

Aufgabenblatt Ableitungen

zur Produkt- und Quotientenregel

Level 2 – Fortgeschritten – Blatt 2

Dokument mit 19 Aufgaben

Aufgabe A1

Leite mit Hilfe der Produkt- und der Kettenregel ab.

- | | |
|-------------------------------------|---------------------------------------|
| a) $f(x) = x \cdot \sin(3x)$ | b) $f(x) = (3x + 4)^2 \cdot \sin(x)$ |
| c) $f(x) = x^{-1} \cdot (2x + 3)$ | d) $f(x) = (5 - 4x)^3 \cdot (1 - 4x)$ |
| e) $f(x) = (5 - 4x)^3 \cdot x^{-2}$ | f) $f(x) = 3x \cdot \cos(2x)$ |
| g) $f(x) = 3x \cdot (\sin(x))^2$ | h) $f(x) = 0,5x^2 \cdot \sqrt{4 - x}$ |

**Aufgabe AA2**

- a) Wo steckt der Fehler?

$$f(x) = (2x - 8) \cdot \sin(x); \quad f'(x) = 2\cos(x)$$

- b) Ergänze:
- $g(x) = (2x - 3) \cdot (8 - x)^2; \quad g'(x) = \square \cdot (8 - x)^2 + (2x - 3) \cdot \square$

Aufgabe A3Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = (x - 1) \cdot \sqrt{x}$.

- a) Bestimme die Schnittpunkte des Graphen von f mit der x -Achse.
 b) Welche Steigung hat die Tangente an den Graphen im Punkt $P(1|f(1))$?
 c) In welchen Punkten hat der Graph von f waagrechte Tangenten?
 d) Skizziere den Graphen von f und überprüfe ihn mit dem GTR.

Aufgabe A4

- a) Bilde die erste Ableitung von

$$f(x) = (2x - 3) \cdot \cos(x); \quad g(x) = x \cdot (1 - x)^2; \quad h(x) = (2x - 3)^3 \cdot 3x;$$

$$i(x) = \frac{1}{x} \cdot \sin(x).$$

- b) In welchen Punkten hat der Graph von g waagrechte Tangenten?
 c) Bestimme die Schnittpunkte des Graphen von h mit der x -Achse.
 d) Welche Steigungen haben die Tangenten an den Graphen von h in den Schnittpunkten mit der x -Achse?

Aufgabe A5Bestimme $f'(x)$ und $f''(x)$ für $f(x) = x^2 \cdot g(x)$; $f(x) = x \cdot g'(x)$ bzw. $f(x) = g(x) \cdot g'(x)$.

Aufgabenblatt Ableitungen

Differenzialrechnung

zur Produkt- und Quotientenregel

Lösungen

Level 2 – Fortgeschritten – Blatt 2

Lösung A1

a) $f(x) = x \cdot \sin(3x)$

$$u = x \quad u' = 1$$

$$v = \sin(3x) \quad v' = 3\cos(3x)$$

$$f'(x) = \sin(3x) + 3x\cos(3x)$$

b) $f(x) = (3x + 4)^2 \cdot \sin(x)$

$$u = (3x + 4)^2 \quad u' = 6(3x + 4)$$

$$v = \sin(x) \quad v' = \cos(x)$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 6(3x + 4) \cdot \sin(x) + (3x + 4)^2 \cdot \cos(x) \\ &= (3x + 4) \cdot (6 \cdot \sin(x) + 3x \cdot \cos(x) + 4 \cos(x)) \end{aligned}$$

c) $f(x) = x^{-1} \cdot (2x + 3)$

$$u = x^{-1} \quad u' = -x^{-2}$$

$$v = (2x + 3) \quad v' = 2$$

$$f'(x) = -x^{-2} \cdot (2x + 3) + 2 \cdot x^{-1} = -2x^{-1} - 3x^{-2} + 2x^{-1} = -3x^{-2}$$

