Aufgabe A1

Gegeben sind die Funktionen f mit $f(x) = (x-1)^2$, g mit $g(x) = x^2 - 3$ und h mit $h(x) = e^x$. Bilde die Verkettungen und berechne jeweils deren 1. und 2. Ableitung.

a) $f(g(x))$ b) $g(f(x))$ c) $f(h(x))$ d) $h(f(x))$
d) $g(h(x))$ e) $h(g(x))$

a) ist als Beispielaufgabe wie folgt vorgegeben:

$f(g(x)) = (x^2-4)^2$

$f'(g(x)) = 2x(x^2-4)$ $f''(g(x)) = 6x^2 - 8$

Tipp: In manchen Fällen benötigst du für die 2. Ableitung zusätzlich die Produktregel.

Aufgabe A2

Gegeben sind die Funktionen f mit $f(x) = \sqrt{x-1}$, g mit $g(x) = (x^2-3)^2$ und h mit $h(x) = \sqrt[3]{x}$. Bilde die Verkettungen und berechne jeweils deren 1. und 2. Ableitung.

a) $f(g(x))$ b) $g(f(x))$ c) $f(h(x))$ d) $h(f(x))$
d) $g(h(x))$ e) $h(g(x))$

Aufgabe A3

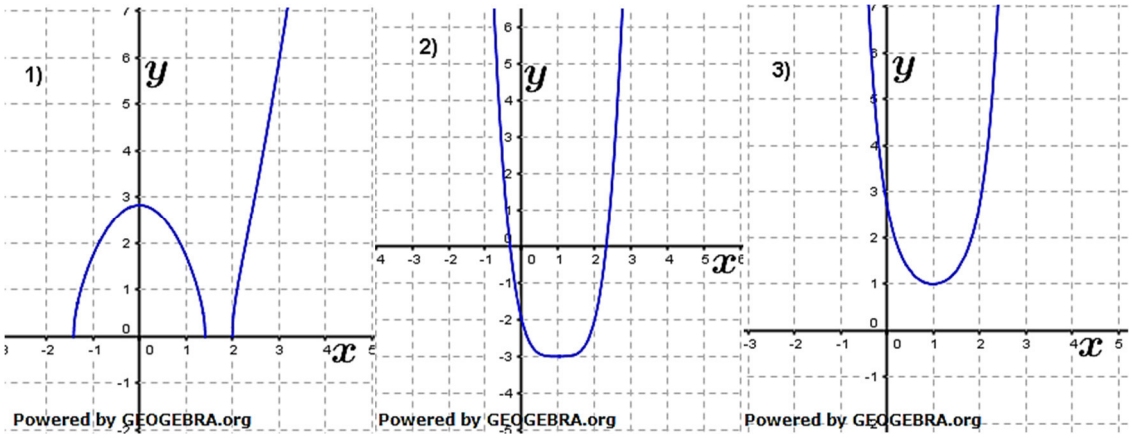
Gegeben sind die Funktionen f mit $f(x) = \sin(\pi(x+2)^2)$, g mit $g(x) = 2(x-1)$ und h mit $h(x) = \frac{1}{x}$. Bilde die Verkettungen und berechne jeweils deren 1. und 2. Ableitung.

a) $f(g(x))$ b) $g(f(x))$ c) $f(h(x))$ d) $h(f(x))$
d) $g(h(x))$ e) $h(g(x))$

Aufgabe A4

Gegeben sind die verketteten Funktionen f, g und h. Ordne den verschiedenen Graphen jeweils ihre Funktionsgleichung zu und begründe deine Entscheidung.

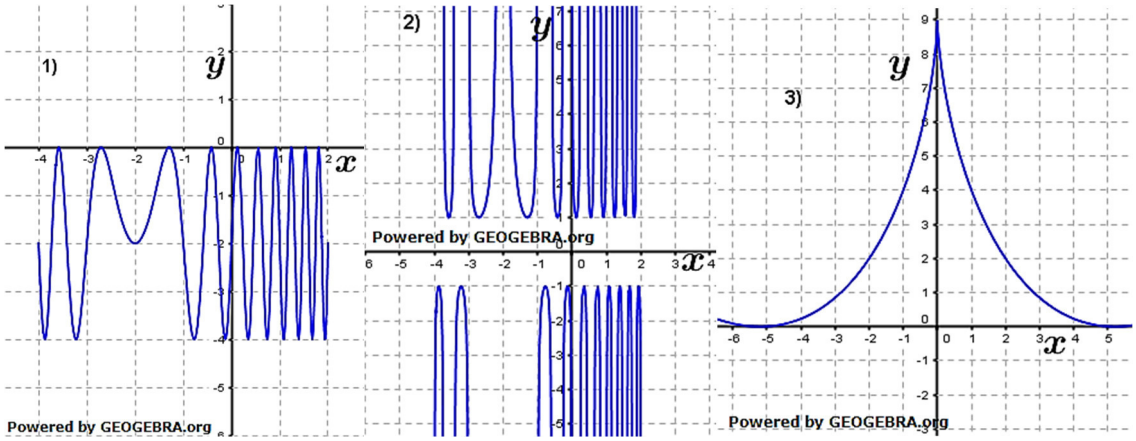
a) $f(x) = (x-1)^4 - 3$ b) $g(x) = e^{(x-1)^2}$ c) $h(x) = \sqrt{x^4 - 6x^2 + 8}$



