WIKI Ableitungen der Exponentialfunktion

Definition des Begriffs Ableitung

Merksatz

Die Ableitung einer Funktion f an der Stelle x_0 ist gleich der Steigung der Tangente an die Kurve im Punkt $(x|f(x))$. Sie entsteht über den Grenzwert des Differenzenquotienten $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ für $\Delta x \longrightarrow 0$.

Einleitung

Nachdem wir nun (fast) alle Ableitungsregeln kennengelernt haben, verbleibt noch die Regel für die Ableitung der Exponentialfunktion.
Wir kennen ja bereits die Form einer Exponentialfunktion f mit $f(x) = a \cdot b^x$. Selbstverständlich hat eine solche Funktion eine Änderungsrate und somit auch eine Ableitung. In diesem Kapitel lernen wir die Ableitungsregel für Exponentialfunktionen kennen.

Die Ableitung der Exponentialfunktion

Wir betrachten uns hierzu als erstes die natürliche Exponentialfunktion f mit $f(x) = e^x$. (e ist die Eulersche Zahl und ist $e = 2{,}78128\ldots$, eine irrationale Zahl).

Wie bei anderen Funktionen auch, stellen wir den Differenzenquotienten auf mit

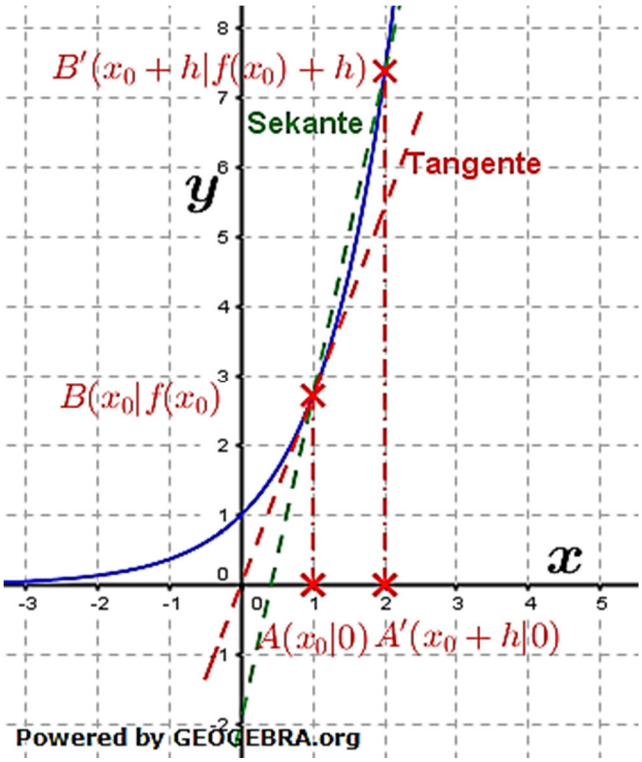
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{x_0 + h - x_0} = \frac{e^{x_0+h} - e^{x_0}}{h}$$

Dieser Differenzenquotient stellt die Steigung der Sekante durch die Punkte B und B' dar. Wie bei allen anderen Nachweisen auch, lassen wir nun den Wert von h gegen 0 laufen, sodass letztendlich der Punkt B' mit dem Punkt B zusammenfällt und aus der Sekante damit eine Tangente an den Graphen von f entstanden ist. Wir bilden also den Differenzialquotienten

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{e^{x_0+h} - e^{x_0}}{h}.$$

Um dies bewerkstelligen zu können, müssen wir zunächst gemäß den Potenzregeln einige Umformungen vornehmen. Gemäß der 1. Potenzregel formen wir um:

$$\frac{e^{x_0+h} - e^{x_0}}{h} = \frac{e^{x_0} \cdot e^h - e^{x_0}}{h}$$
$$= \frac{e^{x_0} \cdot (e^h - 1)}{h}$$
$$= e^{x_0} \cdot \frac{e^h - 1}{h}$$



Jetzt müssen wir noch für den Ausdruck $\frac{e^h-1}{h}$ den Grenzwert für $h \longrightarrow 0$ untersuchen. Ohne an dieser Stelle auf den näheren Beweis eingehen zu wollen – dieser erfolgt im Kapitel „Funktionslehre ⟶ Exponentialfunktionen ⟶ Die e-Funktion", gilt:

$$e^h = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^n}{n!} = 1 + h + \frac{h^2}{2!} + \frac{h^3}{3!} + \frac{h^4}{4!} + \frac{h^5}{5!} + \frac{h^6}{6!} + \cdots.$$

