Aufgabenblatt Ableitungen zur Summen- bzw. Differenzregel

Level 3 – Expert – Blatt 1

Dokument mit 16 Aufgaben

Aufgabe A1

Bestimme die 1. und 2. Ableitung der gegebenen Funktionen.

a) $s(t) = -\frac{6}{5}t^3 + \frac{3}{2}t + \frac{2}{5}$ b) $f(x) = x^2(x - \frac{2}{3}x^3)$ c) $f_t(x) = x^{3-t} + tx^2;\ t \in \mathbb{R}$

d) $f_a(x) = \frac{a}{4}x^2 + \frac{1}{a}x^3$ e) $f(x) = \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}}$ f) $f(x) = -\frac{1}{(x+1)^2}$

g) $f(x) = \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[4]{x^3}$ h) $f(x) = \frac{1}{x^{-0,5}}$ i) $f_a(z) = \frac{a^2}{\sqrt{2z}}$

Aufgabe A2

Berechne die Steigung des Graphen K_f der Funktion f an der Stelle $x_0 = 1$ und im Schnittpunkt von K_f mit der y–Achse.

a) $f(x) = -\frac{1}{\sqrt{x+3}} + x + 3$ b) $f(x) = \frac{1}{4}(x-2) - \frac{1}{(x-2)^3}$

c) $f(x) = 3(x-5)^2 + 4$ d) $f(x) = \frac{1}{(x+5)} - \frac{1}{(x+5)^2} + 1{,}84$

Aufgabe A3

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = -\frac{16}{x^2} + x;\ x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Bestimme die Punkte des Graphen K von f, in denen die Tangenten an K parallel zur Geraden $y = 2x$ sind.

Aufgabe A4

Gibt es für die Funktionen f mit $f(x) = x^2 + 3$; g mit $g(x) = x^3$ und h mit $h(x) = 2x + 6$ jeweils eine Stelle mit gleicher Ableitung?

Aufgabe A5

Ein Körper fällt ohne Luftreibung so, dass er in der Zeit t (in s) den Weg $s(t) = 5t^2$ ($s(t)$ in m) zurücklegt. Nach welcher Zeit hat der Körper die Geschwindigkeit $10\,m/s$?

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

Lösung A1

a) $s(t) = -\frac{6}{5}t^3 + \frac{3}{2}t + \frac{2}{5}$ $\quad s'(t) = -\frac{18}{5}t^2 + \frac{3}{2}$ $\quad s''(t) = -\frac{36}{5}t$

b) $f(x) = x^2\left(x - \frac{2}{3}x^3\right) = x^3 - \frac{2}{3}x^5$

$f'(x) = 3x^2 - \frac{10}{3}x^4$ $\quad f''(x) = 6x - \frac{40}{3}x^3$

c) $f_t(x) = x^{3-t} + tx^2$ $\quad f_t'(x) = (3-t)x^{2-t} + 2tx$ $\quad f_t''(x) = (6 - 5t + t^2)x^{1-t} + 2t$

d) $f_a(x) = \frac{a}{4}x^2 + \frac{1}{a}x^3$ $\quad f_a'(x) = \frac{a}{2}x + \frac{3}{a}x^2$ $\quad f_a''(x) = \frac{a}{2} + \frac{6}{a}x$

e) $f(x) = \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}}$ $\quad f'(x) = -\frac{1}{3x^{\frac{4}{3}}}$ $\quad f''(x) = \frac{4}{9x^{\frac{7}{3}}}$

f) $f(x) = -\frac{1}{(x+1)^2}$ $\quad f'(x) = \frac{2}{(x+1)^3}$ $\quad f''(x) = -\frac{6}{(x+1)^4}$

g) $f(x) = \sqrt[3]{x^2} + \sqrt[4]{x^3} = x^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{3}{4}}$

$f'(x) = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} + \frac{3}{4}x^{-\frac{1}{4}}$ $\quad f''(x) = -\frac{2}{9}x^{-\frac{4}{3}} - \frac{3}{16}x^{-\frac{5}{4}}$

$= \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} + \frac{3}{4\sqrt[4]{x}}$ $\quad = -\frac{2}{9x\sqrt[3]{x}} - \frac{3}{16x\sqrt[4]{x}}$

h) $f(x) = \frac{1}{x^{-0,5}} = x^{0,5}$ $\quad f'(x) = 0{,}5x^{-0,5}$ $\quad f''(x) = -0{,}25x^{-1,5}$

$= \frac{0{,}5}{x^{0,5}}$ $\quad = -\frac{0{,}25}{x^{1,5}} = -\frac{5}{2x^{1,5}}$

i) $f_a(z) = \frac{a^2}{\sqrt{2z}} = \frac{a^2}{\sqrt{2}}z^{-\frac{1}{2}}$ $\quad f_a'(z) = -\frac{a^2}{2\sqrt{2}}z^{-\frac{3}{2}}$ $\quad f_a''(z) = \frac{3a^2}{4\sqrt{2}}z^{-\frac{5}{2}}$

$= -\frac{a^2}{2z\sqrt{2z}}$ $\quad = \frac{3a^2}{4z^2\sqrt{2z}}$

Lösung A2

a) $f(x) = -\frac{1}{\sqrt{x+3}} + x + 3$ $\quad f'(x) = \frac{1}{2\cdot(x+3)\sqrt{x+3}} + 1$

$f'(1) = \frac{2}{2\cdot 4\cdot\sqrt{4}} + 1 = \frac{9}{8}$

Nullstellen mit $f(x) = 0$:

