Die Ableitung der Exponentialfunktion

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Inhaltsverzeichnis
Ableitung der Exponentialfunktion

Kapitel mit 100 Aufgaben

	Seite
WIKI Regeln und Formeln	03
Level 1 Grundlagen	
Aufgabenblatt 1 *(20 Aufgaben)*	06
Lösungen zum Aufgabenblatt 1	07
Level 2 Fortgeschritten	
Aufgabenblatt 1 *(28 Aufgaben)*	08
Lösungen zum Aufgabenblatt 1	09
Aufgabenblatt 2 *(23 Aufgaben)*	11
Lösungen zum Aufgabenblatt 2	12
Level 3 Expert	
Aufgabenblatt 1 *(15 Aufgaben)*	13
Lösungen zum Aufgabenblatt 1	14
Aufgabenblatt 2 *(14 Aufgaben)*	17
Lösungen zum Aufgabenblatt 2	18

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Definition des Begriffs Ableitung

Merksatz

Die Ableitung einer Funktion f an der Stelle x_0 ist gleich der Steigung der Tangente an die Kurve im Punkt $(x|f(x))$. Sie entsteht über den Grenzwert des Differenzenquotienten $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ für $\Delta x \longrightarrow 0$.

Einleitung

Nachdem wir nun (fast) alle Ableitungsregeln kennengelernt haben, verbleibt noch die Regel für die Ableitung der Exponentialfunktion.
Wir kennen ja bereits die Form einer Exponentialfunktion f mit $f(x) = a \cdot b^x$. Selbstverständlich hat eine solche Funktion eine Änderungsrate und somit auch eine Ableitung. In diesem Kapitel lernen wir die Ableitungsregel für Exponentialfunktionen kennen.

Die Ableitung der Exponentialfunktion

Wir betrachten uns hierzu als erstes die natürliche Exponentialfunktion f mit $f(x) = e^x$. (e ist die Eulersche Zahl und ist $e = 2{,}78128\ldots$, eine irrationale Zahl).

Wie bei anderen Funktionen auch, stellen wir den Differenzenquotienten auf mit

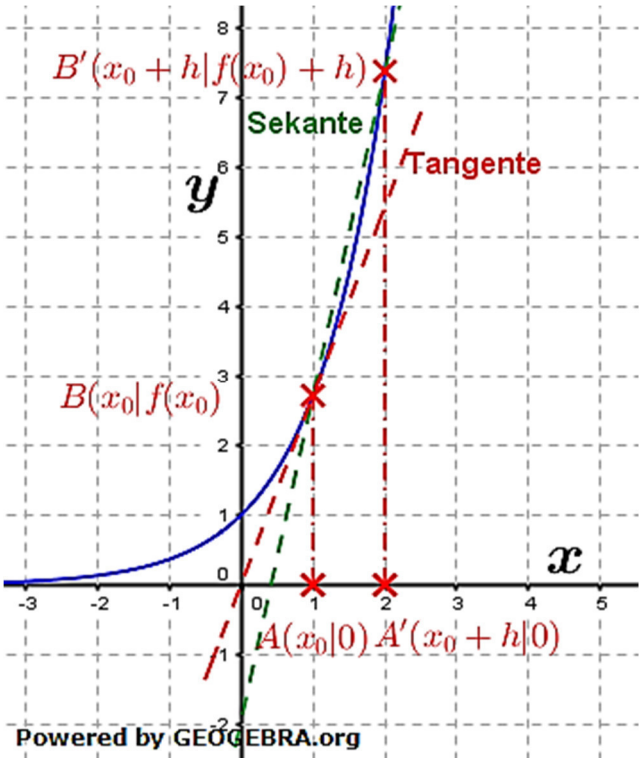
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{x_0 + h - x_0} = \frac{e^{x_0+h} - e^{x_0}}{h}$$

Dieser Differenzenquotient stellt die Steigung der Sekante durch die Punkte B und B' dar. Wie bei allen anderen Nachweisen auch, lassen wir nun den Wert von h gegen 0 laufen, sodass letztendlich der Punkt B' mit dem Punkt B zusammenfällt und aus der Sekante damit eine Tangente an den Graphen von f entstanden ist. Wir bilden also den Differenzialquotienten

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{e^{x_0+h} - e^{x_0}}{h}.$$

Um dies bewerkstelligen zu können, müssen wir zunächst gemäß den Potenzregeln einige Umformungen vornehmen. Gemäß der 1. Potenzregel formen wir um:

$$\frac{e^{x_0+h} - e^{x_0}}{h} = \frac{e^{x_0} \cdot e^h - e^{x_0}}{h}$$
$$= \frac{e^{x_0} \cdot (e^h - 1)}{h}$$
$$= e^{x_0} \cdot \frac{e^h - 1}{h}$$



Jetzt müssen wir noch für den Ausdruck $\frac{e^h-1}{h}$ den Grenzwert für $h \longrightarrow 0$ untersuchen. Ohne an dieser Stelle auf den näheren Beweis eingehen zu wollen – dieser erfolgt im Kapitel „Funktionslehre ⟶ Exponentialfunktionen ⟶ Die e-Funktion", gilt:

$$e^h = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^n}{n!} = 1 + h + \frac{h^2}{2!} + \frac{h^3}{3!} + \frac{h^4}{4!} + \frac{h^5}{5!} + \frac{h^6}{6!} + \cdots.$$

Durch Umformung erhalten wir:

$$e^h - 1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^n}{n!} = h + \frac{h^2}{2!} + \frac{h^3}{3!} + \frac{h^4}{4!} + \frac{h^5}{5!} + \frac{h^6}{6!} + \cdots$$

$$\frac{e^h - 1}{h} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^n}{n!} = 1 + \frac{h}{2!} + \frac{h^2}{3!} + \frac{h^3}{4!} + \frac{h^5}{5!} + \frac{h^5}{6!} + \cdots$$

und damit $$\lim_{h \longrightarrow 0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^n}{n!} = 1 + \frac{h}{2!} + \frac{h^2}{3!} + \frac{h^3}{4!} + \frac{h^4}{5!} + \frac{h^5}{6!} + \cdots = 1.$$

Mit anderen Worten:
Die Steigung der Tangente an die Exponentialfunktion e^x an der Stelle x_0 ist immer gleich deren Funktionswert an der Stelle x_0.

Merksatz Ableitung Exponentialfunktion

Die Ableitung der Exponentialfunktion mit $f(x) = e^x$ lautet $f'(x) = e^x$.

Höhere Ableitungen der Exponentialfunktion

Jetzt kommt $f(x) = e^x$ aber nicht alleine vor, sondern wird die Exponentialfunktion in fast allen Fällen mit anderen Funktionsarten verkettet. In diesem Falle gelten alle Ableitungsregeln, die wir nun kennen. Am besten schaust du dir die nachfolgenden Beispiele an.

Beispiel 1

$$f(x) = a \cdot e^x \implies f'(x) = a \cdot e^x$$

Es gilt die Faktorregel, Faktoren bleiben bei der Ableitung erhalten.

Beispiel 2

$$f(x) = e^{b \cdot x} \implies f'(x) = b \cdot e^{b \cdot x}$$

Es gilt die Kettenregel, die äußere Funktion ist die Exponentialfunktion mit $u(x) = e^x$, die innere Funktion ist der Exponent von e mit $v(x) = b \cdot x$ und somit ist $f(x) = u\big(v(x)\big) = e^{b \cdot x}$ und $f'(x) = u'(x) \cdot v'(x) = b \cdot e^{b \cdot x}$.

Beispiel 3

$$f(x) = a \cdot e^{x^2+5} \implies f'(x) = a \cdot 2x \cdot e^{x^2+5}$$

Auch hier gilt die Kettenregel wie in Beispiel 2.

