x))$$

b) $f(x) = \frac{\cos(2x+4)}{2e^x}$

$$u = \cos(2x+4)$$

$$u' = -2\sin(2x+4)$$

$$v = 2e^x$$

$$v' = 2e^x$$

$$f'(x) = \frac{-4e^x \cdot \sin(2x+4) - 2e^x \cdot \cos(2x+4)}{4e^{2x}} = -\frac{2 \sin(2x+4) + \cos(2x+4)}{2e^x}$$

c) $f(x) = x^{e^2}$

$$d) f(x) = x^{e^2} \cdot (x-1)$$

$$f'(x) = e^2 \cdot x^{e^2-1}$$

$$f'(x) = x^{e^2-1} ((e^2 + 1) \cdot x - e^2)$$

e) $f(x) = 5^{2x}$

$$f'(x) = 2 \ln(5) \cdot 5^{2x}$$

f) $f_a(x) = 5a^{-x}$

$$f'_a(x) = -5 \cdot \ln(a) \cdot a^{-x}$$

g) $f_a(x) = a^x \cdot e^{2x}$

$$u = a^x$$

$$u' = \ln(a) \cdot a^x$$

$$v = e^{2x}$$

$$v' = 2e^{2x}$$

$$f'_a(x) = \ln(a) \cdot a^x \cdot e^{2x} + 2e^{2x} \cdot a^x = a^x \cdot e^{2x} \cdot (\ln(a) + 2)$$

h) $f_a(x) = (4a^x + 5) \cdot \frac{1}{x}$

$$u = 4a^x + 5$$

$$u' = 4 \ln(a) \cdot a^x$$

$$v = \frac{1}{x}$$

$$v' = -\frac{1}{x^2}$$

$$f'_a(x) = \frac{4 \ln(a) \cdot a^x}{x} - \frac{4a^x + 5}{x^2} = \frac{4a^x}{x} \cdot \left(\ln(a) - \frac{5}{x} \right)$$

Lösung A2

a) $f(x) = e^x \cdot (x+1)$

$$f'(x) = e^x \cdot (x+2)$$

$$f''(x) = e^x \cdot (x+4)$$

$$f''(x) = e^x \cdot (x+3)$$

$$f'''(x) = e^x \cdot (x+5)$$

Durch mehrfaches Ableiten zeigt sich, dass die ursprüngliche Konstante 1 in der Klammer mit jeder weiteren Ableitung um 1 zunimmt. Somit ist:

$$f^{(n)}(x) = e^x \cdot (x+n+1)$$

b) $f(x) = e^{-x} \cdot (x-1)$

$$f'(x) = -e^{-x} \cdot (x-2)$$

$$f''(x) = -e^{-x} \cdot (x-4)$$

$$f''(x) = e^{-x} \cdot (x-3)$$

$$f'''(x) = e^{-x} \cdot (x-5)$$

Durch mehrfaches Ableiten zeigt sich, dass die ursprüngliche Konstante 1 in der Klammer mit jeder weiteren Ableitung um 1 abnimmt. Weiterhin wechselt das Vorzeichen von Ableitung zu Ableitung von „+“ nach „-“ und umgekehrt. Die jeweilige Ableitung ist negativ für ungerade n und positiv für gerade n . Dies ist in der Ableitung berücksichtigt durch den Faktor $(-1)^n$. Somit ist:

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n \cdot e^{-x} \cdot (x-(n+1))$$