d) $f(x) = (5 - 4x)^3 \cdot (1 - 4x)$

$$u = (5 - 4x)^3 \quad u' = -12(5 - 4x)^2$$

$$v = 1 - 4x \quad v' = -4$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= -12 \cdot (4x - 5)^2 \cdot (1 - 4x) - 4 \cdot (5 - 4x)^3 \\ &= -4 \cdot (4x - 5)^2 \cdot (3(1 - 4x) + (5 - 4x)) = -4 \cdot (4x - 5)^2 \cdot (8 - 16x) \end{aligned}$$

e) $f(x) = (5 - 4x)^3 \cdot x^{-2}$

$$u = (5 - 4x)^3 \quad u' = -12(5 - 4x)^2$$

$$v = x^{-2} \quad v' = -2x^{-3}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= -12 \cdot (5 - 4x)^2 \cdot x^{-2} - 2x^{-3} \cdot (5 - 4x)^3 \\ &= -12x \cdot (5 - 4x)^2 \cdot x^{-3} - 2x^{-3} \cdot (5 - 4x)^3 \\ &= x^{-3} \cdot (5 - 4x)^2 \cdot (-12x - 2 \cdot (5 - 4x)) \\ &= x^{-3} \cdot (5 - 4x)^2 \cdot (-4x - 10) \\ &= x^{-3} \cdot (25 - 40x + 16x^2) \cdot (-4x - 10) \\ &= x^{-3} \cdot (-64x^3 + 300x - 250) \end{aligned}$$

f) $f(x) = 3x \cdot \cos(2x)$

$$u = 3x \quad u' = 3$$

$$v = \cos(2x) \quad v' = -2\sin(2x)$$

$$f'(x) = 3 \cdot \cos(2x) - 6x \cdot \sin(2x) = 3(\cos(2x) - 2x \cdot \sin(2x))$$

g) $f(x) = 3x \cdot (\sin(x))^2$

$$u = 3x \quad u' = 3$$

$$v = (\sin(x))^2 \quad v' = 2 \cdot \sin(x) \cdot \cos(x)$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3 \cdot (\sin(x))^2 + 6x \cdot \sin(x) \cdot \cos(x) \\ &= 3 \cdot \sin(x) \cdot (\sin(x) + 2x \cdot \cos(x)) \end{aligned}$$

h) $f(x) = 0,5x^2 \cdot \sqrt{4 - x}$

$$u = 0,5x^2 \quad u' = x$$

$$v = \sqrt{4 - x} \quad v' = -\frac{1}{2\sqrt{4-x}}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= x \cdot \sqrt{4 - x} - 0,5x^2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{4-x}} \\ &= \frac{2x \cdot (4-x) - 0,5x^2}{2\sqrt{4-x}} = \frac{8x - 2,5x^2}{2\sqrt{4-x}} \end{aligned}$$

Lösung A2

- a) Es wurde nur $u' \cdot v$ gebildet und die Multiplikation $v' \cdot u$ wurde vergessen.
 b) $g'(x) = 2 \cdot (8 - x)^2 + (2x - 3) \cdot (2x - 16)$

Aufgabenblatt Ableitungen

zur Produkt- und Quotientenregel

Lösungen

Level 2 – Fortgeschritten – Blatt 2

Lösung A3

$$f(x) = (x - 1) \cdot \sqrt{x}$$

- a) Schnittpunkte des Graphen mit der x -Achse mithilfe von $f(x) = 0$:

$$(x - 1) \cdot \sqrt{x} = 0 \quad | \quad \text{Satz vom Nullprodukt}$$

$$x_1 = 0; x_2 = 1$$

- b) Steigung der Tangente in $P(1|f(1))$:

$$f(x) = (x - 1) \cdot \sqrt{x}$$

$$u = x - 1$$

$$u' = 1$$

$$v = \sqrt{x}$$

$$v' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$f'(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}(x - 1)$$

$$f'(1) = 1 + 0 = 1$$

Die Tangente in $P(1|f(1))$ hat die Steigung $m = 1$.