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Beispiel 4

$$f(x) = \frac{1}{x} + 5e^{sin(x)} \implies f'(x) = -\frac{1}{x^2} + 5cos(x) \cdot e^{sin(x)}$$

Hier gilt zunächst die Summenregel, nach der alle Glieder einer Funktionsgleichung einzeln abgeleitet werden und für die e-Funktion die Kettenregel wie in Beispiel 2.

Wie du in den Beispielen erkennst, ändert sich der Exponent der e-Funktion nie, dieser bleibt immer erhalten, so wie er ursprünglich vorgegeben ist. Dies führt uns zu einem sehr wichtigen

Merksatz

Bei der Ableitung der Exponentialfunktion mit $f(x) = a \cdot e^{b \cdot x + c}$ verändert sich durch die Ableitung der Exponent der e-Funktion zu keinem Zeitpunkt. Auf den Exponenten der e-Funktion ist bei jeder Ableitung ***stets*** *die* ***Kettenregel*** *anzuwenden.*

Die Ableitung der allgemeinen Exponentialfunktion

Die allgemeine Exponentialfunktion lautet

$$f(x) = a^x.$$

Wie sieht nun aber die Ableitung einer Exponentialfunktion mit einer anderen Basis als e aus? Nachdem wir ja die Ableitung der e-Funktion nachgewiesen haben, machen wir uns für den Ableitungsnachweis der allgemeinen Exponentialfunktion die Potenzgesetze und die Logarithmengesetze zu eigen.

Die Potenz a^x lässt sich auch schreiben mit $\left(10^{log(a)}\right)^x = 10^{log(a)x}$. Alternativ zum 10-er Logarithmus können wir auch den natürlichen Logarithmus ln verwenden. Dadurch erhalten wir für

$$f(x) = a^x = e^{ln(a)x}.$$

Und da wir ja die Ableitung der e-Funktion bereits kennen, ist

$$f'(x) = ln(a) \cdot e^{ln(a)x}.$$

Wir schreiben $e^{ln(a)x}$ wieder um zu a^x und erhalten endgültig

$$f'(x) = ln(a) \cdot a^x.$$

Merksatz Ableitung Exponentialfunktion allgemein

Die Ableitung einer Exponentialfunktion mit $f(x) = a^x$ lautet

$$f'(x) = ln(a) \cdot a^x.$$

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Aufgabenblatt Ableitungen der Exponentialfunktion

Level 1 – Grundlagen – Blatt 1

Dokument mit 20 Aufgaben

Aufgabe A1

Bilde die Ableitungen der Exponentialfunktionen.

$f_1(x) = 3 \cdot e^x$	$f_1'(x) =$
$f_2(x) = \frac{1}{2} \cdot e^x$	$f_2'(x) =$
$f_3(x) = 3 \cdot e^{2x}$	$f_3'(x) =$
$f_4(x) = e^{0,5x} \cdot 2$	$f_4'(x) =$
$f_5(x) = a \cdot e^{\frac{1}{a} \cdot x}$	$f_5'(x) =$
$f_6(t) = \frac{1}{b} \cdot e^t$	$f_6'(t) =$
$f_7(t) = a^2 \cdot e^{\sqrt{2}t}$	$f_7'(t) =$

Aufgabe A2

Bilde die Ableitungen der Exponentialfunktionen und vereinfache so weit wie möglich.

$f_1(x) = (4 - x)(e^{3x} - 2)$	$f_1'(x) =$
$f_2(x) = (3 - 2x^2)\left(\frac{1}{2}e^x + 3x\right)$	$f_2'(x) =$
$f_3(x) = (x^{2a} - b)(e^{2ax} - c)$	$f_3'(x) =$
$f_4(x) = e^x \cdot (-4x^2 + 3)$	$f_4'(x) =$
$f_5(x) = 3e^{2x} \cdot (1 - e^x)$	$f_5'(x) =$
$f_6(t) = (t + 1) \cdot (t - 1) \cdot e^{2t}$	$f_6'(t) =$
$f_7(t) = e^{3t} + e^{2t} - e^t$	$f_7'(t) =$

Aufgabe A3

Drei der sechs Ableitungen wurden falsch abgeleitet. Suche den Fehler und korrigiere.

$f_1(x) = (12e - 5)(1 - 3e^x)$	$f_1'(x) = -3e^x(12e - 5)$
$f_2(x) = (2e^x + 1)(3e^x + 1)$	$f_2'(x) = 12e^{2x-1}$
$f_3(x) = e^{4x} \cdot (3e^x + 10)$	$f_3'(x) = 5e^{4x} \cdot (3e^{2x} + 8)$
$f_4(x) = 0,5e^x \cdot (2e - 4e^2)$	$f_4'(x) = 0,5e^x \cdot (2e - 4e^2)$
$f_5(x) = 4e^{2x+5}$	$f_5'(x) = 8e^{2x+4}$
$f_6(t) = (5x^3 - 2x) \cdot e^{-x}$	$f_6'(t) = -e^{-x} \cdot (5x^3 - 15x^2 - 2x + 2)$

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Lösung A1

$f_1(x) = 3 \cdot e^x$	$f_1'(x) = 3 \cdot e^x$
$f_2(x) = \frac{1}{2} \cdot e^x$	$f_2'(x) = \frac{1}{2} \cdot e^x$
$f_3(x) = 3 \cdot e^{2x}$	$f_3'(x) = 6 \cdot e^{2x}$
$f_4(x) = e^{0,5x} \cdot 2$	$f_4'(x) = e^{0,5x}$
$f_5(x) = a \cdot e^{\frac{1}{a} \cdot x}$	$f_5'(x) = e^{\frac{1}{a}x}$
$f_6(t) = \frac{1}{b} \cdot e^t$	$f_6'(t) = \frac{1}{b} \cdot e^t$
$f_7(t) = a^2 \cdot e^{\sqrt{2}t}$	$f_7'(t) = a^2\sqrt{2} \cdot e^{\sqrt{2}t}$

Lösung A2

$f_1(x) = (4-x)(e^{3x}-2)$	$f_1'(x) = (11-3x) \cdot e^{3x} + 2$
$f_2(x) = (3-2x^2)\left(\frac{1}{2}e^x + 3x\right)$	$f_2'(x) = -4x\left(\frac{1}{2}e^x + 3x\right) + \left(\frac{1}{2}e^x + 3\right) \cdot (3-2x^2)$
$f_3(x) = (x^{2a}-b)(e^{2ax}-c)$	$f_3'(x) = 2a \cdot x^{2a-1} \cdot (e^{2ax}-c) + 2ae^{2ax} \cdot (x^{2a}-b)$
$f_4(x) = e^x \cdot (-4x^2+3)$	$f_4'(x) = -8x \cdot e^x - 4x^2 \cdot e^x + 3e^x = -e^x \cdot (4x^2+8x-3)$
$f_5(x) = 3e^{2x} \cdot (1-e^x)$	$f_5'(x) = 6e^{2x} - 9e^{3x} = 3e^{2x}(2-3e^x)$
$f_6(t) = (t+1) \cdot (t-1) \cdot e^{2t}$	$f_6'(t) = 2t \cdot e^{2t} + 2e^{2t} \cdot (t^2-1) - 2e^{2t} = 2e^{2t}(t^2+t-1)$
$f_7(t) = e^{3t} + e^{2t} - e^t$	$f_7'(t) = 3e^{3t} + 2e^{2t} - e^t = e^t \cdot (3e^{2t} - 2e^t - 1)$