$-\frac{1}{\sqrt{x+3}} + x + 3 = 0 \quad | \quad +\frac{1}{\sqrt{x+3}}$

$x + 3 = \frac{1}{\sqrt{x+3}} \quad | \quad ^2$

$(x+3)^2 = \frac{1}{x+3} \quad | \quad \cdot(x+3)$

$(x+3)^3 = 1 \implies x_0 = -2$

$f'(-2) = \frac{2}{2\cdot 1\cdot\sqrt{1}} + 1 = 2$

b) $f(x) = \frac{1}{4}(x-2) - \frac{1}{(x-2)^3}$ $\quad f'(x) = \frac{1}{4} + \frac{3}{(x-2)^4}$

$f'(1) = \frac{1}{4} + \frac{3}{1} = \frac{13}{4}$

Nullstellen mit $f(x) = 0$:

$\frac{1}{4}(x-2) - \frac{1}{(x-2)^3} = 0 \quad | \quad \cdot(x-2)^3$

$\frac{1}{4}(x-2)^4 - 1 = 0 \quad | \quad +1;\ \cdot 4$

$(x-2)^4 = 4$

$x_1 =; \quad x_2 = -\sqrt{2} + 2$

$f'(\sqrt{2}+2) = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1; \quad f'(-\sqrt{2}+2) = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1$

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

c) $f(x) = 3(x-5)^2 + 4 = 3x^2 - 30x + 79 \qquad f'(x) = 6x - 30$

$f'(1) = 6 - 30 = -24$

Nullstellen mit $f(x) = 0$:

$3x^2 - 30x + 79 = 0 \qquad | \quad :3$

$x^2 - 10x + \frac{79}{3} = 0$

$x_{1,2} = 5 \pm \sqrt{25 - \frac{79}{3}} = 5 \pm \sqrt{-\frac{4}{3}} \qquad |$ p/q-Formel

Wegen negative Diskriminante hat f keine Nullstellen.

d) $f(x) = \frac{1}{(x+5)} - \frac{1}{(x+5)^2} + 1{,}84 \qquad f'(x) = -\frac{1}{(x+5)^2} + \frac{2}{(x+5)^3}$

$f'(1) = -\frac{1}{36} + \frac{1}{108} = -\frac{1}{54}$

Nullstellen mit $f(x) = 0$:

$\frac{1}{(x+5)} - \frac{1}{(x+5)^2} + 1{,}84 = 0 \qquad | \quad \cdot (x+5)^2$

$x + 5 - 1 + 1{,}84(x+5)^2 = 0$

$1{,}84x^2 + 19{,}4x + 50 = 0 \qquad | \quad :1{,}84$

$x^2 + 10{,}54x + 27{,}17 = 0$

$x_{1,2} = -5{,}27 \pm \sqrt{27{,}77 - 27{,}17} = -5{,}27 \pm \sqrt{0{,}6}$

$x_1 = -4{,}5; \quad x_2 = -6$

$f'(-4{,}5) = -\frac{1}{0{,}25} + \frac{2}{0{,}125} = -\frac{1}{0{,}125} = -8$

$f'(-6) = -1 - 2 = -3$

Lösung A3

Lösungslogik

Wegen der gegebenen Geraden $y = 2x$ sind die Punkte der Funktion gesucht, die die Steigung $m = 2$ haben, also $f'(x) = 2$.

Klausuraufschrieb:

$f(x) = -\frac{16}{x^2} + x = -16 \cdot x^{-2} + x \qquad f'(x) = \frac{32}{x^3} + 1$

$f'(x) = 2 = \frac{32}{x^3} + 1$

$x^3 = 32 \implies x_0 = 5$

$f(5) = -\frac{16}{25} + 5 = \frac{109}{25}$

Im Punkt $P\left(5 \middle| \frac{109}{25}\right)$ *hat* f *die Steigung* $m = 2$.

Lösung A4

Lösungslogik

Gesucht werden die x-Koordinaten, in denen f, g und h dieselbe Steigung haben. Die Berechnung erfolgt über Gleichsetzungen der 1. Ableitungen.

Klausuraufschrieb:

$f(x) = x^2 + 3 \qquad f'(x) = 2x$

$g(x) = x^3 \qquad g'(x) = 3x^2$

$h(x) = 2x + 6 \qquad h'(x) = 2$

Wegen $h'(x) = 2$ als Konstante, sind die x-Stellen von f und g mit der Steigung $m = 2$ gesucht.

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de

$f'(x) = 2 = 2x \quad \Rightarrow \quad x = 1$

$g'(x) = 2 = 3x^2 \;\Rightarrow\; x^2 = \frac{2}{3} \;\Rightarrow\; x_1 = \sqrt{\frac{2}{3}};\;\; x_2 = -\sqrt{\frac{2}{3}}$

f hat in $x = 1$, g in $x_1 = \sqrt{\frac{2}{3}}$ und $x_2 = -\sqrt{\frac{2}{3}}$ dieselbe Steigung wie h.

Lösung A5

Lösungslogik

Die Ableitung des Weges nach der Zeit ergibt die Geschwindigkeit, also ist $v = s'(t)$.

Klausuraufschrieb:

$s(t) = 5t^2$ $\qquad\qquad$ $s'(t) = 10t$

$s'(t) = 10 = 10t \quad \Rightarrow \quad t = 1$

Der Körper hat nach 1 Sekunde die Geschwindigkeit $10\,m/s$.

© by Fit-in-Mathe-Online, mehr als 500.000 Aufgaben für Schule und Studium
www.fit-in-mathe-online.de
Dr.-Ing. Meinolf Müller / webmaster@fit-in-mathe-online.de