Aufgabe A5

Gegeben sind die verketteten Funktionen f, g und h. Ordne den verschiedenen Graphen jeweils ihre Funktionsgleichung zu und begründe deine Entscheidung.

a) $f(x) = \left(\sqrt[3]{x^2} - 3\right)^2$ b) $g(x) = 2sin(\pi(x+2)^2) - 2$ c) $h(x) = \frac{1}{sin(\pi(x+2)^2)}$



Lösung A1

$f(x) = (x-1)^2$, $g(x) = x^2 - 3$ $h(x) = e^x$.

b) $g(f(x)) = (x-1)^4 - 3$

$g'(f(x)) = 4(x-1)^3$ $\qquad g''(f(x)) = 12(x-1)^2$

c) $f(h(x)) = (e^x - 1)^2$

$f'(h(x)) = 2e^x(e^x - 1)$ $\qquad f''(h(x)) = 2e^x(2e^x - 1)$

d) $h(f(x)) = e^{(x-1)^2} = e^{x^2-2x+1}$

$h'(f(x)) = (2x-2)e^{x^2-2x+1}$ $\qquad h''(f(x)) = (2x-2)^2 e^{x^2-2x+1}$

e) $g(h(x)) = e^{x^2} - 3 = e^{2x} - 3$

$g'(h(x)) = 2e^{2x}$ $\qquad g''(h(x)) = 4e^{2x}$

f) $h(g(x)) = e^{x^2-3} = \frac{e^{2x}}{e^3}$

$h'(g(x)) = \frac{2e^{2x}}{e^3}$ $\qquad h''(g(x)) = \frac{4e^{2x}}{e^3}$

Lösung A2

$f(x) = \sqrt{x-1}$, $g(x) = (x^2-3)^2$, $h(x) = \sqrt[3]{x}$.

a) $f(g(x)) = \sqrt{x^4 - 6x^2 + 8}$

$f'(g(x)) = \frac{2x^3-6x}{\sqrt{x^4-6x^2+8}}$ $\qquad f''(g(x)) = \frac{2(x^6-9x^4+24x^2-24}{(x^4-6x^2+8)\cdot\sqrt{x^4-6x^2+8}}$

b) $g(f(x)) = (x-4)^2$

$f'(g(x)) = 2(x-4)$ $\qquad f''(g(x)) = 2$

c) $f(h(x)) = \sqrt{\sqrt[3]{x} - 1}$

$f'(h(x)) = \frac{1}{6\cdot\sqrt[3]{x^2}\cdot\sqrt{\sqrt[3]{x}-1}}$ $\qquad f''(g(x)) = -\frac{5\sqrt[3]{x}+4}{36x\cdot\sqrt[3]{x^2}\cdot(\sqrt[3]{x}-1)\cdot\sqrt{\sqrt[3]{x}-1}}$

d) $h(f(x)) = \sqrt[6]{x-1}$

$h'(f(x)) = \frac{1}{6\cdot\sqrt[6]{(x-1)^5}}$ $\qquad h''(f(x)) = -\frac{5}{36\cdot(x-1)\cdot\sqrt[6]{(x-1)^5}}$

e) $g(h(x)) = \left(\sqrt[3]{x^2} - 3\right)^2$

$g'(f(x)) = \frac{4\cdot\left(\sqrt[3]{x^2}-3\right)}{3\cdot\sqrt[3]{x}}$ $\qquad g''(f(x)) = \frac{4\cdot(\sqrt[3]{x^2}+3)}{9x\cdot\sqrt[3]{x}}$

f) $h(g(x)) = \sqrt[3]{(x^2-3)^2}$

$h'(f(x)) = \frac{4\cdot x}{3\cdot\sqrt[3]{x^2-3}}$ $\qquad h''(f(x)) = \frac{4\cdot(x^2-9)}{9(x^2-3)\cdot\sqrt[3]{x^2-3}}$

Lösung A3

$f(x) = sin(\pi(x+2)^2)$, $g(x) = 2(x-1)$, $h(x) = \frac{1}{x}$.