Lösung A3

$f_1(x) = (12e-5)(1-3e^x)$	$f_1'(x) = -3e^x(12e-5)$
$f_2(x) = (2e^x+1)(3e^x+1)$	$\cancel{f_2'(x) = 12e^{2x-1}}$ $f_2'(x) = 12e^{2x} + 5e^x$
$f_3(x) = e^{4x} \cdot (3e^x+10)$	$\cancel{f_3'(x) = 5e^{4x} \cdot (3e^{2x}+8)}$ $f_3'(x) = 5e^{4x} \cdot (3e^x+8)$
$f_4(x) = 0,5e^x \cdot (2e-4e^2)$	$f_4'(x) = 0,5e^x \cdot (2e-4e^2)$
$f_5(x) = 4e^{2x+5}$	$\cancel{f_5'(x) = 8e^{2x+4}}$ $f_5'(x) = 8e^{2x+5}$
$f_6(t) = (5x^3-2x) \cdot e^{-x}$	$f_6'(t) = -e^{-x} \cdot (5x^3 - 15x^2 - 2x + 2)$

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Aufgabe A1

Wahr oder falsch?

a) Für $f(x) = e^x$ gilt $f^{(4)\prime}(x) = e^{4x}$

b) Für $f(x) = e^x$ gilt $f^{(9)\prime}(x) = e^x$

c) Für $f(x) = e^{-x}$ gilt $f^{(10)\prime}(x) = -e^{-x}$

d) Für $f(x) = e^{x+1}$ gilt $f^{(10)\prime}(x) = e^{x+1}$

e) Für $f(x) = e^{x-5}$ gilt $f''(x) = (x^2 - 11x + 30) \cdot e^{x-7}$

Aufgabe A2

Bestimme den exakten Wert der Steigung des Graphen von f an der Stelle x_0.

a) $f(x) = e^x + x;\ x_0 = 1$

b) $f(x) = \frac{1}{2}x + e^{-x};\ x_0 = -1$

c) $f(x) = e^{2x} - e^x;\ x_0 = \frac{1}{2}$

d) $f(x) = \frac{1}{4}x^2 + e^{2x};\ x_0 = 0$

e) $f(x) = e^{\sqrt{2x}} + \sqrt{2}e^x;\ x_0 = 2$

f) $f(x) = x \cdot e^x;\ x_0 = 0$

g) $f(x) = x \cdot e^{-x};\ x_0 = -1$

h) $f(x) = 2e^{3x} - x^2;\ x_0 = \frac{2}{3}$

i) $f_t(x) = -te^x + t^2e^{-x};\ x_0 = \frac{1}{4}$

j) $f_t(x) = \frac{t}{\sqrt{3} \cdot e^x};\ x_0 = \sqrt{2}$

k) $f_t(x) = t^2(e^x)^4;\ x_0 = t$

l) $f_t(x) = -\frac{t}{2}\sqrt{e^x};\ x_0 = \frac{t}{2}$

Aufgabe A3

In welchem Punkt hat der Graph von f mit $f(x) = e^x$ dieselbe Steigung wie die erste Winkelhalbierende, die x-Achse bzw. die Gerade mit der Gleichung $y = ex$?

Aufgabe A4

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = e^{-x} - 2$ für $x \in \mathbb{R}$.

a) An welchen Stellen x_0 gilt $f'(x_0) = -e$?

b) Gibt es Stellen mit $f'(x_0) > 0$?

Aufgabe A5

Bestimme jeweils die erste und zweite Ableitung.

a) $f(x) = 2e^{2x} - 1$

b) $f(x) = 2e^{-2x} + 1$

c) $f(x) = x - e^{0,3\pi x}$

d) $f(x) = 4e^{(3x-5)}$

e) $f(x) = \frac{\pi}{e} - e^{\frac{\pi}{e}x}$

f) $f(x) = 2e^{x^2-2x}$

g) $f(x) = -3e^{-2x^2+1}$

h) $f(x) = 4x^2 \cdot e^{\frac{1}{x}}$

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Lösung A1

a) Für $f(x) = e^x$ gilt $f^{(4)\prime}(x) = e^{4x}$ ist falsch, denn die 4. Ableitung von e^x bleibt e^x.

b) Für $f(x) = e^x$ gilt $f^{(9)\prime}(x) = e^x$ ist richtig.

c) Für $f(x) = e^{-x}$ gilt $f^{(10)\prime}(x) = -e^{-x}$ ist falsch, denn die 10. Ableitung von e^{-x} ist e^{-x}.

d) Für $f(x) = e^{x+1}$ gilt $f^{(10)\prime}(x) = e^{x+1}$ ist richtig.

e) Für $f(x) = e^{x-5}$ gilt $f''(x) = (x^2 - 11x + 30) \cdot e^{x-7}$ ist falsch, denn die 2. Ableitung von e^{x-5} bleibt e^{x-5}.

Lösung A2

a) $f(x) = e^x + x;\ x_0 = 1$ $\qquad f'(x) = e^x + 1$
$f'(1) = e + 1$

b) $f(x) = \frac{1}{2}x + e^{-x};\ x_0 = -1$ $\qquad f'(x) = \frac{1}{2} - e^{-x}$
$f'(-1) = \frac{1}{2} - e$

c) $f(x) = e^{2x} - e^x;\ x_0 = \frac{1}{2}$ $\qquad f'(x) = 2e^{2x} - e^x$
$f'\left(\frac{1}{2}\right) = 2e - e^{\frac{1}{2}} = 2e - \sqrt{e}$

d) $f(x) = \frac{1}{4}x^2 + e^{2x};\ x_0 = 0$ $\qquad f'(x) = \frac{1}{2}x + 2e^{2x}$
$f'(0) = 2$

e) $f(x) = e^{\sqrt{2x}} + \sqrt{2}e^x;\ x_0 = 2$ $\qquad f'(x) = \frac{e^{\sqrt{2x}}}{\sqrt{2x}} + \sqrt{2}e^x$
$f'(2) = \frac{e^2}{2} + \sqrt{2}e^2 = e^2 \cdot \left(\frac{1}{2} + \sqrt{2}\right)$

f) $f(x) = x \cdot e^x;\ x_0 = 0$ $\qquad f'(x) = e^x + x \cdot e^x = e^x(x+1)$
$f'(0) = 1$

g) $f(x) = x \cdot e^{-x};\ x_0 = -1$ $\qquad f'(x) = e^{-x} - x \cdot e^{-x} = e^{-x}(1-x)$
$f'(-1) = 2e$

h) $f(x) = 2e^{3x} - x^2;\ x_0 = \frac{2}{3}$ $\qquad f'(x) = 6e^{3x} - 2x$
$f'\left(\frac{2}{3}\right) = 6e^2 - \frac{4}{3}$

i) $f_t(x) = -te^x + t^2e^{-x};\ x_0 = \frac{1}{4}$ $\qquad f'(x) = -te^x - t^2e^{-x}$
$f_t{}'\left(\frac{1}{4}\right) = -te^{\frac{1}{4}} - t^2e^{-\frac{1}{4}} = -t\left(\sqrt[4]{e} + \frac{t}{\sqrt[4]{e}}\right) = -t\left(\frac{\sqrt{e}+t}{\sqrt[4]{e}}\right)$

j) $f_t(x) = \frac{t}{\sqrt{3} \cdot e^x};\ x_0 = \sqrt{2}$ $\qquad f_t{}'(x) = -\frac{t}{\sqrt{3} \cdot e^x}$
$f_t{}'(\sqrt{2}) = -\frac{t}{\sqrt{3} \cdot e^{\sqrt{2}}} = -\frac{\sqrt{3}t}{3e^{\sqrt{2}}}$

k) $f_t(x) = t^2(e^x)^4;\ x_0 = t$ $\qquad f_t{}'(x) = 4t^2 \cdot e^{4x}$
$f_t{}'(t) = 4t^2e^{4t}$

l) $f_t(x) = -\frac{t}{2}\sqrt{e^x} = -\frac{t}{2} \cdot e^{\frac{1}{2}x};\ x_0 = \frac{t}{2}$ $\qquad f_t{}'(x) = -\frac{t}{4} \cdot e^{\frac{1}{2}x}$
$f_t{}'\left(\frac{t}{2}\right) = -\frac{t}{4} \cdot e^t$

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Lösung A3

$f(x) = e^x; \quad f'(x) = e^x$

1. Winkelhalbierende: $y = x$ hat die Steigung $m = 1$:

$f'(x) = 1 = e^x \quad \Rightarrow \quad x_1 = 0$

f hat in $x_1 = 0$ dieselbe Steigung wie die erste Winkelhalbierende.