Differenzialrechnung

Aufgabenblatt Ableitungen der Exponentialfunktion

Lösungen
Level 3 – Expert – Blatt 2

Lösung A3

- a) $f(x) = \left(\frac{1}{5}x^3 + 4\right)^2 \cdot e^{2x}$
- $$u = \left(\frac{1}{5}x^3 + 4\right)^2 \quad u' = \frac{6}{5}x^2 \cdot \left(\frac{1}{5}x^3 + 4\right)$$
- $$v = e^{2x} \quad v' = 2e^{2x}$$
- $$f'(x) = \frac{6}{5}x^2 \cdot \left(\frac{1}{5}x^3 + 4\right) \cdot e^{2x} + 2e^{2x} \cdot \left(\frac{1}{5}x^3 + 4\right)^2 = \frac{2e^{2x}}{25} \cdot (x^6 + 3x^5 + 40x^3 + 6x^2 + 400)$$
- $$u = \frac{2e^{2x}}{25} \quad u' = \frac{4e^{2x}}{25}$$
- $$v = x^6 + 3x^5 + 40x^3 + 6x^2 + 400 \quad v' = 6x^5 + 15x^4 + 120x^2 + 12x$$
- $$f''(x) = \frac{4e^{2x}}{25} \cdot (x^6 + 3x^5 + 40x^3 + 6x^2 + 400) + \frac{2e^{2x}}{25} \cdot (6x^5 + 15x^4 + 120x^2 + 12x)$$
- $$= \frac{2e^{2x}}{25} \cdot (2x^6 + 12x^5 + 15x^4 + 80x^3 + 132x^2 + 12x + 800)$$
- b) $f(x) = (3x + e^{-x})^2$
- $$f'(x) = 2 \cdot (3x + e^{-x}) \cdot (3 - e^{-x}) = 18x - 6xe^{-x} + 6e^{-x} - 2e^{-2x}$$
- $$= 6x(3 - e^{-x}) + 2e^{-x}(3 - e^{-x}) = (3 - e^{-x})(6x + 2e^{-x})$$
- $$u = 3 - e^{-x} \quad u' = e^{-x}$$
- $$v = 6x + 2e^{-x} \quad v' = 6 - 2e^{-x}$$
- $$f''(x) = e^{-x} \cdot (6x + 2e^{-x}) + (6 - 2e^{-x}) \cdot (3 - e^{-x})$$
- $$= 6xe^{-x} + 2e^{-2x} + 18 - 6e^{-x} - 6e^{-x} + 2e^{-2x}$$
- $$= 6xe^{-x} + 4e^{-2x} - 12e^{-x} + 18$$
- c) $f(x) = 4(x^3 + \frac{1}{e^{(x-1)^2}})^2 = 4(e^{-(x-1)^2} + x^3)^2$
- $$f'(x) = 8(e^{-(x-1)^2} + x^3) \cdot (3x^2 - 2(x-1) \cdot e^{-(x-1)^2})$$
- $$u = e^{-(x-1)^2} + x^3 \quad u' = 3x^2 - 2(x-1) \cdot e^{-(x-1)^2}$$
- $$v = 3x^2 - 2(x-1) \cdot e^{-(x-1)^2} \quad v' = 6x + 4(x-1)^2 \cdot e^{-(x-1)^2} - 2e^{-(x-1)^2}$$
- $$f''(x) = 8(3x^2 - 2(x-1) \cdot e^{-(x-1)^2})^2 + 8(e^{-(x-1)^2} + x^3) \cdot (6x + 4(x-1)^2 \cdot e^{-(x-1)^2} - 2e^{-(x-1)^2})$$
- d) $f(x) = (x^2 - 4) \cdot e^{3x+3}$
- $$u = x^2 - 4 \quad u' = 2x$$
- $$v = e^{3x+3} \quad v' = 3 \cdot e^{3x+3}$$
- $$f'(x) = 2x \cdot e^{3x+3} + 3e^{3x+3} \cdot (x^2 - 4) = e^{3x+3} \cdot (2x + 3x^2 - 12)$$
- $$u = e^{3x+3} \quad u' = 3 \cdot e^{3x+3}$$
- $$v = 2x + 3x^2 - 12 \quad v' = 2 + 6x$$
- $$f''(x) = 3 \cdot e^{3x+3} \cdot (2x + 3x^2 - 12) + e^{3x+3} \cdot (2 + 6x) = e^{3x+3}(6x + 9x^2 - 36 + 2 + 6x)$$
- $$= e^{3x+3}(9x^2 + 12x - 34)$$
- e) $f(x) = \left(2x - e^x \cdot \frac{1}{2^x}\right)^2$
- $$u = e^x \quad u' = e^x$$
- $$v = \frac{1}{2^x} \quad v' = -\frac{\ln(2)}{2^x}$$
- $$f'(x) = 2(2x - e^x \cdot \frac{1}{2^x}) \cdot \left(2 - \frac{e^x}{2^x} + \frac{e^x \cdot \ln(2)}{2^x}\right)$$
- $$u = 2(2x - e^x \cdot \frac{1}{2^x}) \quad u' = 2\left(2 - \frac{e^x}{2^x} + \frac{e^x \cdot \ln(2)}{2^x}\right)$$
- $$v = 2 - \frac{e^x}{2^x} + \frac{e^x \cdot \ln(2)}{2^x} \quad v' = \frac{-e^x(\ln^2(2) - 2\ln(2) + 1)}{2^x}$$
- $$'(x) = 2\left(2 - \frac{e^x}{2^x} + \frac{e^x \cdot \ln(2)}{2^x}\right)^2 + 2(2x - e^x \cdot \frac{1}{2^x}) \cdot \frac{-e^x(\ln^2(2) - 2\ln(2) + 1)}{2^x}$$
- $$= 2^{2-2x}(2^{2x+1} + (\ln^2(2) - 2\ln(2) + 1) \cdot e^{2x})$$
- $$+ ((-\ln^2(2) + 2\ln(2) - 1)x + 2\ln(2) - 2)2^x e^x$$