- c) Waagrechte Tangenten mit $f'(x) = 0$:

$$\sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}(x - 1) = 0$$

$$| \cdot 2\sqrt{x}$$

$$2x + x - 1 = 0$$

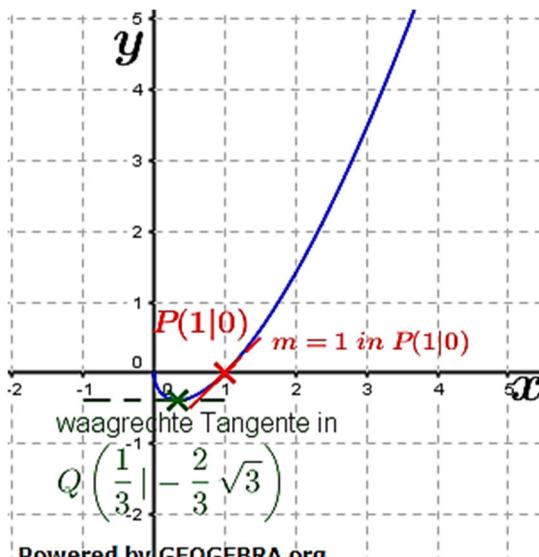
$$3x = 1$$

$$x = \frac{1}{3}$$

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = -\frac{2}{3\sqrt{3}} = -\frac{2}{9}\sqrt{3}$$

Der Graph von f hat eine waagrechte Tangente in $Q\left(\frac{1}{3} \mid -\frac{2}{9}\sqrt{3}\right)$

d)



Lösung A4

$$a) f(x) = (2x - 3) \cdot \cos(x)$$

$$f'(x) = 2\cos(x) - (2x - 3)\sin(x)$$

$$g(x) = x \cdot (1 - x)^2$$

$$g'(x) = (x - 1) \cdot (3x - 1)$$

$$h(x) = (2x - 3)^3 \cdot 3x$$

$$h'(x) = 3 \cdot (2x - 3)^2 \cdot (8x - 3)$$

$$i(x) = \frac{1}{x} \cdot \sin(x)$$

$$i'(x) = \frac{\cos(x)}{x} - \frac{\sin(x)}{x^2}$$

$$b) g'(x) = 0$$

$$(x - 1) \cdot (3x - 1) = 0$$

$$| \quad \text{Satz vom Nullprodukt}$$

$$x_1 = 1; x_2 = \frac{1}{3}$$

$$g(1) = 0; g\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{4}{27}$$

Der Graph von g hat in $P(1|0)$ und $Q\left(\frac{1}{3} \mid \frac{4}{27}\right)$ waagrechte Tangenten.

Differenzialrechnung

Aufgabenblatt Ableitungen

zur Produkt- und Quotientenregel

Lösungen

Level 2 – Fortgeschritten – Blatt 2

- c) $h(x) = 0$
 $(2x - 3)^3 \cdot 3x = 0$ | Satz vom Nullprodukt
 $x_1 = 0; x_2 = 1,5$
Der Graph von h schneidet die x-Achse in $x_1 = 0$ und $x_2 = 1,5$.
- d) $h'(0)$ bzw. $h'(1,5)$
 $h'(0) = -81; h'(1,5) = 0$

Lösung A5

$$f(x) = x^2 \cdot g(x)$$

$$f'(x) = 2x \cdot g(x) + x^2 \cdot g'(x)$$

$$f''(x) = 2 \cdot g(x) + 2x \cdot g'(x) + 2x \cdot g'(x) + x^2 \cdot g''(x)$$

$$= 2 \cdot g(x) + 4x \cdot g'(x) + x^2 \cdot g''(x)$$

$$f(x) = x \cdot g'(x)$$

$$f'(x) = g'(x) + x \cdot g''(x)$$

$$f''(x) = g''(x) + g''(x) + x \cdot g'''(x)$$

$$= 2 \cdot g''(x) + x \cdot g'''(x)$$

$$f(x) = g(x) \cdot g'(x)$$

$$f'(x) = g'(x) \cdot g'(x) + g(x) \cdot g''(x)$$

$$= (g'(x))^2 + g(x) \cdot g''(x)$$

$$f''(x) = 2 \cdot (g'(x)) \cdot g''(x) + g'(x) \cdot g''(x) + g(x) \cdot g'''(x)$$

$$= 3 \cdot g'(x) \cdot g''(x) + g(x) \cdot g'''(x)$$