Die x-Achse selbst hat die Steigung $m = 0$:

$f'(x) = 0 = e^x \quad \Rightarrow$ keine Lösung, denn e^x kann nie Null werden.

f hat an keiner Stelle dieselbe Steigung wie die x-Achse.

Die Gerade $y = ex$ hat die Steigung $m = e$:

$f'(x) = e = e^x \quad \Rightarrow \quad x_0 = 1$

f hat in $x_0 = 1$ dieselbe Steigung wie die Gerade mit $y = ex$.

Lösung A4

$f(x) = e^{-x} - 2; \quad f'(x) = -e^{-x}$

a) $-e^{-x} = -e; \Rightarrow \; x_0 = -1$

b) Es gibt keiner Stellen $f'(x_0) > 0$, da $\mathbb{W}$ von $e^{-x} > 0$, somit stets $-e^{-x} < 0$.

Lösung A5

a) $f(x) = 2e^{2x} - 1$ $\quad f'(x) = 4e^{2x}$ $\quad f''(x) = 8e^{2x}$

b) $f(x) = 2e^{-2x} + 1$ $\quad f'^{(x)} = -4e^{-2x}$ $\quad f''(x) = 8e^{-2x}$

c) $f(x) = x - e^{0,3\pi x}$ $\quad f'(x) = 1 - 0,3\pi e^{0,3\pi x}$ $\quad f''(x) = -0,09\pi^2 e^{0,3\pi x}$

d) $f(x) = 4e^{(3x-5)}$ $\quad f'(x) = 12e^{(3x-5)}$ $\quad f''(x) = 36e^{(3x-5)}$

e) $f(x) = \frac{\pi}{e} - e^{\frac{\pi}{e}x}$ $\quad f'(x) = -\frac{\pi}{e} e^{\frac{\pi}{e}x}$ $\quad f''(x) = -\frac{\pi^2}{e^2} e^{\frac{\pi}{e}x}$

f) $f(x) = 2e^{x^2-2x}$ $\quad f'(x) = 2(2x-2)e^{x^2-2x}$ $\quad f''(x) = 2(2x-2)^2 e^{x^2-2x}$

g) $f(x) = -3e^{-2x^2+1}$ $\quad f'(x) = 12xe^{-2x^2+1}$

$u = 12x \qquad u' = 12$

$v = e^{-2x^2+1} \qquad v' = -4x \cdot e^{-2x^2+1}$

$f''(x) = 12 \cdot e^{-2x^2+1} - 48x^2 e^{-2x^2+1} = 12e^{-2x^2+1}(1 - 4x^2)$

h) $f(x) = 4x^2 \cdot e^{\frac{1}{x}}$

$u = 4x^2 \qquad u' = 8x$

$v = e^{\frac{1}{x}} \qquad v' = -\frac{1}{x^2} \cdot e^{\frac{1}{x}}$

$f'(x) = 8x \cdot e^{\frac{1}{x}} - 4x^2 \cdot \frac{1}{x^2} \cdot e^{\frac{1}{x}} = 4e^{\frac{1}{x}}(2x - 1)$

$u = 4e^{\frac{1}{x}} \qquad u' = -\frac{4}{x^2} \cdot e^{\frac{1}{x}}$

$v = 2x - 1 \qquad v' = 2$

$f''(x) = -\frac{4}{x^2} \cdot e^{\frac{1}{x}} \cdot (2x - 1) + 8e^{\frac{1}{x}} = 4e^{\frac{1}{x}}\left(2 + \frac{1-2x}{x^2}\right)$

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Aufgabe A1

Bestimme die erste Ableitung und vereinfache soweit wie möglich.

a) $f(x) = -e^{2x-3}\left(x^2 - \frac{1}{x}\right)$

b) $f(x) = 4cos(2x+4) \cdot e^{-2x}$

c) $f(x) = e^{sin(2x)}$

d) $f(x) = e^{-cos(2x)}$

e) $f(x) = \frac{3x}{e^x+2x}$

f) $f(x) = -\frac{3}{4}e^x - e \cdot x$

g) $f(x) = e^{\left(\frac{1}{x}+x^2\right)}$

h) $f(x) = a \cdot e^{-x} + b \cdot e^{-2x}$

Aufgabe A2

Bestimme den exakten Wert der Steigung des Graphen von f an der Stelle x_0.

a) $f(x) = 2e^{2x} - 1;\ x_0 = 1$

b) $f(x) = 2e^{-3x};\ x_0 = \frac{1}{3}$

c) $f(x) = \pi e^{-\sin(0{,}5\pi x)} - cos(\pi x);\ x_0 = 2$

d) $f(x) = 4e^{(3\pi+2x)} + 1;\ x_0 = -\frac{3}{2}\pi$

e) $f(x) = e - \frac{2}{e^{-x}};\ x_0 = 1$

f) $f(x) = \frac{1}{e^{\left(\frac{\pi}{x}\right)}};\ x_0 = \pi$

g) $f(x) = -3e^{\left(2x^2-\frac{1}{4}\right)};\ x_0 = 1$

h) $f(x) = 4 \cdot e^{(x-2)^2};\ x_0 = 2$

i) $f_t(x) = -te^{2x+x^3} + t^2e^x;\ x_0 = -1$

j) $f_t(x) = \frac{t}{2\sqrt{3}}e^{\frac{1}{2}x} + \frac{2\sqrt{3}}{t \cdot e^{\frac{1}{2}x}};\ x_0 = 1$

k) $f_t(x) = t^2\, e^{-x^2} + e^2 t;\ x_0 = e$

l) $f_t(x) = -\frac{t}{2\sqrt{2}}e^x + \frac{t}{e \cdot x};\ x_0 = t$

Aufgabe A3

In welchem Punkt hat der Graph von f mit $f(x) = x^2 \cdot e^{2x}$ dieselbe Steigung wie die erste Winkelhalbierende bzw. die x-Achse?

Aufgabe A4

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \frac{x^2}{1+e^x}$ für $x \in \mathbb{R}$.

a) An welchen Stellen x_0 gilt $f'(x_0) = 0$?

b) Gibt es Stellen mit $f'(x_0) > 1$?