a) $f(g(x)) = sin(\pi(2(x-1)+2)^2) = sin(\pi(2x)^2) = sin(4\pi x^2)$

$f'(g(x)) = 8\pi x \cdot \cos(4\pi x^2)$ $\qquad f''(g(x)) = -64\pi^2 x^2 sin(4\pi x^2)$

b) $g(f(x)) = 2(sin(\pi(x+2)^2) - 1) = 2sin(\pi(x+2)^2) - 2 = 2sin(\pi x^2 + 4\pi x + 4\pi - 2)$

$g'(f(x)) = 2(2\pi x + 4\pi) \cdot cos(\pi x^2 + 4\pi x + 4\pi - 2)$

$= 4\pi(x+2) \cdot cos(\pi x^2 + 4\pi x + 4\pi - 2)$

$f''(g(x)) = -4\pi(x+2) \cdot (2\pi x + 4\pi) \cdot sin(\pi x^2 + 4\pi x + 4\pi - 2)$

$= -8\pi^2(x+2)^2 \cdot sin(\pi x^2 + 4\pi x + 4\pi - 2)$

Level 3 – Expert – Blatt 1

c) $f(h(x)) = sin\left(\pi\left(\frac{1}{x}+2\right)^2\right) = sin\left(\pi\left(\frac{1}{x^2}+\frac{4}{x}+4\right)\right)$

$f'(h(x)) = -2\pi(\frac{1}{x^3}+\frac{2}{x^2}) \cdot cos\left(\pi\left(\frac{1}{x^2}+\frac{4}{x}+4\right)\right)$

$f''(h(x)) = 2\pi(\frac{1}{x^3}+\frac{2}{x^2}) \cdot 2\pi(\frac{1}{x^3}+\frac{2}{x^2}) \cdot sin\left(\pi\left(\frac{1}{x^2}+\frac{4}{x}+4\right)\right)$

$= 4\pi^2(\frac{1}{x^3}+\frac{2}{x^2})^2 \cdot sin\left(\pi\left(\frac{1}{x^2}+\frac{4}{x}+4\right)\right)$

d) $h(f(x)) = \frac{1}{sin(\pi(x+2)^2)} = (sin(\pi(x+2)^2))^{-1} = (sin(\pi x^2 + 4\pi x + 4\pi))^{-1}$

$h'(f(x)) = -\frac{2\pi(x+2)}{(cos(\pi x^2+4\pi x+4\pi))^2} = -2\pi(x+2) \cdot (cos(\pi x^2 + 4\pi x + 4\pi))^{-2}$

$h''(f(x)) = \frac{2 \cdot 2\pi(x+2) \cdot 2\pi(x+2)}{(cos(\pi x^2+4\pi x+4\pi))^3} = \frac{8\pi^2(x+2)^2}{(cos(\pi x^2+4\pi x+4\pi))^3}$

Lösung A4

a) $f(x) = (x-1)^4 - 3$ gehört zur Grafik 2).
Es handelt sich um eine ganzrationale Funktion 4. Grades, die in x-Richtung um eine Einheit nach rechts geschoben wurde und die y-Achse bei $y_0 = -2$ schneidet.

b) $g(x) = e^{(x-1)^2}$ gehört zur Grafik 3).
Es handelt sich um eine Exponentialfunktion mit $g(0) = e^2$ und $g(1) = 1$.

c) $h(x) = \sqrt{x^4 - 6x^2 + 8}$ gehört zur Grafik 1).
Es handelt sich um eine Wurzelfunktion mit verschiedenen Definitionslücken, berechenbar über $x^4 - 6x^2 + 8 < 0$.

Lösung A5

a) $f(x) = \left(\sqrt[3]{x^2} - 3\right)^2$ gehört zur Grafik 3).
Die beiden anderen Funktionen sind periodische Funktionen, der Schnittpunkt mit der y-Achse bei $f(0) = 9$.

b) $g(x) = 2sin(\pi(x+2)^2) - 2$ gehört zur Grafik 1).
Es handelt sich um eine periodische Funktion mit einer Amplitude von $a = 2$, die um 2 Einheiten nach unten verschoben ist und deshalb die x-Achse in ihren Hochpunkten von unten berührt.

c) $h(x) = \frac{1}{sin(\pi(x+2)^2)}$ gehört zur Grafik 2).
Es handelt sich um eine periodische gebrochene Funktion, die für jedes $\pi(x+2)^2 = n \cdot \pi;\ n\ \mathbb{Z}$ Definitionslücken aufweist.

e) $g(h(x)) = 2\left(\frac{1}{x} - 1\right)$

$g'(h(x)) = -\frac{2}{x^2}$ $\qquad$ $g''(h(x)) = \frac{4}{x^3}$

f) $h(g(x)) = \frac{1}{2(x-1)}$

$h'(g(x)) = -\frac{1}{2(x-1)^2}$ $\qquad$ $h''(g(x)) = \frac{1}{(x-1)^3}$