Durch Umformung erhalten wir:

$$e^h - 1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^n}{n!} = h + \frac{h^2}{2!} + \frac{h^3}{3!} + \frac{h^4}{4!} + \frac{h^5}{5!} + \frac{h^6}{6!} + \cdots$$

$$\frac{e^h - 1}{h} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^n}{n!} = 1 + \frac{h}{2!} + \frac{h^2}{3!} + \frac{h^3}{4!} + \frac{h^5}{5!} + \frac{h^5}{6!} + \cdots$$

und damit $$\lim_{h \longrightarrow 0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^n}{n!} = 1 + \frac{h}{2!} + \frac{h^2}{3!} + \frac{h^3}{4!} + \frac{h^4}{5!} + \frac{h^5}{6!} + \cdots = 1.$$

Mit anderen Worten:
Die Steigung der Tangente an die Exponentialfunktion e^x an der Stelle x_0 ist immer gleich deren Funktionswert an der Stelle x_0.

Merksatz Ableitung Exponentialfunktion

Die Ableitung der Exponentialfunktion mit $f(x) = e^x$ lautet $f'(x) = e^x$.

Höhere Ableitungen der Exponentialfunktion

Jetzt kommt $f(x) = e^x$ aber nicht alleine vor, sondern wird die Exponentialfunktion in fast allen Fällen mit anderen Funktionsarten verkettet. In diesem Falle gelten alle Ableitungsregeln, die wir nun kennen. Am besten schaust du dir die nachfolgenden Beispiele an.

Beispiel 1

$$f(x) = a \cdot e^x \implies f'(x) = a \cdot e^x$$

Es gilt die Faktorregel, Faktoren bleiben bei der Ableitung erhalten.

Beispiel 2

$$f(x) = e^{b \cdot x} \implies f'(x) = b \cdot e^{b \cdot x}$$

Es gilt die Kettenregel, die äußere Funktion ist die Exponentialfunktion mit $u(x) = e^x$, die innere Funktion ist der Exponent von e mit $v(x) = b \cdot x$ und somit ist $f(x) = u\big(v(x)\big) = e^{b \cdot x}$ und $f'(x) = u'(x) \cdot v'(x) = b \cdot e^{b \cdot x}$.

Beispiel 3

$$f(x) = a \cdot e^{x^2+5} \implies f'(x) = a \cdot 2x \cdot e^{x^2+5}$$

Auch hier gilt die Kettenregel wie in Beispiel 2.

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Beispiel 4

$$f(x) = \frac{1}{x} + 5e^{sin(x)} \implies f'(x) = -\frac{1}{x^2} + 5cos(x) \cdot e^{sin(x)}$$

Hier gilt zunächst die Summenregel, nach der alle Glieder einer Funktionsgleichung einzeln abgeleitet werden und für die e-Funktion die Kettenregel wie in Beispiel 2.

Wie du in den Beispielen erkennst, ändert sich der Exponent der e-Funktion nie, dieser bleibt immer erhalten, so wie er ursprünglich vorgegeben ist. Dies führt uns zu einem sehr wichtigen

Merksatz

Bei der Ableitung der Exponentialfunktion mit $f(x) = a \cdot e^{b \cdot x + c}$ verändert sich durch die Ableitung der Exponent der e-Funktion zu keinem Zeitpunkt. Auf den Exponenten der e-Funktion ist bei jeder Ableitung ***stets*** *die* ***Kettenregel*** *anzuwenden.*

Die Ableitung der allgemeinen Exponentialfunktion

Die allgemeine Exponentialfunktion lautet

$$f(x) = a^x.$$

Wie sieht nun aber die Ableitung einer Exponentialfunktion mit einer anderen Basis als e aus? Nachdem wir ja die Ableitung der e-Funktion nachgewiesen haben, machen wir uns für den Ableitungsnachweis der allgemeinen Exponentialfunktion die Potenzgesetze und die Logarithmengesetze zu eigen.

Die Potenz a^x lässt sich auch schreiben mit $\left(10^{log(a)}\right)^x = 10^{log(a)x}$. Alternativ zum 10-er Logarithmus können wir auch den natürlichen Logarithmus ln verwenden. Dadurch erhalten wir für

$$f(x) = a^x = e^{ln(a)x}.$$

Und da wir ja die Ableitung der e-Funktion bereits kennen, ist

$$f'(x) = ln(a) \cdot e^{ln(a)x}.$$

Wir schreiben $e^{ln(a)x}$ wieder um zu a^x und erhalten endgültig

$$f'(x) = ln(a) \cdot a^x.$$

Merksatz Ableitung Exponentialfunktion allgemein

Die Ableitung einer Exponentialfunktion mit $f(x) = a^x$ lautet

$$f'(x) = ln(a) \cdot a^x.$$

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de