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Lösung A1

a) $f(x) = -e^{2x-3}\left(x^2 - \frac{1}{x}\right)$ $\quad u = -e^{2x-3}$ $\quad u' = -2e^{2x-3}$

$v = x^2 - \frac{1}{x}$ $\quad v' = 2x + \frac{1}{x^2}$

$f'(x) = -2e^{2x-3} \cdot \left(x^2 - \frac{1}{x}\right) - e^{2x-3} \cdot \left(2x + \frac{1}{x^2}\right) = -e^{2x-3} \cdot \left(2x^2 - \frac{2}{x} + 2x + \frac{1}{x^2}\right)$

b) $f(x) = 4cos(2x+4) \cdot e^{-2x}$ $\quad u = 4\cos(2x+4)$ $\quad u' = -8sin(2x+4)$

$v = e^{-2x}$ $\quad v' = -2e^{-2x}$

$f'(x) = -8si\,n(2x+4) \cdot e^{-2x} - 8\,cos(2x+4) \cdot e^{-2x}$

$= -8e^{-2x} \cdot (sin(2x+4) + cos(2x+4))$

c) $f(x) = e^{sin(2x)}$ $\quad f'(x) = 2cos(2x) \cdot e^{sin(2x)}$

d) $f(x) = e^{-cos(2x)}$ $\quad f'(x) = 2sin(2x) \cdot e^{-cos(2x)}$

e) $f(x) = \frac{3x}{e^x+2x}$ $\quad u = 3x$ $\quad u' = 3$

$v = e^x + 2x$ $\quad v' = e^x + 2$

$f'(x) = \frac{3(e^x+2x)-3x(e^x+2)}{(e^x+2x)^2} = \frac{3e^x+6x-3xe^x-6x}{(e^x+2x)^2} = \frac{3e^x(1-x)}{(e^x+2x)^2}$

f) $f(x) = -\frac{3}{4}e^x - e \cdot x$ $\quad f'(x) = -\frac{3}{4}e^x - e$

g) $f(x) = e^{\left(\frac{1}{x}+x^2\right)}$ $\quad f'(x) = \left(2x - \frac{1}{x^2}\right) \cdot e^{\left(\frac{1}{x}+x^2\right)}$

h) $f(x) = a \cdot e^{-x} + b \cdot e^{-2x}$ $\quad f'(x) = -a \cdot e^{-x} - 2b \cdot e^{-2x}$

Lösung A2

a) $f(x) = 2e^{2x} - 1;\ x_0 = 1$ $\quad f'(x) = 4e^{2x}$

$f'(0) = 4$

b) $f(x) = 2e^{-3x};\ x_0 = \frac{1}{3}$ $\quad f'(x) = -6e^{-3x}$

$f'\left(\frac{1}{3}\right) = -\frac{6}{e}$

c) $f(x) = \pi e^{-\sin(0{,}5\pi x)} - cos(\pi x);\ x_0 = 2$

$f'(x) = \pi si\,n(\pi x) - \frac{1}{2}\left(\pi^2 e^{-\sin(0{,}5\pi x)} \cdot \sin(0{,}5\pi x)\right)$ $\quad f'(2) = 0$

d) $f(x) = 4e^{(3\pi+2x)} + 1;\ x_0 = -\frac{3}{2}\pi$ $\quad f'(x) = 8e^{2x+3\pi}$

$f'\left(-\frac{3}{2}\pi\right) = 8e^{-3\pi+3\pi} = 8$

e) $f(x) = e - \frac{2}{e^{-x}};\ x_0 = 1$ $\quad f'(x) = -2e^x$

$f'(1) = -2e$

f) $f(x) = \frac{1}{e^{\left(\frac{\pi}{x}\right)}};\ x_0 = \pi$ $\quad f'(x) = \frac{\pi e^{-\frac{\pi}{x}}}{x^2}$

$f'(\pi) = \frac{1}{\pi \cdot e}$

g) $f(x) = -3e^{\left(2x^2-\frac{1}{4}\right)};\ x_0 = 1$ $\quad f'(x) = -12x \cdot e^{2x^2-\frac{1}{4}}$

$f'(1) = -12e^{\frac{7}{4}}$

h) $f(x) = 4 \cdot e^{(x-2)^2};\ x_0 = 2$ $\quad f'(x) = 8(x-2) \cdot e^{(x-2)^2}$

$f'(2) = 0$

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

i) $f_t(x) = -te^{2x+x^3} + t^2e^x;\ \ x_0 = -1$ $\qquad f_t{}'(x) = -te^x\left((3x^2+2)e^{x^3+x} - t\right)$

$f_t{}'(-1) = -\frac{t}{e}(5e^{-2} - t) = -\frac{5t - t^2 \cdot e^2}{e^3}$

j) $f_t(x) = \frac{t}{2\sqrt{3}}e^{\frac{1}{2}x} + \frac{2\sqrt{3}}{t \cdot e^{\frac{1}{2}x}};\ \ x_0 = 1$ $\qquad f_t{}'(x) = \frac{e^{-\frac{1}{2}x} \cdot (t^2e^x + 12)}{4\sqrt{3} \cdot t}$

$f_t{}'(1) = \frac{t^2 \cdot e + 12}{4\sqrt{3e} \cdot t}$

k) $f_t(x) = t^2\, e^{-x^2} + e^2 t;\ \ x_0 = e$ $\qquad f_t{}'(x) = -2t^2x \cdot e^{-x^2}$

$f_t{}'(e) = -t^2e \cdot \frac{1}{e^{e^2}} = -\frac{t^2e}{e^{e^2}} = -\frac{t^2}{e^{-1} \cdot e^{e^2}} = -\frac{t^2}{e^{e^2-1}}$

l) $f_t(x) = -\frac{t}{2\sqrt{2}}e^x + \frac{t}{e \cdot x};\ \ x_0 = t$ $\qquad f_t{}'(x) = -\frac{t \cdot e^x}{2\sqrt{2}} - \frac{t}{e \cdot x^2}$

$f_t{}'(t) = -\frac{t \cdot e^t}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{t \cdot e}$

Lösung A3

$f(x) = x^2 \cdot e^{2x};\quad f'(x) = 2x \cdot e^{2x} + 2x^2 \cdot e^{2x} = 2xe^{2x} \cdot (1+x)$

1. Winkelhalbierende: $y = x$ hat die Steigung $m = 1$:

$f'^{(x)} = 1 = 2xe^{2x} \cdot (1+x) \implies \quad x_0 = 0{,}2456126$

f hat in $x_0 \approx 0{,}25$ dieselbe Steigung wie die erste Winkelhalbierende.

Die x-Achse selbst hat die Steigung $m = 0$:

$f'^{(x)} = 0 = 2xe^{2x} \cdot (1+x) \quad \implies \quad x_1 = 0;\quad x_2 = -1$

f hat in $x = \{0; -1\}$ dieselbe Steigung wie die x-Achse.

Lösung A4

$f(x) = \frac{x^2}{1+e^x};\quad f'(x) = \frac{2x(1+e^x) - x^2e^x}{(1+e^x)^2} = \frac{x\left(2+e^x(2-x)\right)}{(1+e^x)^2}$

a) $\frac{x\left(2+e^x(2-x)\right)}{(1+e^x)^2} = 0;\ \implies\ x_1 = 0;\ \ x_2 = 2{,}217715$

b) Ja, es gibt keine Stellen mit $f'(x) > 1$, da $\mathbb{W}$ von $\frac{x\left(2+e^x(2-x)\right)}{(1+e^x)^2} =]-\infty; 0{,}359]$

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Aufgabenblatt Ableitungen der Exponentialfunktion

Level 3 – Expert – Blatt 1

Dokument mit 15 Aufgaben

Aufgabe A1

Bestimme die erste Ableitung und vereinfache so weit wie möglich.

a) $f(x) = -e^{-2x} \cdot sin(e^x)$

b) $f(x) = \frac{cos(2x+4)}{2e^x}$

c) $f(x) = x^{e^2}$

d) $f(x) = x^{e^2} \cdot (x-1)$

e) $f(x) = 5^{2x}$

f) $f_a(x) = 5a^{-x}$

g) $f_a(x) = a^x \cdot e^{2x}$

h) $f_a(x) = (4a^x + 5) \cdot \frac{1}{x}$

Aufgabe A2

a) Zeige, dass die n-te Ableitung der Funktion f mit $f(x) = e^x \cdot (x+1)$ lautet: $f^{(n)\prime}(x) = e^x(x+n+1)$

b) Zeige, dass die n-te Ableitung der Funktion f mit $f(x) = e^{-x} \cdot (x-1)$ lautet: $f^{(n)\prime}(x) = (-1)^n \cdot e^{-x}\big(x-(n+1)\big)$

Aufgabe A3

Bestimme die 1. und 2. Ableitung der folgenden Funktionsgleichungen:

a) $f(x) = \left(\frac{1}{5}x^3 + 4\right)^2 \cdot e^{2x}$

b) $f(x) = (3x + \mathrm{e}^{-\mathrm{x}})^2$

c) $f(x) = 4(x^3 + \frac{1}{e^{(x-1)^2}})^2$

d) $f(x) = (x^2 - 4) \cdot e^{3x+3}$

e) $f(x) = \left(2x - e^x \cdot \frac{1}{2^x}\right)^2$

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Lösung A1

a) $f(x) = -e^{-2x} \cdot sin(e^x)$ $\quad u = -e^{-2x} \quad u' = 2e^{-2x}$

$v = sin(e^x) \quad v' = e^x \cdot cos(e^x)$

$f'(x) = 2e^{-2x} \cdot sin(e^x) - e^{-2x} \cdot e^x \cdot cos(e^x) = e^{-2x} \cdot (2\,sin(e^x) - e^x \cdot cos(e^x))$

b) $f(x) = \frac{cos(2x+4)}{2e^x}$ $\quad u = \cos(2x+4) \quad u' = -2\sin(2x+4)$

$v = 2e^x \quad v' = 2e^x$

$f'(x) = \frac{-4e^x \cdot \sin(2x+4) - 2e^x \cdot \cos(2x+4)}{4e^{2x}} = -\frac{2\,sin(2x+4) + cos(2x+4)}{2e^x}$

c) $f(x) = x^{e^2}$

$f'(x) = e^2 \cdot x^{e^2-1}$

d) $f(x) = x^{e^2} \cdot (x-1)$

$f'(x) = x^{e^2-1}\left((e^2+1) \cdot x - e^2\right)$

e) $f(x) = 5^{2x}$ $\quad f'(x) = 2ln(5) \cdot 5^{2x}$

f) $f_a(x) = 5a^{-x}$ $\quad f_a'(x) = -5 \cdot ln(a) \cdot a^{-x}$

g) $f_a(x) = a^x \cdot e^{2x}$ $\quad u = a^x \quad u' = ln(a) \cdot a^x$

$v = e^{2x} \quad v' = 2e^{2x}$

$f_a{}'(x) = ln(a) \cdot a^x \cdot e^{2x} + 2e^{2x} \cdot a^x = a^x \cdot e^{2x} \cdot (ln(a) + 2)$

h) $f_a(x) = (4a^x + 5) \cdot \frac{1}{x}$ $\quad u = 4a^x + 5 \quad u' = 4ln(a) \cdot a^x$

$v = \frac{1}{x} \quad v' = -\frac{1}{x^2}$

$f_a{}'(x) = \frac{4\,ln(a) \cdot a^x}{x} - \frac{4a^x + 5}{x^2} = \frac{4a^x}{x} \cdot \left(ln(a) - \frac{5}{x}\right)$

Lösung A2

a) $f(x) = e^x \cdot (x+1)$

$f'(x) = e^x \cdot (x+2) \quad f''(x) = e^x \cdot (x+3)$

$f'''(x) = e^x \cdot (x+4) \quad f''''(x) = e^x \cdot (x+5)$

Durch mehrfaches Ableiten zeigt sich, dass die ursprüngliche Konstante 1 in der Klammer mit jeder weiteren Ableitung um 1 zunimmt. Somit ist:
$f^{(n)\prime}(x) = e^x(x+n+1)$

b) $f(x) = e^{-x} \cdot (x-1)$

$f'(x) = -e^{-x} \cdot (x-2) \quad f''(x) = e^{-x} \cdot (x-3)$

$f'''(x) = -e^{-x} \cdot (x-4) \quad f''''(x) = e^{-x} \cdot (x-5)$

Durch mehrfaches Ableiten zeigt sich, dass die ursprüngliche Konstante 1 in der Klammer mit jeder weiteren Ableitung um 1 abnimmt. Weiterhin wechselt das Vorzeichen von Ableitung zu Ableitung von „+" nach „−" und umgekehrt. Die jeweilige Ableitung ist negativ für ungerade n und positiv für gerade n. Dies ist in der Ableitung berücksichtigt durch den Faktor $(-1)^n$. Somit ist:
$f^{(n)\prime}(x) = (-1)^n \cdot e^{-x}\left(x - (n+1)\right)$

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Lösung A3

a) $f(x) = \left(\frac{1}{5}x^3 + 4\right)^2 \cdot e^{2x}$ $\quad u = \left(\frac{1}{5}x^3 + 4\right)^2 \quad u' = \frac{6}{5}x^2 \cdot \left(\frac{1}{5}x^3 + 4\right)$

$v = e^{2x} \quad v' = 2e^{2x}$

$$f'(x) = \frac{6}{5}x^2 \cdot \left(\frac{1}{5}x^3 + 4\right) \cdot e^{2x} + 2e^{2x} \cdot \left(\frac{1}{5}x^3 + 4\right)^2 = \frac{2e^{2x}}{25} \cdot (x^6 + 3x^5 + 40x^3 + 6x^2 + 400)$$

$u = \frac{2e^{2x}}{25} \quad u' = \frac{4e^{2x}}{25}$

$v = x^6 + 3x^5 + 40x^3 + 6x^2 + 400 \quad v' = 6x^5 + 15x^4 + 120x^2 + 12x$

$$f''(x) = \frac{4e^{2x}}{25} \cdot (x^6 + 3x^5 + 40x^3 + 6x^2 + 400) + \frac{2e^{2x}}{25} \cdot (6x^5 + 15x^4 + 120x^2 + 12x)$$
$$= \frac{2e^{2x}}{25} \cdot (2x^6 + 12x^5 + 15x^4 + 80x^3 + 132x^2 + 12x + 800)$$

b) $f(x) = (3x + e^{-x})^2$

$$f'(x) = 2 \cdot (3x + e^{-x}) \cdot (3 - e^{-x}) = 18x - 6xe^{-x} + 6e^{-x} - 2e^{-2x}$$
$$= 6x(3 - e^{-x}) + 2e^{-x}(3 - e^{-x}) = (3 - e^{-x})(6x + 2e^{-x})$$

$u = 3 - e^{-x} \quad u' = e^{-x}$

$v = 6x + 2e^{-x} \quad v' = 6 - 2e^{-x}$

$$f''(x) = e^{-x} \cdot (6x + 2e^{-x}) + (6 - 2e^{-x}) \cdot (3 - e^{-x})$$
$$= 6xe^{-x} + 2e^{-2x} + 18 - 6e^{-x} - 6e^{-x} + 2e^{-2x}$$
$$= 6xe^{-x} + 4e^{-2x} - 12e^{-x} + 18$$

c) $f(x) = 4(x^3 + \frac{1}{e^{(x-1)^2}})^2 = 4\left(e^{-(x-1)^2} + x^3\right)^2$

$$f'(x) = 8\left(e^{-(x-1)^2} + x^3\right) \cdot \left(3x^2 - 2(x-1) \cdot e^{-(x-1)^2}\right)$$

$u = e^{-(x-1)^2} + x^3 \quad u' = 3x^2 - 2(x-1) \cdot e^{-(x-1)^2}$

$v = 3x^2 - 2(x-1) \cdot e^{-(x-1)^2} \quad v' = 6x + 4(x-1)^2 \cdot e^{-(x-1)^2} - 2e^{-(x-1)^2}$

$$f''(x) = 8\left(3x^2 - 2(x-1) \cdot e^{-(x-1)^2}\right)^2 + 8\left(e^{-(x-1)^2} + x^3\right) \cdot \left(6x + 4(x-1)^2 \cdot e^{-(x-1)^2} - 2e^{-(x-1)^2}\right)$$

d) $f(x) = (x^2 - 4) \cdot e^{3x+3} \quad u = x^2 - 4 \quad u' = 2x$

$v = e^{3x+3} \quad v' = 3 \cdot e^{3x+3}$

$$f'(x) = 2x \cdot e^{3x+3} + 3e^{3x+3} \cdot (x^2 - 4) = e^{3x+3} \cdot (2x + 3x^2 - 12)$$

$u = e^{3x+3} \quad u' = 3 \cdot e^{3x+3}$

$v = 2x + 3x^2 - 12 \quad v' = 2 + 6x$

$$f''(x) = 3 \cdot e^{3x+3} \cdot (2x + 3x^2 - 12) + e^{3x+3} \cdot (2 + 6x) = e^{3x+3}(6x + 9x^2 - 36 + 2 + 6x)$$
$$= e^{3x+3}(9x^2 + 12x - 34)$$

e) $f(x) = \left(2x - e^x \cdot \frac{1}{2^x}\right)^2 \quad u = e^x \quad u' = e^x$

$v = \frac{1}{2^x} \quad v' = -\frac{ln(2)}{2^x}$

$$f'(x) = 2(2x - e^x \cdot \frac{1}{2^x}) \cdot \left(2 - \frac{e^x}{2^x} + \frac{e^x \cdot ln(2)}{2^x}\right)$$

$u = 2(2x - e^x \cdot \frac{1}{2^x}) \quad u' = 2\left(2 - \frac{e^x}{2^x} + \frac{e^x \cdot \ln(2)}{2^x}\right)$

$v = 2 - \frac{e^x}{2^x} + \frac{e^x \cdot ln(2)}{2^x} \quad v' = \frac{-e^x(\ln^2(2) - 2\ln(2) + 1)}{2^x}$

$$'(x) = 2\left(2 - \frac{e^x}{2^x} + \frac{e^x \cdot \ln(2)}{2^x}\right)^2 + 2(2x - e^x \cdot \frac{1}{2^x}) \cdot \frac{-e^x(\ln^2(2) - 2\ln(2) + 1)}{2^x}$$
$$= 2^{2-2x}(2^{2x+1} + (\ln^2(2) - 2\ln(2) + 1) \cdot e^{2x}$$
$$+((-ln^2(2) + 2\ln(2) - 1)x + 2\ln(2) - 2)2^x\, e^x)$$

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Aufgabe A1

Bestimme die 1. und 2. Ableitung der folgenden Funktionsgleichungen:

a) $f(x) = (5^x - 2^x)^3$

b) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x \cdot \left(3x + \frac{1}{x}\right)$

c) $f(x) = (2^{3x} - x) \cdot x^4$

d) $f(x) = 3^x \cdot x^3$

e) $f(x) = sin\left(\left(\frac{3}{2}\right)^x - 5\right)$

f) $f(x) = e^x \cdot x^e$

g) $f(x) = x^2 \cdot 2^{-x}$

h) $f(x) = x \cdot 2^{sin(2^x)}$

i) $f_a(x) = \frac{1}{a^{0,5x}} + ax$

j) $f_a(x) = \frac{a^{\sqrt{x}}}{x-1}$

k) $f(t) = t^2 \cdot a^t$

l) $f_a(t) = \frac{a^t}{t} \cdot \mathrm{a}^{-2\mathrm{t}}$

m) $f_k(t) = k^2 t \cdot \sqrt[3]{15k^t}$

Aufgabe A2

Zeige, dass die Ableitung der Funktion f mit $f(x) = x^{e^x}$ die Funktion f' mit $f'(x) = x^{e^x} \cdot e^x \cdot \left(\frac{1}{x} + ln(x)\right)$ ist.

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Lösung A1

a) $f(x) = (5^x - 2^x)^3$

$f'(x) = 3 \cdot (5^x - 2^x)^2 \cdot (ln(5) \cdot 5^x + ln(3) \cdot 3^x)$

$u = 3 \cdot (5^x - 2^x)^2 \qquad u' = 6 \cdot (5^x - 2^x) \cdot (ln(5) \cdot 5^x - ln(2) \cdot 2^x)$

$v = ln(5) \cdot 5^x - ln(2) \cdot 2^x \qquad v' = ln^2(5) \cdot 5^x - ln^2(2) \cdot 2^x$

$f''(x) = 6 \cdot (5^x - 2^x) \cdot (ln(5) \cdot 5^x - ln(2) \cdot 2^x) \cdot (ln(5) \cdot 5^x - ln(2) \cdot 2^x) +$
$3 \cdot (5^x - 2^x)^2 \cdot (ln^2(5) \cdot 5^x - ln^2(3) \cdot 3^x)$
$= 6 \cdot (5^x - 2^x) \cdot (ln(5) \cdot 5^x - ln(2) \cdot 2^x)^2 +$
$3 \cdot (5^x - 2^x)^2 \cdot (ln^2(5) \cdot 5^x - ln^2(2) \cdot 2^x)$

b) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x \cdot \left(3x + \frac{1}{x}\right) \qquad u = \frac{1}{2^x} \qquad u' = \frac{-ln(2)}{2^x}$

$v = 3x + \frac{1}{x} \qquad v' = 3 - \frac{1}{x^2}$

$f'(x) = \frac{-ln(2) \cdot \left(3x + \frac{1}{x}\right)}{2^x} + \frac{3 - \frac{1}{x^2}}{2^x} = \frac{-ln(2) \cdot \left(3x + \frac{1}{x}\right) + 3 - \frac{1}{x^2}}{2^x}$

$u = -ln(2) \cdot \left(3x + \frac{1}{x}\right) + 3 - \frac{1}{x^2}$

$u' = -ln(2) \cdot \left(3 - \frac{1}{x^2}\right) + \frac{2}{x^3}$

$v = 2^x \qquad v' = ln(2) \cdot 2^x$

$f''(x) = \frac{2^x \cdot \left(-ln(2) \cdot \left(3 - \frac{1}{x^2}\right) + \frac{2}{x^3}\right) - 2^x \cdot \ln(2) \cdot \left(-ln(2) \cdot \left(3x + \frac{1}{x}\right) + 3 - \frac{1}{x^2}\right)}{2^{2x}}$

$= \frac{-ln(2) \cdot \left(3 - \frac{1}{x^2}\right) + \frac{2}{x^3} - \left(\ln(2) \cdot \left(-ln(2) \cdot \left(3x + \frac{1}{x}\right) + 3 - \frac{1}{x^2}\right)\right)}{2^x}$

$= \frac{-\ln(2) \cdot 3 + \frac{\ln(2)}{x^2} + \frac{2}{x^3} + \ln^2(2)\left(3x + \frac{1}{x}\right) - \ln(2) \cdot 3 + \frac{\ln(2)}{x^2}}{2^x} = \frac{-6 \cdot \ln(2) + \frac{2 \cdot \ln(2)}{x^2} + \frac{2}{x^3} + 3x \cdot \ln^2(2) + \frac{\ln^2(2)}{x}}{2^x}$

$= \frac{-6x^3 \cdot \ln(2) + 2x \cdot \ln(2) + 2 + 3x^4 \cdot \ln^2(2) + x^2 \cdot \ln^2(2)}{x^3 \cdot 2^x}$

c) $f(x) = (2^{3x} - x) \cdot x^4 \qquad u = 2^{3x} - x \qquad u' = 3\ln(2) \cdot 2^{3x} - 1$

$v = x^4 \qquad v' = 4x^3$

$f'(x) = (3\ln(2) \cdot 2^{3x} - 1) \cdot x^4 + 4x^3(2^{3x} - x)$
$= x^3 \cdot \left((3\ln(2)\, x + 4) \cdot 2^{3x} - 5x\right)$

$f''(x) = x^3 \cdot (3\ln(2)\,(3\ln(2)\, x + 4) \cdot 2^{3x} + 3\ln(2) \cdot 2^{3x} - 5) +$
$3x^2((3\ln(2)\, x + 4)$

$f''(x) = x^2((9\ln^2(2)x^2 + 24\ln(2)\, x + 12) \cdot 2^{3x} - 20x)$

d) $f(x) = 3^x \cdot x^3 \qquad u = 3^x \qquad u' = \ln(3) \cdot 3^x$

$v = x^3 \qquad v' = 3x^2$

$f'(x) = \ln(3) \cdot 3^x \cdot x^3 + 3x^2 \cdot 3^x = x^2 \cdot 3^x \cdot (3 + \ln(3) \cdot x)$

$f''(x) = x \cdot 3^x(\ln^2(3) \cdot x^2 + 6\ln(3)\, x + 6)$

e) $f(x) = sin\left(\left(\frac{3}{2}\right)^x - 5\right)$

$f'(x) = cos\left(\left(\frac{3}{2}\right)^x - 5\right) \cdot (ln(3) - ln(2) \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^x$

$u = (ln(3) - ln(2)) \cdot cos\left(\left(\frac{3}{2}\right)^x - 5\right)$

$u' = -(ln(3) - ln(2))^2 \cdot sin\left(\left(\frac{3}{2}\right)^x - 5\right) \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^x$

$v = \left(\frac{3}{2}\right)^x \qquad v' = (\ln(3) - \ln(2)) \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^x$

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

$$f''(x) = -(ln(3) - l\,n(2))^2 \cdot sin\left(\left(\frac{3}{2}\right)^x - 5\right) \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{2x}$$
$$+(ln(3) - l\,n(2))^2 \cdot co\,s\left(\left(\frac{3}{2}\right)^x - 5\right) \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^x$$
$$f''(x) = (ln(3) - l\,n(2))^2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^x \cdot \left(co\,s\left(\left(\frac{3}{2}\right)^x - 5\right) - \left(\frac{3}{2}\right)^x \cdot sin\left(\left(\frac{3}{2}\right)^x - 5\right)\right)$$

f) $f(x) = e^x \cdot x^e$ $\quad u = e^x \quad u' = e^x$
$v = x^e \quad v' = e \cdot x^{e-1}$
$f'(x) = e^x \cdot x^e + e^{x+1} \cdot x^{e-1}$
$s = e^{x+1} \quad s' = e^{x+1}$
$t = x^{e-1} \quad v' = (e-1) \cdot x^{e-2}$
$f''(x) = f'(x) + e^{x+1} \cdot x^{e-1} + e^{x+1} \cdot (e-1) \cdot x^{e-2}$
$= e^x \cdot x^e + 2e^{x+1} \cdot x^{e-1} + e^{x+1} \cdot (e-1) \cdot x^{e-2}$

g) $f(x) = x^2 \cdot 2^{-x}$ $\quad u = x^2 \quad u' = 2x$
$v = \frac{1}{2^x} \quad v' = -\frac{ln(2)}{2^x}$
$f'(x) = \frac{2x - ln(2) \cdot x^2}{2^x}$ $\quad u = 2x - ln(2) \cdot x^2 \quad u' = 2 - 2ln(2) \cdot x$
$v = 2^x \quad v' = ln(2) \cdot 2^x$
$f''(x) = \frac{(2 - 2\,ln(2) \cdot x) \cdot 2^x - ln(2) \cdot 2^x \cdot (2x - ln(2) \cdot x^2)}{2^{2x}} = \frac{ln^2(2) \cdot x^2 - 4\,ln(2) \cdot x + 2}{2^x}$

h) $f(x) = x \cdot 2^{sin(2^x)}$ $\quad u = x \quad u' = 1$
$v = 2^{sin(2^x)} \quad v' = \ln^2(2) \cdot 2^{si\,n(2^x)+x} \cdot cos(2^x)$
$f'(x) = 2^{sin(2^x)} + x \cdot ln^2(2) \cdot 2^{si\,n(2^x)+x} \cdot cos(2^x)$
$= 2^{sin(2^x)} \cdot (1 + ln^2(2) \cdot x \cdot 2^x \cdot cos(2^x))$
$f''(x) = -\,ln^2(2) \cdot 2^{sin(2^x)+x} \cdot (ln(2)\,x \cdot 2^x\,sin(2^x) - ln^2(2)\,x \cdot 2^x\,cos^2(2^x)$
$+(-2ln(2)x - 2)\,cos(2^x))$

i) $f_a(x) = \frac{1}{a^{0,5x}} + ax$
$f_a{}'(x) = a - \frac{ln(a)}{2a^{0,5x}} \qquad f_a{}''(x) = \frac{ln^2(a)}{4a^{0,5x}}$

j) $f_a(x) = \frac{a^{\sqrt{x}}}{x-1}$
$f_a{}'(x) = \frac{ln(a) \cdot a^{\sqrt{x}}}{2(x-1)\sqrt{x}} - \frac{a^{\sqrt{x}}}{(x-1)^2}$
$f_a{}''(x) = -\frac{\ln(a) \cdot a^{\sqrt{x}}}{(x-1)^2\sqrt{x}} + \frac{\ln^2(a) \cdot a^{\sqrt{x}}}{4x(x-1)} - \frac{\ln(a) \cdot a^{\sqrt{x}}}{4x\sqrt{x}(x-1)} + \frac{2 \cdot a^{\sqrt{x}}}{(x-1)^3}$

k) $f(t) = t^2 \cdot a^t$ $\quad u = t^2 \quad u' = 2t$
$v = a^t \quad v' = ln(a) \cdot a^t$
$f'(t) = 2t \cdot a^t + ln(a) \cdot t^2 \cdot a^t \qquad f''(t) = a^t \cdot (ln^2(a) \cdot x^2 + 4\,ln(a) \cdot x + 2)$

l) $f_a(t) = \frac{a^t}{t} \cdot a^{-2t}$
$f_a{}'(t) = -\frac{ln(a)t + 1}{a^t t^2} \qquad f_a{}''(t) = \frac{ln^2(a)t^2 + 2\,ln(a)t + 2}{a^t t^3}$

m) $f_k(t) = k^2 t \cdot \sqrt[3]{15k^t}$
$f'(x) = \frac{\sqrt[3]{15k^t} \cdot (ln(k)t + 3)}{3} \qquad f''(x) = \frac{\sqrt[3]{15}k^{\frac{7+x}{3}} \cdot ln(k) \cdot (ln(k)t + 6)}{9}$

Lösung A2

$f(x) = x^{e^x} = e^{ln(x)\cdot e^x} = e^{u(x)}$ *mit*

$u(x) = ln(x) \cdot e^x$ $\quad v = ln(x)$ $\quad v' = \frac{1}{x}$

$w = e^x$ $\quad w' = e^x$

$u'(x) = \frac{e^x}{x} + ln(x) \cdot e^x$

$f(x) = e^{u(x)}$ $\quad f'(x) = u'(x) \cdot e^{u(x)}$

$f'(x) = \left(\frac{e^x}{x} + ln(x) \cdot e^x\right) \cdot e^{u(x)} = e^x \left(\frac{1}{x} + ln(x)\right) \cdot e^{u(x)}$

$f'(x) = x^{e^x} \cdot e^x \cdot \left(\frac{1}{x} + ln(x)\right)$ ***q.e.d.***

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de